Een numerieke aanpak van een gevoeligheidsanalyse van de één-dimensionale golfvergelijking







Samenvatting

In deze scriptie wordt onderzocht wat de invloed is van ruis op een meting bij het terugvinden van de golfsnelheid uit een numerieke oplossing van de één-dimensionale golfvergelijking. Voor de numerieke oplossing wordt er gebruik gemaakt van de Finite Differences-methode. Om stochastische variabiliteiten in het systeem te modelleren, wordt er gebruik gemaakt van toevalsbeginfuncties. Ook wordt bekeken welk effect een verdeling van de golfsnelheid heeft op de oplossing, om zo stochastische variabiliteiten in het systeem te kunnen modelleren. Vervolgens wordt besproken hoe de golfsnelheid uit een meting (met en zonder ruis) kan worden achterhaald en wat het effect van ruis op deze golfsnelheid is.

Inhoudsopgave

1	Introductie 1.1 Probleemstelling 1.2 Opbouw van de scriptie	3 3 4		
2	Numerieke methode voor het oplossen van de golfvergelijking2.1Nauwkeurigheid2.2Stabiliteit	$5 \\ 6 \\ 8$		
3	Bepalen van een toevalsbeginfunctie3.1Keuze voor de covariantiematrix3.2Keuze voor het aantal eigenwaarden	9 11 12		
4	Invloed van de verdeling van de golfsnelheid op de oplossing4.1Algemene werkwijze4.2Uniforme verdeling van de golfsnelheid4.3Normale verdeling van de golfsnelheid4.4Resultaat	14 14 15 17 19		
5	Het verkrijgen van de golfsnelheid uit een meting5.1Bepalen van de benodigde afgeleides van ϕ 5.2Analyse van ϕ en ϕ' 5.3Bisectiemethode5.3.1Voordelen van de bisectiemethode5.3.2Nadelen van de bisectiemethode5.4Newton-Raphson methode5.4.1Voordelen van deze methode5.4.2Nadelen van deze methode	$20 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \\ 24 \\ 24 \\ 24 \\ 26 \\ 26 \\ 26$		
6	Verkrijgen van de golfsnelheid uit een meting met ruis 6.1 Simuleren van een meting met ruis 6.2 Terugvinden van de golfsnelheid met behulp van de bisectiemethode 6.3 Fout tussen c en c_{meting} 6.4 Experiment	28 28 29 29 30		
7	Conclusie			
Ap	Appendices			

А	Exacte oplossing			
	A.1	Algemene oplossing	35	
	A.2	Randvoorwaarden	36	
	A.3	Beginvoorwaarden	36	
	A.4	Numerieke fout	38	

Hoofdstuk 1

Introductie

Golven zijn in ons dagelijks leven belangrijk: ze komen overal voor. Zo produceert een fluit of een klarinet geluid doordat er een staande golf onstaat tijdens het blazen. Ook bij snaarinstrumenten, een gitaar, piano en orgel, ontstaan er trillingen bij het bespelen doordat de lucht zich verplaats. Maar er zijn nog tal van voorbeelden te bedenken: in de magnetron worden golven veroorzaakt door een elektromagnetisch veld, om ons voedsel te kunnen verwarmen. Ook zijn er golven in fluida: geluidsgolven, golven in de zee en golven op het strand.

In 1746 heeft Jean le Rond d'Alembert de één-dimensionale golfvergelijking ontdekt, om golven wiskundig te kunnen beschrijven [10]. De vergelijking wordt dan ook wel de d'Alembert-vergelijking genoemd. Vervolgens heeft Euler de drie-dimensionale golvergelijking tien jaar later ontdekt. Beide vergelijkingen zijn een belangrijke ontdekking: hiermee kunnen onder andere de genoemde voorbeelden wiskundig worden beschreven.

In deze scriptie wordt de gevoeligheid van de oplossing van de één-dimensionale golfvergelijking voor veranderingen van de golfsnelheid onderzocht. Het doel is om vanuit een meting de golfsnelheid terug te vinden. Vaak is er een interval bekend waarbinnen de verwachte waarde van deze snelheid ligt. Deze schatting kan worden gebruikt om de precieze waarde van de gezochte golfsnelheid terug te vinden.

1.1 Probleemstelling

Eerst wordt de één-dimensionale golfvergelijking geïntroduceerd, om vervolgens te kunnen bespreken wat er in deze scriptie onderzocht wordt. Noem u = u(x, t) de oplossing van deze vergelijking. De golfvergelijking is als volgt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

waarbij $c \in \mathbb{R}$. Hierbij geldt $x \in [0, l]$ en $t \in [0, T]$ en is c de golfsnelheid.

In deze scriptie zullen de volgende randvoorwaarden gelden: u(0,t) = u(l,t) = 0 voor alle $t \in [0,T]$. De beginvoorwaarden zijn $u(x,0) = u_0(x)$ en $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ voor alle $x \in [0,l]$. Het doel van dit onderzoek is om de golfsnelheid uit een meting te achterhalen en om vervolgens te bekijken wat het effect van ruis in de meting is op de gevonden waarde van de golfsnelheid. Ruis wordt onder andere veroorzaakt door stochastische variabiliteiten in het systeem. Het systeem wordt gemodelleerd, maar hierin kunnen niet alle factoren die de golf beïnvloeden worden meegenomen. Om de variabiliteiten in het systeem na te bootsen, worden stochastische variaties aangebracht in de beginfunctie en in de golfsnelheid c.

1.2 Opbouw van de scriptie

Om bovenstaand doel te kunnen bereiken, zullen eerst een aantal andere punten moeten worden onderzocht. In deze scriptie zal een numerieke benadering van (1.1) worden bepaald met behulp van Finite Differences. Dan wordt er uitgelegd hoe toevalsbeginfuncties kunnen worden bepaald en zal er worden gekeken of er een verband bestaat tussen een verdeling van c en de verdeling van de oplossing u op een vast tijdstip en een vaste plaats. Vervolgens wordt onderzocht of de waarde van c kan worden teruggevonden uit een meting op plaats $r \in [0, l]$. Eerst zal de situatie worden bekeken waarin verondersteld wordt dat de metingen geen ruis bevatten. Twee methoden, de bisectiemethode en de methode van Newton-Raphson, worden hiervoor gebruikt. Dan wordt bekeken of de golfsnelheid kan worden herleid uit een meting met ruis. Tot slot wordt bekeken wat het effect van ruis is op de fout tussen de gevonden waarde van c en de waarde van c die dezelfde meting zonder ruis oplevert.

Hoofdstuk 2

Numerieke methode voor het oplossen van de golfvergelijking

De oplossing van (1.1) kan numeriek worden bepaald door de differentiaalvergelijking te discretiseren. De numerieke oplossing wordt in de volgende hoofdstukken meermaals gebruikt. Het is daarom handig om nu alvast de numerieke oplossing af te leiden. Vervolgens zal de stabiliteit en nauwkeurigheid van deze methode kort worden besproken.

Eerst wordt een uitdrukking voor $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ en voor $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ bepaald, zodat het resultaat kan worden gecombineerd met vergelijking (1.1). Noem de gediscretiseerde oplossing van (1.1) $u_{i,j}$, op positie *i* en op tijdstap *j*. Uit een Taylor expansie van $u(x_i, t_j + \Delta t) = u_{i,j+1}$ en $u(x_i, t_j - \Delta t) = u_{i,j-1}$ volgt:

$$\begin{cases} u_{i,j+1} = u_{i,j} + \Delta t \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\ u_{i,j-1} = u_{i,j} - \Delta t \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} - \mathcal{O}(\Delta t^3). \end{cases}$$

Optellen van bovenstaande geeft

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} = \frac{1}{\Delta t^2} (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) + \mathcal{O}(\Delta t^2).$$
(2.1)

Eenzelfde vergelijking kan worden verkregen met behulp van een Taylor expansie van $u(x_i + \Delta x, t_j) = u_{i+1,j}$ en $u(x_i - \Delta x, t_j) = u_{i-1,j}$. Dan geldt

$$\begin{cases} u_{i+1,j} = u_{i,j} + \Delta x \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^3) \\ u_{i-1,j} = u_{i,j} - \Delta x \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - \mathcal{O}(\Delta x^3) \end{cases}$$

waaruit volgt dat

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$
(2.2)

Afbreken van (2.1) en (2.2) levert een numerieke benadering op voor $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ en $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Deze uitdrukkingen kunnen worden gecombineerd met (1.1). Dit geeft:

$$\frac{1}{\Delta t^2}(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) = c^2 \frac{1}{\Delta x^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})$$

en dus

$$u_{i,j+1} = c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + (2u_{i,j} - u_{i,j-1})$$

= $c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + 2(1 - c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}) u_{i,j} - u_{i,j-1}$
= $\mu (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + 2(1 - \mu) u_{i,j} - u_{i,j-1}$ (2.3)

met $\mu = (c \frac{\Delta t}{\Delta x})^2$. Noem $a = 2(1 - \mu)$. Nu kan (2.3) worden herschreven tot

$$\mathbf{u}_{j+1} = A\mathbf{u}_j + B\mathbf{u}_{j-1} \tag{2.4}$$

In A en B zijn de randvoorwaarden u(0,t) = 0 en u(T,t) = 0 verwerkt door de eerste en de laatste rij van deze matrices 0 te stellen.

Voor c = 1 wordt de oplossing u weergegeven in Figuur 2.1. De oplossing wordt weergegeven voor meerdere tijdstippen. De gekozen beginfunctie is $u_0(x) = \sin(\pi x)$.

2.1 Nauwkeurigheid

Voor de Finite Difference methode wordt de lokale fout in t en in x bepaald. Uit (2.1) en (2.2) volgt dat voor de exacte oplossing u geldt:

$$c^{2} \frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}} - \frac{\partial^{2} u}{\partial t^{2}} = \frac{c^{2}}{\Delta x^{2}} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - \frac{1}{\Delta t^{2}} (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) - 2(\frac{c^{2}}{\Delta x^{2}} - \frac{1}{\Delta t^{2}}) u_{i,j} + \mathcal{O}(\Delta t^{2}) - \mathcal{O}(\Delta x^{2}).$$

Hieruit volgt dat

$$u_{i,j+1} = \Delta t^2 (\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} - 2(c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - 1) u_{i,j} + \mathcal{O}(\Delta t^2 \Delta x^2) - \mathcal{O}(\Delta x^4).$$
(2.5)

Daarnaast volgt uit (2.3) dat voor de numerieke oplossing $v_{i,j}$ geldt:

$$v_{i,j} = c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (v_{i+1,j} + v_{i-1,j}) + 2(1 - c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}) v_{i,j} - v_{i,j-1}.$$
(2.6)



Figuur 2.1: Numerieke oplossing van de golfvergelijking voor c = 1, $u_0(x) = \sin(\pi x)$, $\Delta x = 0.01$ en $\Delta t = 0.001$ op verschillende tijdstippen.

Definieer nu de fout $e_{i,j+1} = u_{i,j+1} - v_{i,j+1}$. Combineren van (2.5) en (2.6) geeft

$$\begin{split} e_{i,j+1} &= c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (u_{i+1,j} - v_{i+1,j} + u_{i-1,j} - v_{i-1,j}) - u_{i,j-1} + v_{i,j-1} - 2(c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - 1) u_{i,j} \\ &+ 2(c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - 1) v_{i,j} + \Delta t^2 (\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + \mathcal{O}(\Delta t^2 \Delta x^2) - \mathcal{O}(\Delta t^4) \\ &= c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (e_{i+1,j} + e_{i-1,j}) - e_{i,j-1} - 2c^2 (\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - 1) e_{i,j} + \Delta t^2 (\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) \\ &+ \mathcal{O}(\Delta t^2 \Delta x^2) - \mathcal{O}(\Delta t^4). \end{split}$$

Uit (1.1) volgt $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, dus

$$e_{i,j+1} = c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (e_{i+1,j} + e_{i-1,j}) - e_{i,j-1} - 2(c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - 1) e_{i,j} + \mathcal{O}(\Delta t^2 \Delta x^2) - \mathcal{O}(\Delta t^4).$$

Hieruit volgt

$$\frac{1}{\Delta t^2}(e_{i,j+1} - 2e_{i,j} + e_{i,j-1}) = \frac{c^2}{\Delta x^2}(e_{i+1,j} - 2e_{i,j} + e_{i-1,j}) + \mathcal{O}(\Delta x^2) - \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

Dit betekent dat de lokale fout zich kwadratisch gedraagt in Δt en in Δx .

2.2 Stabiliteit

De Finite Differences methode is niet altijd stabiel. Namelijk, voor het discretiseren van (1.1) geldt de Courant-Friedrichs-Levy conditie. Dit houdt in dat

$$|c|\frac{\Delta t}{\Delta x} \le 1 \tag{2.7}$$

moet gelden om de methode stabiel te houden. Dit is als volgt in te zien.

Bekijk de algemene oplossing $u(x, n\Delta t) = G^n e^{ikx}$ met $k \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$. Aangezien $|e^{ikx}| \leq 1$, moet $|G| \leq 1$ gelden voor stabiliteit. Uit (2.3) volgt, na invullen van deze algemene oplossing, dat

$$\begin{aligned} G^{n+1}e^{ikx} &= G^n[\mu e^{ik(x+\Delta x)} + \mu e^{ik(x-\Delta x)}] + 2(1-\mu)e^{ikx} + G^{n-1}e^{ikx} \\ &= G^n e^{ikx}[\mu e^{ik\Delta x} + \mu e^{-ik\Delta x} + 2(1-\mu)] + G^{n-1}e^{ikx}. \end{aligned}$$

Er geldt $e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x} = 2\cos(k\Delta x)$, dus

$$G^{n+1}e^{ikx} = G^n e^{ikx} [2\mu\cos(k\Delta x) + 2(1-\mu)] + G^{n-1}e^{ikx}.$$
(2.8)

Delen van (2.8) door $e^{ikx}G^{n-1}$ geeft

$$G^{2} - 2[\mu\cos(k\Delta x) - \mu + 1]G + 1 = 0.$$

Noem $b = \mu \cos(k\Delta x) - \mu + 1$. Oplossen voor G geeft $G = b \pm \sqrt{b^2 - 1}$.

Bekijk eerst de situatie voor $\mu \leq 1$. Voor $\mu \leq 1$ geldt $|b| = |\mu \cos(k\Delta x) - \mu + 1| \leq |\mu \cos(k\Delta x)| + |1 - \mu| \leq |\mu| + |1 - \mu| \leq 1$. Vervolgens geldt voor $|b| \leq 1$ dat $G = b \pm i\sqrt{1 - b^2}$, dus $|G|^2 = b^2 + 1 - b^2 = 1$. Dit betekent dat voor $\mu \leq 1$ de oplossing $u_{i,j+1}$ binnen de perken wordt gehouden en dus convergeert. Uit $\mu \leq 1$ volgt direct de Courant-Friedrichs-Levy conditie.

Bekijk nu de situatie voor $\mu > 1$. Dan geldt $|b| = |\mu \cos(k\Delta x) - \mu + 1| = |1 - 2\mu|$ voor $k\Delta x = \pi$. Voor $\mu > 1$ is er dus een waarde van $k\Delta x$ waarvoor |b| > 1. Voor $G = b + \sqrt{b^2 - 1}$ geldt dan $|G| = |b + \sqrt{b^2 - 1}| \ge |b| > 1$ en dus is de methode niet stabiel [7].

Intuïtief is dit als volgt in te zien. Uit (2.7) volgt $c\Delta t \leq \Delta x$. De waarde c geeft de snelheid aan waarmee een golf beweegt, dus $c\Delta t$ is de afstand die een golf aflegt in een tijd Δt . Als de golf een grotere afstand aflegt dan Δx in een tijd Δt , is de afstand te groot voor het numerieke model om deze snelheid bij te houden en is de methode dus instabiel [8].

Hoofdstuk 3

Bepalen van een toevalsbeginfunctie

Nu de numerieke oplossing is bepaald in Hoofdstuk 2, kunnen stochastische variaties worden gemodelleerd. In dit hoofdstuk wordt aandacht besteed aan het modelleren van deze variaties door middel van toevalsbeginfuncties.

Het doel is om een normaal verdeelde toevalsbeginfunctie u_0 te construeren met gemiddelde 0 en covariantie C. De covariantiematrix C kan als volgt worden geconstrueerd: $C = VDV^{-1}$, waarbij D een $n \times n$ diagonaalmatrix is met eigenwaarden en V een $n \times n$ matrix met eigenvectoren van C. Aangezien een reëele covariantiematrix symmetrisch is, geldt $V^{-1} = V^T$ waaruit volgt dat $C = VDV^T$.

Neem aan dat de eigenwaarden λ_i gesorteerd zijn van groot naar klein. Dan kan een beginfunctie als volgt worden beschreven [12]:

$$\hat{\mathbf{u}}_0 = \sqrt{DV}\mathbf{z}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} z_i \mathbf{v}_i,$$
(3.1)

waarbij D een $n \times n$ diagonaalmatrix met eigenwaarden λ_i is, V een $n \times n$ matrix met eigenvectoren \mathbf{v}_i en \mathbf{z} een $n \times 1$ vector met standaardnormaal verdeelde waarden z_i . Nu is $\hat{\mathbf{u}}_0$ een normaal verdeelde vector met gemiddelde 0 en covariantie C.

Aangezien n nogal groot kan zijn, wordt nu de mogelijkheid bekeken om de k grootste eigenwaarden te kiezen, met k < n. Dit kan immers veel rekentijd besparen. Vergelijking (3.1) wordt nu:

$$\tilde{\mathbf{u}}_0 = \sum_{i=1}^k \sqrt{\lambda_i} z_i \mathbf{v}_i \tag{3.2}$$

Het verschil tussen $\hat{\mathbf{u}}_0$ en $\tilde{\mathbf{u}}_0$ mag uiteraard niet te groot zijn. Hiertoe wordt de relatieve fout tussen $\hat{\mathbf{u}}_0$ en $\tilde{\mathbf{u}}_0$ berekend met behulp van de Euclidische norm. Eerst worden $\|\hat{\mathbf{u}}_0 - \tilde{\mathbf{u}}_0\|$ en $\|\hat{\mathbf{u}}_0\|$ afgeschat,

om vervolgens de relatieve fout te bepalen. Vanwege de driehoeksongelijkheid geldt:

$$\|\hat{\mathbf{u}}_0 - \tilde{\mathbf{u}}_0\| = \|\sum_{i=k+1}^n \sqrt{\lambda_i} z_i \mathbf{v}_i\|$$
$$\leq \sum_{i=k+1}^n \|\sqrt{\lambda_i} z_i \mathbf{v}_i\|.$$

Uit eerstegraads homogeniteit van de norm volgt

$$\sum_{i=k+1}^n \|\sqrt{\lambda_i} z_i \mathbf{v}_i\| = \sum_{i=k+1}^n |\sqrt{\lambda_i}| |z_i| \|\mathbf{v}_i\|.$$

Eigenvectoren zijn genormaliseerd, dus er geldt $||\mathbf{v}_i|| = 1$ voor alle *i*. Daarnaast geldt dat eigenvectoren van reële symmetrische matrices reëel zijn [2]. Aangezien *C* een reële symmetrische matrix is, geldt $|\sqrt{\lambda_i}| = \sqrt{\lambda_i}$. Dan geldt:

$$\sum_{i=k+1}^{n} |\sqrt{\lambda_i}| |z_i| \|\mathbf{v}_i\| = \sum_{i=k+1}^{n} \sqrt{\lambda_i} |z_i|.$$

Merk op dat λ_{k+1} de grootste eigenwaarde is van $\lambda_{k+1}, ..., \lambda_n$ aangezien deze gesorteerd zijn. Dan geldt ook dat $\sqrt{\lambda_{k+1}}$ de grootste waarde is van $\sqrt{\lambda_{k+1}}, ..., \sqrt{\lambda_n}$. Er geldt $\sum_{i=k+1}^n \sqrt{\lambda_i} \leq \sqrt{\lambda_{k+1}}(n-(k+1))$ en dus

$$\|\hat{\mathbf{u}}_{0} - \tilde{\mathbf{u}}_{0}\| \le \sqrt{\lambda_{k+1}}(n-k-1)\sum_{i=k+1}^{n} |z_{i}|$$
(3.3)

Op gelijkaardige wijze volgt:

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_{0}\| = \|\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_{i}} z_{i} \mathbf{v}_{i}\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \|\sqrt{\lambda_{i}} z_{i} \mathbf{v}_{i}\|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_{i}} |z_{i}|$$

$$\leq \sqrt{\lambda_{1}} n \sum_{i=1}^{n} |z_{i}|.$$
(3.4)

Nu kan de relatieve fout als volgt worden afgeschat. Er geldt $\frac{\sum_{i=k+1}^{n} z_i^2}{\sum_{i=1}^{n} z_i^2} \leq 1$ en $\frac{n-k-1}{n} \leq 1$, dus uit (3.3) en (3.4) volgt:

$$\frac{\|\hat{\mathbf{u}}_{0} - \tilde{\mathbf{u}}_{0}\|}{\|\hat{\mathbf{u}}_{0}\|} \leq \frac{\sqrt{\lambda_{k+1}}(n-k-1)\sum_{i=k+1}^{n}|z_{i}|}{\sqrt{\lambda_{1}}n\sum_{i=1}^{n}|z_{i}|} \leq \frac{\sqrt{\lambda_{k+1}}}{\sqrt{\lambda_{1}}}.$$
(3.5)

Als k groot genoeg is zodat λ_{k+1} veel kleiner is dan λ_1 , is het verschil tussen $\hat{\mathbf{u}}_0$ en $\tilde{\mathbf{u}}_0$ ook klein en voegen de eigenvectoren behorende bij de eigenwaarden $\lambda_{k+1}, ..., \lambda_n$ dus weinig toe aan de beginfunctie.

Matrix C is een matrix met de eigenwaarden λ_i en eigenvectoren \mathbf{v}_i die hierboven zijn gebruikt. Het is belangrijk dat deze matrix eigenwaarden heeft die snel kleiner worden, zodat een relatief kleine k kan worden gekozen [12]. Echter, bij een meting ligt deze matrix vast. Om toch de eigenschappen van een dergelijke matrix te onderzoeken, wordt hieronder een keuze voor C gemaakt. Ook wordt de relatieve fout van de eigenvectoren bij een keuze van k bekeken en wordt aan de hand van grafieken laten zien hoe verschillende keuzes voor k de beginfunctie beïnvloeden.

3.1 Keuze voor de covariantiematrix

Introduceer een functie f waarbij f continu en tweemaal differentieerbaar is en waarbij de tweede afgeleide ook continu is. Hier is gekozen voor C als de gediscretiseerde inverse van de negatieve tweede afgeleide van f, omdat deze matrix (die hieronder wordt bepaald) eigenwaarden heeft die snel kleiner worden. Dat blijkt in Hoofdstuk 3.2.

De tweede afgeleide wordt als volgt bepaald. Uit een Taylor expansie volgt

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \mathcal{O}(h^4)$$
(3.6)

en

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \mathcal{O}(h^4)$$
(3.7)

met h > 0 en $h \in \mathbb{R}$. Optellen van (3.6) en (3.7) geeft

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

en dus

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Nu geldt $f''(x) \approx Df(x)$ met

$$D = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en dus geldt $S = (-D)^{-1}$. Door de eerste en laatste rij 0 te stellen, is voldaan aan de randvoorwaarden u(0,t) = u(l,t) = 0 voor alle $t \in [0,T]$ en aan de beginvoorwaarde $\frac{\partial x}{\partial t}u(x,0) = 0$.

3.2 Keuze voor het aantal eigenwaarden

Kies $\Delta x = 0.01$ en $\Delta t = 0.001$. De methode van Finite Differences is nu stabiel zolang $c \leq 10$ (zie Hoofdstuk 2.2). Matrix S heeft afmetingen 101×101 , dus deze matrix heeft 101 eigenwaarden en -vectoren. De eerste tien eigenwaarden zijn de volgende:

 $\begin{array}{ll} \lambda_1 = 105.42 & \lambda_6 = 2.94 \\ \lambda_2 = 26.36 & \lambda_7 = 2.16 \\ \lambda_3 = 11.72 & \lambda_8 = 1.66 \\ \lambda_4 = 6.60 & \lambda_9 = 1.31 \\ \lambda_5 = 4.22 & \lambda_{10} = 1.06 \end{array}$

Uit (3.5) volgt dat de relatieve fout

$$\frac{\|\hat{\mathbf{u}}_0 - \tilde{\mathbf{u}_0}\|}{\|\hat{\mathbf{u}}_0\|} \le \frac{\sqrt{\lambda_{10}}}{\sqrt{\lambda_1}} = 0.100275 \tag{3.8}$$

is. Door k = 20 te kiezen, is de relatieve fout meer dan gehalveerd, namelijk 0.04123. Dat betekent dat met een relatief kleine k, een goede benadering voor $\hat{\mathbf{u}}_0$ kan worden gevonden. Dit is niet verassend, aangezien C zo was gekozen dat een relatief kleine waarde voor k zou volstaan. Hieruit kan dus worden geconcludeerd dat deze matrix C en een relatief kleine k < n,

$$\tilde{\mathbf{u}}_0 = \sum_{i=1}^k \sqrt{\lambda_i} z_i \mathbf{v}_i$$

een goede benadering geeft voor de oorspronkelijke beginfunctie (3.1).

In Figuur 3.1 wordt weergegeven wat het effect is van de keuze van k op de beginfunctie. Hier is gekozen voor $\Delta t = \Delta x = 0.001$. Matrix C heeft dus $\frac{1}{\Delta x} + 1 = 1001$ eigenvectoren. In Figuur 3.1d. is de beginfunctie getekend met alle eigenvectoren. Meteen valt op dat Figuur 3.1c. een goede benadering van Figuur 3.1d. geeft, terwijl er maar 1% van de eigenwaarden en -vectoren is gebruikt. Er kan dus worden geconcludeerd dat er een waarde voor k kan worden gekozen die een stuk kleiner is dan n, om zo rekentijd te besparen, terwijl er een goede beginfunctie wordt geconstrueeerd.



Figuur 3.1: Beginfunctie met behulp van de Karhunen-Loève expansie. Uit deze grafiek blijkt het effect van de keuze van het aantal eigenvectoren. Het aantal gebruikte eigenvectoren is k. **a.** k = 1**b.** k = 3 **c.** k = 10 **d.** k = 1001.

Hoofdstuk 4

Invloed van de verdeling van de golfsnelheid op de oplossing

In het vorige hoofdstuk is besproken hoe stochastische variabiliteit kan worden verwerkt door toevalsbeginfuncties te gebruiken. In dit hoofdstuk wordt stochastische variabiliteit op een andere manier verwerkt: er wordt bekeken of een verdeling van c informatie geeft over de verdeling van de oplossing van (1.1).

Er wordt gebruik gemaakt van een transformatie van stochastische variabelen om een verdeling van de oplossing u te vinden. Hiervoor wordt de oplossing op een vast tijdstip en op een vaste plaats bekeken. Eerst wordt besproken hoe deze methode precies werkt, onafhankelijk van de verdeling voor c, die later gekozen wordt. Vervolgens wordt de verdeling van u onderzocht voor een uniforme en een normale verdeling en wordt het resultaat getoond.

4.1 Algemene werkwijze

Het doel van deze transformatie is om een verdeling van de oplossing u op een vaste plaats en op een vast tijdstip te vinden. Hiertoe wordt eerst een keuze voor de stochastische variabelen X en Y gemaakt. De oplossing van (1.1) kan als volgt worden geschreven (zie hiervoor Appendix A):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x) \cos(n\pi ct).$$

Kies $u(x,0) = f(x) = \sin(\pi x)$, dan moet gelden

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x)$$
$$= \sin(\pi x).$$

Hieruit volgt dat $c_1 = 1$, $c_k = 0$ voor k = 2, 3, ... en dus geldt $u(x, t) = \sin(\pi x) \cos(\pi c t)$. Bekijk de oplossing op positie $r \in [0, l]$ en op tijdstip $t' \in [0, T]$. De oplossing wordt:

$$u(r, t') = \sin(\pi r) \cos(\pi t' c).$$

Kies stochastische variabelen X = c en $Y = \sin(\pi r) \cos(\pi t' X)$.

Neem aan dat de cumulatieve kansverdelingsfunctie $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ gegeven is. Het doel van deze transformatie is om kansdichtheidsfuntie $f_Y(y)$ te vinden. Aangezien $F_X(x)$ bekend is, kan dit worden bereikt door $F_Y(y)$ te schrijven in termen van $F_X(x)$. Vervolgens wordt $F_Y(y)$ afgeleid, waardoor $f_Y(y)$ verkregen wordt.

Eerst wordt bepaald hoe een algemene uitdrukking voor $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$ in termen van $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ kan worden verkregen, onafhankelijk van de verdeling van X. De periode van Y is $\frac{2\pi}{\pi t'} = \frac{2}{t'}$. Er geldt

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y)$$

= $\mathbb{P}(\sin(\pi r)\cos(\pi t'X) \le y)$
= $\mathbb{P}(\frac{1}{\pi t'}\arccos(\frac{y}{\sin(\pi r)}) \le X \le \frac{1}{\pi t'}[\frac{2}{t'} - \arccos(\frac{y}{\sin(\pi r)})]).$

Uit de kansrekening volgt [4]:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{\pi t'}\arccos(\frac{y}{\sin(\pi r)}) \le X\right) + \mathbb{P}\left(X \le \frac{1}{\pi t'}\left[\frac{2}{t'} - \arccos(\frac{y}{\sin(\pi r)})\right]\right)$$
$$= 1 - \mathbb{P}\left(X \le \frac{1}{\pi t'}\arccos(\frac{y}{\sin(\pi r)})\right) + \mathbb{P}\left(X \le \frac{1}{\pi t'}\left[\frac{2}{t'} - \arccos(\frac{y}{\sin(\pi r)})\right]\right).$$

Hieruit volgt

$$F_Y(y) = 1 - F_X(\frac{1}{\pi t'}\arccos(\frac{y}{\sin(\pi r)})) + F_X(\frac{1}{\pi t'}[\frac{2}{t'} - \arccos(\frac{y}{\sin(\pi r)})]).$$
(4.1)

In het vervolg van dit hoofdstuk zal $f_Y(y)$ worden bepaald voor een uniforme en een normale verdeling van c, door gebruik te maken van (4.1). Het resultaat van beide verdelingen zal worden getoond aan de hand van een voorbeeld. Er wordt afgesloten met een korte conclusie.

4.2 Uniforme verdeling van de golfsnelheid

Kies c uniform verdeeld met $c \in [a, b]$. Voor $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ wordt de cumulatieve kansverdelingsfunctie gegeven door

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ als } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} \text{ als } x \in [a,b) \\ 1 \text{ als } x \ge b. \end{cases}$$

$$(4.2)$$

Neem aan dat $y \in [a, b]$. Dan wordt de kansdichtheidsfunctie f_Y gegeven door

$$f_Y(y) = \frac{1}{b-a} \frac{2}{\pi t'} \frac{1}{\sqrt{\sin^2(\pi r) - y^2}}.$$

Hieronder wordt laten zien hoe dit volgt uit (4.1) en (4.2).



Figuur 4.1: Histogram van de numerieke oplossing u(r, t') en de grafiek van de kansdichtheidsfunctie (4.6) bij uniform verdeelde c.

De kansdichtheidsfunctie wordt bepaald door de cumulatieve kansverdeling voor Y, $F_Y(y)$, te vinden en deze vervolgens af te leiden naar y. Uit (4.1) en (4.2) volgt dat:

$$F_Y(y) = 1 + \frac{1}{b-a} \left[-\frac{1}{\pi t'} \arccos(\frac{y}{\sin(\pi r)}) + \frac{2}{\pi(t')^2} - \frac{1}{\pi t'} \arccos(\frac{y}{\sin(\pi r)}) - 2a \right]$$

= $1 + \frac{1}{b-a} \frac{-2}{\pi t'} \arccos(\frac{y}{\sin(\pi r)}) + \frac{2}{b-a} \frac{1}{\pi(t')^2} - 2\frac{a}{b-a}.$ (4.3)

Uit (4.3) kan $f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$ worden bepaald. Namelijk,

$$f_Y(y) = \frac{1}{b-a} \frac{-2}{\pi t'} \frac{d}{dy} \left(\arccos\left(\frac{y}{\sin(\pi r)}\right)\right)$$
(4.4)

Bepaal eerst $\frac{d}{dy}(\arccos(\frac{y}{\sin(\pi r)}))$. Er geldt:

$$\frac{d}{dy} \arccos(\frac{y}{\sin(\pi r)}) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{\sin(\pi r)^2}}} \frac{d}{dy} (\frac{y}{\sin(\pi r)})
= \frac{1}{\sin(\pi r)} \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{\sin(\pi r)^2}}}
= \frac{-1}{\sqrt{\sin^2(\pi r) - y^2}}.$$
(4.5)

Combineren van (4.4) en (4.5) geeft

$$f_Y(y) = \frac{1}{b-a} \frac{2}{\pi t'} \frac{1}{\sqrt{\sin^2(\pi r) - y^2}}.$$
(4.6)

Het histogram van de numerieke oplossing van (1.1) op tijdstip t' en plaats r wordt samen met de analytische oplossing (4.6) weergegeven in Figuur 4.1. Uiteraard is gekozen voor $u_0(x) = \sin(\pi x)$. Er is gekozen voor a = 1 en b = 5. De oplossing is getekend op tijdstip t = t' = 0.5 met $t \in [0, 4]$ en op plaats x = r = 0.7 met $x \in [0, 1]$. Deze keuzes zijn willekeurig. Voor 10000 waarden van c is de oplossing u berekend.

4.3 Normale verdeling van de golfsnelheid

Kies c normaal verdeeld met gemiddelde μ en variantie σ^2 . Voor $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ wordt de cumulatieve kansverdeling gegeven door

$$F_X(x) = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf}(\frac{x - \mu}{\sigma\sqrt{2}})], \qquad (4.7)$$

met de error functie $\operatorname{erf}(x)$ gegeven door:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

De kansdichtheidsfunctie f_Y wordt dan gegeven door

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\pi t'} \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{\sin^2(\pi r) - y^2}} \left(e^{-\left(\frac{\psi - \mu}{\sqrt{2\sigma}}\right)^2} + e^{-\left(\frac{1}{\pi t'} \frac{2}{t'} - \psi - \mu}{\sqrt{2\sigma}}\right)^2} \right)$$

met $\psi = \frac{1}{\pi t'} \arccos(\frac{y}{\sin(\pi r)})$. Hieronder wordt laten zien hoe dit volgt uit (4.1) en (4.7).

De kansdichtheidsfunctie wordt bepaald door de cumulatieve kansverdeling voor Y, $F_Y(y)$, te vinden en deze vervolgens af te leiden naar y. Bereken hiervoor alvast de afgeleide van de error functie en van ψ . Er geldt:

$$\frac{d}{dy}\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\frac{d}{dy}(x).$$
(4.8)

Uit (4.5) volgt dat

$$\frac{d}{dy}\psi = \frac{1}{\pi t'}\frac{-1}{\sqrt{\sin^2(\pi r) - y^2}}.$$
(4.9)

Bepaal nu eerst de cumulatieve kansverdelingsfunctie F_Y . Uit (4.1) en (4.7) volgt:

$$F_Y(y) = 1 - F_X(\psi) + F_X(\frac{1}{\pi t'}\frac{2}{t'} - \psi)$$

= $1 - \frac{1}{2}[1 + \operatorname{erf}(\frac{\psi - \mu}{\sqrt{2}\sigma})] + \frac{1}{2}[1 + \operatorname{erf}(\frac{\frac{1}{\pi t'}\frac{2}{t'} - \psi - \mu}{\sqrt{2}\sigma})]$
= $1 - \frac{1}{2}\operatorname{erf}(\frac{\psi - \mu}{\sqrt{2}\sigma}) + \frac{1}{2}\operatorname{erf}(\frac{\frac{1}{\pi t'}\frac{2}{t'} - \psi - \mu}{\sqrt{2}\sigma}).$



Figuur 4.2: Histogram van de numerieke oplossing u(r, t') en grafiek van de kansdichtheidsfunctie (4.10) bij normaal verdeelde c.

Voor $f_Y(y)$ geldt nu $f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y)$, dus

$$f_Y(y) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\operatorname{erf}(\frac{\psi-\mu}{\sqrt{2}\sigma}) + \frac{1}{2}\frac{d}{dy}\operatorname{erf}(\frac{\frac{1}{\pi t'}\frac{1}{t'}-\psi-\mu}{\sqrt{2}\sigma}).$$

Bepaal eerst $\frac{d}{dy} \operatorname{erf}(\frac{\psi-\mu}{\sqrt{2}\sigma})$ en $\frac{d}{dy} \operatorname{erf}(\frac{\frac{1}{\pi t'} \frac{2}{t'} - \psi - \mu}{\sqrt{2}\sigma})$, om dit vervolgens te kunnen combineren tot $f_Y(y)$. Uit (4.8) en (4.9) volgt

$$\frac{d}{dy}\operatorname{erf}(\frac{\psi-\mu}{\sqrt{2}\sigma}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dy}(\frac{\psi-\mu}{\sqrt{2}\sigma})e^{-(\frac{\psi-\mu}{\sqrt{2}\sigma})^2}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma}}\frac{1}{\pi t'}\frac{-1}{\sqrt{\sin^2(\pi r) - y^2}}e^{-(\frac{\psi-\mu}{\sqrt{2}\sigma})^2}.$$

Ook volgt hieruit dat

$$\frac{d}{dy} \operatorname{erf}\left(\frac{\frac{1}{\pi t'} \frac{2}{t'} - \psi - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dy} \left(\frac{\frac{1}{\pi t'} \frac{2}{t'} - \psi - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) e^{-\left(\frac{\frac{1}{\pi t'} \frac{2}{t'} - \psi - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} \\ = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{1}{\pi t'} \frac{1}{\sqrt{\sin^2(\pi r) - y^2}} e^{-\left(\frac{\frac{1}{\pi t'} \frac{2}{t'} - \psi - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}$$

Dit combineren geeft

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\pi t'} \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{\sin^2(\pi r) - y^2}} \left(e^{-\left(\frac{\psi - \mu}{\sqrt{2\sigma}}\right)^2} + e^{-\left(\frac{\frac{1}{\pi t'} \frac{1}{t'} - \psi - \mu}{\sqrt{2\sigma}}\right)^2} \right).$$
(4.10)

Het histogram van de numerieke oplossing van (1.1) wordt samen met de analytische oplossing (4.10) weergegeven in Figuur 4.2. Hier is gekozen voor $c \sim \mathcal{N}(1,1)$. Uiteraard is gekozen voor $u_0(x) = \sin(\pi x)$. De oplossing is getekend op tijdstip t = t' = 1 met $t \in [0,1]$ en op plaats x = r = 0.7 met $x \in [0,1]$. Voor 10000 waarden van c is de oplossing u berekend.

4.4 Resultaat

Ondanks dat de kansdichtheidsfuncties (4.6) en (4.10) niet hetzelfde zijn, lijken de grafieken erg op elkaar. Dit blijkt uit Figuur 4.1 en 4.2. Dit is verrassend, aangezien de bijbehorende verdelingen van c zeer verschillend zijn.

Toch is de vorm van het histogram, en dus van de kansdichtheidsfunctie, te verklaren. De minimale en maximale waarden worden voor beide verdelingen van c veruit het vaakst bereikt, zoals blijkt uit Figuur 4.1 en 4.2. Dit is als volgt te beredeneren. De snelheid van de golf is het laagst rond de minima en maxima; de snelheid op de toppen is immers 0. Dat betekent dat u deze waarden vaker aanneemt, wat pieken veroorzaakt aan beide uiteinden van het histogram.

Hieruit kan worden geconcludeerd dat de verdeling van de oplossing u voornamelijk wordt bepaald door het tijdsverloop van u en in mindere mate door de verdeling van c.

Tot slot zou het interessant zijn om te bekijken of een soortgelijke verdeling ontstaat als voor c bijvoorbeeld een exponentiële of logistische verdeling wordt gekozen. Toch is het waarschijnlijk dat een uniforme of normale verdeling voor c gangbaarder is, wat ook de reden is dat er voor deze verdelingen van c is gekozen.

Hoofdstuk 5

Het verkrijgen van de golfsnelheid uit een meting

In dit hoofdstuk wordt onderzocht of vanuit een meting op plaats $r \in [0, l]$ de golfsnelheid kan worden herleid. Noem $u_n(c)$ de numerieke oplossing van (1.1) voor een waarde van c op tijdstip $n \leq N \in \mathbb{N}$. Deze oplossing is bepaald met de methode beschreven in Hoofdstuk 2. Noem d_n de meting op tijdstip n en plaats r.

Definieer

$$\phi(c) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} |u_n(c) - d_n|^2$$
(5.1)

als de fout tussen de meting en de oplossing voor een bepaalde waarde van c [9]. Uiteraard is een zo klein mogelijke fout gewenst, dus geeft min $\phi(c)$ de gewenste waarde voor c.

Het minimum van ϕ kan worden bepaald door $\phi'(c) = 0$ op te lossen. De waarde(n) van c waarvoor $\phi'(c) = 0$ geldt, wordt numeriek bepaald met de bisectiemethode en de Newton-Raphon methode. Eerst worden ϕ' en ϕ'' bepaald, aangezien deze nodig zijn voor deze methoden. Dan zullen ϕ en ϕ' worden geanalyseerd en zullen beide methoden worden toegelicht. De voor- en nadelen van beide methoden worden besproken.

5.1 Bepalen van de benodigde afgeleides van ϕ

Bepaal eerst ϕ' . Uit (5.1) volgt:

$$\phi'(c) = \sum_{n=1}^{N} (u_n(c) - d_n) \frac{\partial u_n(c)}{\partial c}.$$
(5.2)

Uit (2.4) volgt $u_{n+1} = Au_n + Bu_{n-1}$, dus

$$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial c} = A' u_n + A \frac{\partial u_n}{\partial c} + B \frac{\partial u_{n-1}}{\partial c}.$$
(5.3)

Bepaal ook ϕ'' . Uit (5.2) en uit de kettingregel volgt dat

~

$$\phi''(c) = \frac{d}{dc} \left[\sum_{n=1}^{N} u_n(c) \frac{d}{dc} u_n(c) - d_n \frac{d}{dc} u_n(c) \right]$$

=
$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{d}{dc} u_n(c) \right)^2 + u_n(c) \frac{d^2}{dc^2} u_n(c) - d_n \frac{d^2}{dc^2} u_n(c)$$

=
$$\sum_{n=1}^{N} \left(u_n(c) - d_n \right) \frac{\partial^2}{\partial c^2} u_n(c) + \left(\frac{\partial}{\partial c} u_n(c) \right)^2.$$

Uit (5.3) volgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{n+1}}{\partial c^2} &= \frac{d}{dc} [A' u_n + A \frac{\partial u_n}{\partial c} + B \frac{\partial u_{n-1}}{\partial c}] \\ &= A'' u_n + 2A' \frac{\partial u_n}{\partial c} + A \frac{\partial^2 u_n}{\partial c^2} + B \frac{\partial^2}{\partial c^2} u_{n-1}. \end{aligned}$$
Noem $\nu' = \rho = 2(\frac{\Delta t}{\Delta x})^2$. Dan geldt $A'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \rho & -2\rho & \rho & & 0 \\ \rho & -2\rho & \rho & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \rho & -2\rho & \rho \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

5.2 Analyse van ϕ en ϕ'

Voordat de bisectiemethode en de Newton-Raphson methode worden besproken, is het goed om ϕ en ϕ' te bekijken om zo een beter begrip te krijgen van de te verwachten resultaten. Het doel is om c te vinden door het minimum te bepalen van ϕ en dus het nulpunt van ϕ' .

Het bekijken van één voorbeeld geeft al direct een goede indruk van de problemen die het vinden van de juiste c geeft. Bekijk hiervoor Figuur 5.1, waarin ϕ en ϕ' worden weergegeven. De beginfunctie is geconstrueerd met de Karhunen-Loève expansie (Hoofdstuk 3). Er is gekozen voor c = 0.5 en r = 0.7.

Er is duidelijk een minimum bij c = 0.5, de gewenste oplossing, maar ook is duidelijk dat deze

functie meerdere (lokale) minima heeft. Daarnaast leveren (lokale) maxima ook $\phi' = 0$ op: ϕ' heeft hier 4 snijpunten met de *x*-as. Meerdere nulpunten op een dergelijk interval is zeker niet uitzonderlijk. In de volgende secties zal blijken dat dit problemen op kan leveren bij het vinden van de juiste *c*.



Figuur 5.1: Grafieken voor c = 0.5 en r = 0.7. Hier blijkt dat het nulpunt van ϕ meteen volgt uit grafiek **a.**, maar dat ϕ' meerdere nulpunten heeft: grafiek **b.**. Dit bemoeilijkt het vinden van de juiste c.

5.3 Bisectiemethode

Voor een functie f waarvan de afgeleide bestaat en continu is, wordt gezocht naar een $x \in \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat f(x) = 0. Met behulp van de bisectiemethode gaat dit als volgt. Ten eerste wordt er een interval gekozen waarbinnen de oplossing voor x ligt. Noem dit interval [a, b] met $a < b \in \mathbb{R}$. Vervolgens wordt aan de hand van de functiewaarde $f(\frac{a+b}{2})$ bepaald of de gezochte waarde voor x links of rechts van het midden van het gekozen interval ligt. Immers, als $f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) < 0$, dan ligt het nulpunt van f links van $x = \frac{a+b}{2}$. Het interval wordt aangepast naar $[a, \frac{a+b}{2}]$. Voor $f(b)f(\frac{a+b}{2}) > 0$ geldt eenzelfde argument; het interval wordt dan aangepast naar $[\frac{a+b}{2}, b]$. Bovenstaande wordt herhaald tot het verschil van opeenvolgende waarden van x kleiner zijn dan een marge ϵ . Indien $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, is een nulpunt bereikt en hoeft niet verder te worden



Figuur 5.2: Visualisatie van de bisectiemethode. **a.** Het initiële interval is [0.2, 1]. Het nulpunt ligt in de linkerhelft van dit interval. **b.** Het nieuwe interval wordt [0.2, 0.6]. Het nulpunt ligt in de rechterhelft van het dit interval. **c.** Het nieuwe interval wordt [0.4, 0.6]. **d.** Het nulpunt c = 0.5 is gevonden.

gezocht. Aangezien nulpunten voor ϕ' worden gezocht, is gekozen voor $f = \phi'$ en x = c en wordt het algoritme dus als volgt:

- 1. Kies een interval [a, b].
- 2. Bepaal $\phi'(\frac{a+b}{2})$, $\phi'(a)$ en $\phi'(b)$. Indien $\phi'(a)\phi'(\frac{a+b}{2}) < 0$, dan $b = \frac{a+b}{2}$. Indien $\phi'(\frac{a+b}{2}) = 0$, stop. Anders, $a = \frac{a+b}{2}$.
- 3. Herhaal 2. totdat $b a < \epsilon$.

In Figuur 5.2 is dit algoritme gevisualiseerd voor ϕ' , waarbij $u_0(x) = \sin(\pi x)$. Initieel is gekozen voor het interval [0.2, 1]. Het doel is om het nulpunt van ϕ' , c = 0.5, te vinden. In de eerste stap wordt de linkerhelft van het interval gekozen want $f(0.2) \cdot f(0.6) < 0$, dus wordt het nieuwe interval [0.2, 0.6]. Vervolgens geldt $f(0.2) \cdot f(0.4) > 0$, dus wordt het nieuwe interval [0.4, 0.6]. In de volgende stap levert halveren van het interval $\phi'(0.5) = 0$ op en wordt dus het nulpunt, c = 0.5, gevonden.

5.3.1 Voordelen van de bisectiemethode

Een groot voordeel van deze methode is dat de waarde die voor c wordt gevonden altijd binnen het initiële interval [a, b] ligt: door het interval telkens te halveren, geldt voor alle $k \ge 1$ dat het interval na k iteraties, $[a_k, b_k]$, bevat is in [a, b].

Daarnaast is een groot voordeel dat deze methode altijd een nulpunt oplevert (in tegenstelling tot de Newton-Raphson methode, hierover straks meer). Uiteraard onder de voorwaarde dat [a, b]een nulpunt voor f bevat. Indien een interval bekend is waar maar één nulpunt in ligt, wordt dus altijd dit nulpunt gevonden. Het bewijs van deze convergentie is als volgt.

Ten eerste geldt $b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \dots = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} = \frac{b-a}{2^{k-1}}$ voor alle $k \ge 1$. Hieruit volgt $\lim_{k\to\infty} b_k - a_k = 0$ en dus $\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} a_k = \alpha \in \mathbb{R}$. Er is een k waarvoor $f(a_k) \in 0$ geldt: er ligt immers een nulpunt in $[a_k, b_k]$ voor alle $k \ge 1$. Dan volgt $\lim_{k\to\infty} f(a_k)f(b_k) = f(\alpha)^2 \le 0$, dus $f(\alpha) = 0$. De bisectiemethode convergeert dus naar een nulpunt van f [5].

5.3.2 Nadelen van de bisectiemethode

Een nadeel van deze methode is dat dit niet altijd het gewenste nulpunt oplevert. Dat kan gebeuren als het interval te groot wordt gekozen. Echter, "te groot" kan een relatief klein interval zijn: zo gauw het interval meerdere nulpunten heeft, kan dit gebeuren.

Of de gevonden oplossing c daadwerkelijk een oplossing van $\phi' = 0$ is, kan worden gecontroleerd. Immers, invullen van c moet $\phi(c) = 0$ opleveren. Uiteraard is dit niet wenselijk: men wil uit deze methode direct de juiste c vinden. Het interval zal moeten worden aangepast en de methode moet opnieuw worden uitgevoerd.

Tot slot is een nadeel dat deze methode slechts lineair convergeert. Het bewijs hiervoor is als volgt. Noem $[a_k, b_k]$ het interval na de k^e iteratie. In elke stap wordt het interval gehalveerd: de linker- of de rechterhelft van het interval wordt gekozen om in verder te gaan. Aangezien a < b moet ook nog altijd $a_k < b_k$ gelden. Dan geldt $b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1})$ voor alle $k \ge 1$. Noem $\epsilon_k = b_k - a_k$, dit geeft een maat voor de fout na de k^e iteratie. Dan volgt $\epsilon_{k+1} = \frac{1}{2}\epsilon_k$, waaruit volgt dat deze methode lineair convergeert [3] [5].

5.4 Newton-Raphson methode

Een andere numerieke iteratiemethode die kan worden gebruikt is de methode van Newton-Raphson. Voor een functie f waarvan de afgeleide bestaat en continu is, wordt gezocht naar een $x \in \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat f(x) = 0. Een Taylor expansie van f(x) rond x_0 geeft

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \mathcal{O}(x^2).$$

Door bovenstaande af te breken op $\mathcal{O}(x^2)$, geldt voor het nulpunt van f, x, dat $f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0$ en dus

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$
(5.4)

De methode van Newton-Raphson breidt dit idee uit. Kies een intitiële waarde x_0 en bepaal met behulp van (5.4) een betere benadering x_1 voor het nulpunt. Bepaal vervolgens vanuit x_1 een betere benadering x_2 . Dit proces wordt als volgt weergegeven. Neem hierbij aan dat $f'_n(x) \neq 0$ voor alle $n \geq 0$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{5.5}$$

Dit proces wordt herhaald totdat x_n de gezochte waarde x goed genoeg benaderd. Aan de hand van het verschil tussen twee opeenvolgende waarden van x_n wordt de fout bepaald. Indien dit verschil kleiner is dan een foutmarge ϵ stopt het proces en is het nulpunt van f bepaald.

In Figuur 5.3 zijn de eerste stappen van deze methode gevisualiseerd voor functie $f(x) = x^2 - 4$ en initiële waarde $x_0 = 6$. De waarde van x_1 wordt bepaald met (5.5) en zo wordt $x_1 = 6 - \frac{f(6)}{f'(6)} = 3.33$ gevonden. De oplossing x = 2 wordt dus in drie stappen met een fout van 0.01 gevonden [6].



Figuur 5.3: Visualisatie van de Newton-Raphson methode. **a.** De initiële waarde is $x_0 = 6$. Het snijpunt met de *x*-as van de raaklijn is $x_1 = 3.33$. **b.** Vanuit $x_1 = 3.33$ wordt $x_2 = 2.27$ bepaald. **c.** De methode levert $x_3 = 2.01$ op. **d.** De oplossing wordt gevonden met een fout van 0.01.

Aangezien er wordt gezocht naar het nulpunt van ϕ' , beschrijft nu

$$c_{n+1} = c_n - \frac{\phi'(c_n)}{\phi''(c_n)}$$

de Newton-Raphson methode voor ϕ' , waarbij c_n de benadering is van het nulpunt van ϕ' in de n^e tijdstap.

5.4.1 Voordelen van deze methode

Een voordeel van deze methode is dat deze kwadratisch convergeert. Neem x als de wortel van f en kies x_n als benadering van x, zodanig dat $|x - x_n| \ll 1$. Herschrijven van (5.5) geeft

$$f(x_n) = (x_n - x_{n+1})f'(x_n).$$
(5.6)

Uit een Taylor expansie rond x_n volgt

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(x - x_n)^2 f''(\xi),$$
(5.7)

voor ξ tussen x_n en x [1]. Voor het nulpunt geldt uiteraard f(x) = 0. Invullen van (5.6) in (5.7) geeft

$$f(x) = (x_n - x_{n+1})f'(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(x - x_n)^2 f''(\xi)$$

= $(x - x_{n+1})f'(x_n) + \frac{1}{2}(x - x_n)^2 f''(\xi)$
= 0.

Noem nu $\epsilon_n = x - x_n$. Dit geeft de absolute fout aan tussen x en de gevonden waarde x_n . Dan geldt $\epsilon_{n+1} = x - x_{n+1}$ en dus

$$f(x) = \epsilon_{n+1} f'(x_n) + \frac{1}{2} \epsilon_n^2 f''(\xi)$$

= 0.

Hieruit volgt

$$\epsilon_{n+1} = -\frac{\epsilon_n^2 f''(\xi)}{2f'(x_n)}$$

en dus wordt de fout ϵ_n met elke tijdstap kwadratisch kleiner [5].

5.4.2 Nadelen van deze methode

Net als bij de bisectiemethode, levert ook deze methode problemen op als f meerdere nulpunten heeft. Echter, nu is er geen interval dat kan worden afgebakend waarop wordt gezocht: het zoeken start vanuit een initiële waarde. Zelfs als deze initiële waarde dicht bij het gewenste nulpunt ligt, kan het zijn dat een ander nulpunt, ver van de initiële waarde, wordt gevonden. Dit hangt namelijk af van het gedrag van f'. Dit gebeurt bijvoorbeeld als $f'(x_n) \ll 1$. Dan ligt x_n dicht bij een fixpunt van f. Daardoor kan $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ heel groot worden waardoor x_{n+1} een veel slechtere benadering geeft voor x dan x_n .

Een ander groot nadeel bij het gebruik van deze methode, is dat de afgeleide f' moet worden bepaald. Vaak is het lastig een analytische vorm van de afgeleide te bepalen. Soms volstaat een numerieke benadering van de afgeleide, maar dit resulteert in extra rekentijd. Het is een voordeel dat de methode kwadratisch convergeert, maar deze extra rekentijd resulteert erin dat de bisectiemethode, hoewel deze lineair convergeert, in deze toepassing alsnog sneller is.

Daarnaast hangt de waarde van het gevonden nulpunt sterk af van de gekozen initiële waarde x_0 . Zoals eerder genoemd, kan het zijn dat het gewenste nulpunt niet worden gevonden bij een

verkeerde keuze van x_0 . Dit gebeurt vaak als x_0 te ver weg ligt van de oplossing x.

Aangezien er alleen een initiële waarde x_0 wordt gegeven, kan het gebeuren dat x_n na n iteraties ver weg komt te liggen van x_0 . Als de numerieke methode voor x_n niet stabiel is, kan ϕ' niet worden bepaald. Er kan dan uiteraard geen oplossing worden gevonden.

Tot slot kan het ook gebeuren dat er een cykel om het nulpunt heen ontstaat, waardoor de methode nooit zal convergeren. Dit heeft onder andere te maken met de gekozen initiële waarde x_0 . Dit is echter eenvoudig op te lossen bij het schrijven van code, door op de n^e iteratie het verschil tussen de gevonden waarden van x_n en x_{n-2} te nemen, alsook van x_{n-1} en x_{n-3} . Als beide verschillen kleiner zijn dan een marge ϵ , stellen we vast dat er een periodieke cykel is ontstaan.

Hoofdstuk 6

Verkrijgen van de golfsnelheid uit een meting met ruis

In dit hoofdstuk wordt onderzocht hoe gevoelig de golfsnelheid c is voor ruis in een meting. Eerst wordt besproken hoe een meting met ruis kan worden gesimuleerd. Het is belangrijk dat deze meting wordt geconstrueerd vanuit een oplossing van (1.1) zonder ruis waarvoor c bekend is. Zo kan namelijk een fout van de gevonden golfsnelheid ten opzichte van de bekende waarde van c worden bepaald.

Vervolgens wordt besproken hoe de golfsnelheid uit de meting met ruis kan worden verkregen. De bisectiemethode (zie Hoofdstuk 5.3) wordt hiervoor gebruikt. De voornaamste reden dat er voor de bisectiemethode is gekozen, is omdat bij deze methode de oplossing wordt gezocht binnen een vastgesteld interval. De waarde van c is bekend en dus kan er een interval worden gegeven waarbinnen de golfsnelheid uit de meting zal liggen. Bij een echte meting werkt het uiteraard andersom: dan is alleen de golfsnelheid uit de meting gegeven. Toch kan er dan vaak een schatting worden gegeven voor het interval van c. Daarnaast levert het voordeel van Newton-Raphson, de fout die kwadratisch kleiner wordt, weinig op ten opzichte van de bisectiemethode. Dat komt voornamelijk doordat ϕ' en ϕ'' in elke stap berekend moeten worden en dat kost relatief veel tijd.

Vervolgens wordt de fout op de gevonden golfsnelheid gedefinieerd en wordt aangegeven wat er naar verwachting zal gebeuren bij het vergroten van de ruis. Tot slot zal een experiment worden besproken en toegelicht.

6.1 Simuleren van een meting met ruis

Om een meting met ruis op te stellen, wordt gebruik gemaakt van een numerieke oplossing $u_n(c)$ van (1.1), op een vaste plaats $r \in [0, l]$ en op tijdstip $n \in [0, N]$, waarbij $n \in \mathbb{N}$ het aantal tijdstappen is. De waarde van c behorende bij u_n is bekend.

Aan de oplossing $u_n(c)$ wordt voor elk tijdstip n een standaardnormaalverdeelde toevalsruis f_n toegevoegd. Vervolgens wordt deze ruis met een scalair $\gamma \in \mathbb{R}$ vermenigvuldigd, zodat kan worden bepaald wat het effect is van het vergroten van ruis op het terugvinden van de golfsnelheid. Voor verschillende waarden van γ zal worden bepaald hoe veel de gevonden golfsnelheid afwijkt van de

waarde van c die bij $u_n(c)$ hoort. Voor een meting d_n op tijdstip $n \in [0, N]$ en op een vaste plaats, geldt dus

$$d_n = u_n(c) + \gamma f_n. \tag{6.1}$$

6.2 Terugvinden van de golfsnelheid met behulp van de bisectiemethode

Eerst wordt een uitdrukking bepaald voor de fout tussen $u_n(c)$ en d_n , vergelijkbaar met (5.1), zodat een extremum van deze functie kan worden bepaald. Dit levert een waarde c_{meting} op: de golfsnelheid die wordt gevonden uit d_n . Uit (6.1) volgt dat

$$\phi_{\text{ruis}}(c) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} |u_n(c) - (d_n + \gamma f_n)|^2.$$

Het minimum van ϕ_{ruis} wordt bepaald door $\phi'_{ruis} = 0$ op te lossen. Er geldt

$$\phi_{\text{ruis}}'(c) = \sum_{n=1}^{N} (u_n(c) - (d_n + \gamma f_n)) \frac{\partial u_n(c)}{\partial c},$$

waarbij $\frac{\partial u_n(c)}{\partial c}$ voldoet aan (5.3). Uit deze uitdrukking voor ϕ'_{ruis} blijkt dat de functie slechts is verschoven ten opzichte van ϕ' . Nu kan met behulp van de bisectiemethode de waarde van c_{meting} worden bepaald, zoals beschreven in Hoofdstuk 5.3.

Een probleem met deze methode is dat een nulpunt van ϕ'_{ruis} niet altijd een globaal minimum oplevert: de oplossing kan ook een lokaal minimum of zelfs een maximum zijn. Dit kan worden opgelost door ϕ''_{ruis} te berekenen, maar dit kost erg veel rekentijd. Daarnaast kan dit probleem in veel gevallen worden beperkt het initiële interval klein genoeg te kiezen.

6.3 Fout tussen c en c_{meting}

Definieer de fout η tussen c en c_{meting} als volgt:

$$\eta = c - c_{\text{meting}}.$$

Op deze manier heffen positieve en negatieve waarden van η elkaar op bij het berekenen van de gemiddelde fout. Aangezien de ruis f_n standaardnormaal verdeeld is, is de verwachting dat de gemiddelde fout 0 is, ongeacht de waarde van γ . Uiteraard zijn hier voldoende experimenten voor nodig. Door de fout op deze manier te definiëren, geeft dit een maat voor de spreiding van de fout.

De verwachting is dat de spreiding van de fout groter zal worden naarmate γ toeneemt. Er geldt namelijk $\operatorname{Var}(rX) = r^2 \operatorname{Var}(X)$ voor $r \in \mathbb{R}$ [4]. Dan volgt dat voor $f_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ geldt $\gamma f_n \sim \mathcal{N}(0, \gamma^2)$. Dit gaat echter niet helemaal op, aangezien de oplossingen binnen het gekozen interval voor de bisectiemethode liggen. Toch is de verwachting dat de spreiding toe zal nemen als de ruis wordt vergroot. Nu kan een experiment worden uitgevoerd door voor verschillende waarden van γ de fout η te bepalen en vervolgens de spreiding van de fout te bekijken. Kies γ tussen 0 en p, met stappen Δp . Dit levert $\frac{1}{\Delta p} + 1$ waarden voor γ op. Door γ uit te zetten tegen de fout, ontstaat een beeld van het gedrag van de fout bij een toename van ruis.

6.4 Experiment

Bovenstaande analyse is uitgevoerd voor een numerieke oplossing u_n met verschillende waarden voor c op een vaste plaats. Eerst wordt de aanpak uitgelegd, vervolgens worden de resultaten getoond.

Voor elke waarde van c is een geschikt interval gekozen om de bisectiemethode op toe te passen. Een te groot interval kan twee of meer nulpunten bevatten voor ϕ' , waardoor het verkeerde nulpunt kan worden gevonden. Een te klein interval (dat een nulpunt bevat) kan ervoor zorgen dat c_{meting} buiten het interval komt te liggen (deze waarde kan de bisectiemethode dus niet vinden), waardoor de weergegeven fout geen representatief beeld geeft.

De nauwkeurigheid is voor elke c hetzelfde, namelijk $\epsilon = 10^{-16}$. Aangezien de nauwkeurigheid wordt gemeten als het verschil tussen de huidige en de voorlaatste waarde van c, hoeft dit niet te betekenen dat de juiste waarde wordt gevonden. Om de oplossingen te kunnen vergelijken, is gekozen voor de beginfunctie $u_0(x) = \sin(\pi x)$.

De oplossingen zijn bekeken op een vaste plaats, r = 0.7. De waarden van de beginfunctie $u_0(x) = \sin(\pi x)$ ligt tussen -1 en 1; ook voor de overige tijdstappen zijn de waarden $\mathcal{O}(1)$. Daarom is er gekozen voor γ tussen 0 en 3, in stappen van $\Delta p = 0.001$. Dit betekent dat de standaarddeviatie op de ruis maximaal 3 is, namelijk γ . De gekozen waarden voor c zijn: c = 0.4, c = 0.6, c = 1 en c = 1.2.

In Figuur 6.1 is te zien welk effect de ruisfactor heeft op het verschil tussen c en c_{meting} . De rode lijn geeft het voortschrijdende gemiddelde aan van de absolute fout. Zoals verwacht, is het gemiddelde van de fout voor alle γ ongeveer 0, behalve voor c = 0.4. Voor grotere waarden van γ neemt het gemiddelde voor c = 0.4 af. Dit komt wellicht doordat de waarde van c_{meting} die zou moeten worden gevonden, niet meer binnen het intiële interval ligt. De bisectiemethode kan de gezochte waarde dus niet vinden.

Daarnaast neemt de spreiding van de fout, en dus ook de spreiding van de oplossing c_{meting} , toe als γ wordt vergroot. De conclusie kan worden getrokken dat de fout toeneemt bij het vergroten van de ruis. Aangezien voor alle c de fout wordt begrensd door het interval waarop de bisectiemethode wordt uitgevoerd, kan er verder geen conclusie worden getrokken over de spreiding van de fout. Naarmate de ruis toeneemt, kan er dus steeds minder waarde worden gehecht aan de gevonden golfsnelheid.



Figuur 6.1: Absolute fout van c_{meting} ten opzichte van c. De rode grafiek is geeft het voortschrijdend gemiddelde van de fout aan. **a.** c = 0.4 **b.** c = 0.6 **c.** c = 1 **d.** c = 1.2

Hoofdstuk 7

Conclusie

In dit onderzoek is eerst een realistische meting van de oplossing van de golfvergelijking gesimuleerd door een numerieke oplossing van de één-dimensionale golfvergelijking te bepalen en hierop stochastische variabiliteit te simuleren. Dan is bekeken hoe de golfsnelheid uit een meting kan worden achterhaald. Tot slot is onderzocht hoe gevoelig de golfsnelheid is voor het toevoegen van ruis aan een meting. Dit laatste is dan ook het doel van dit onderzoek.

Ten eerste is de methode van Finite Differences gebruikt om de één-dimensionale golfvergelijking numeriek op te lossen. Deze oplossing gaf inzicht in de vorm van de oplossingen. Vervolgens zijn er twee manieren toegepast om stochastische variabiliteit te kunnen modelleren. Ten eerste zijn toevalsbeginfuncties opgesteld; deze functies worden gebruikt bij het numeriek oplossen van de golfvergelijking. Ten tweede is onderzocht hoe de verdeling van de oplossing u er uit ziet bij een bekende verdeling voor de golfsnelheid c. Dit is gedaan voor een vast tijdstip, een vaste positie en met beginfunctie $u_0(x) = \sin(\pi x)$. Er is gekeken naar een uniforme en naar een normale verdeling voor de golfsnelheid. Opvallend is dat beide verdelingen van u weliswaar worden beschreven door een andere kansdichtheidsfunctie, maar erg op elkaar lijken. Het lijkt er dus op dat de verdeling van uvoornamelijk wordt bepaald door het tijdsverloop van u en in mindere mate door de verdeling van c.

Vervolgens is een methode beschreven waarmee de golfsnelheid c kan worden herleid uit een meting. Door de fout op deze golfsnelheid, ϕ , te definiëren, kan het minimum van deze functie worden gevonden door het minimum van ϕ te bepalen. Met behulp van de bisectiemethode of de Newton-Raphson methode kan de golfsnelheid dan worden gevonden door het nulpunt van ϕ' te vinden. Beide methoden hebben echter moeite met het vinden van het juiste nulpunt van ϕ' als er meerdere nulpunten zijn.

Tot slot is een meting met ruis gesimuleerd, om het effect van ruis op de gevonden waarde van c te bepalen. Hiervoor is standaardnormaalverdeelde ruis toegevoegd aan een numerieke oplossing en vermenigvuldigd met een scalair. De fout op de golfsnelheid bepaald uit de meting is gedefinieerd als het verschil tussen de golfsnelheid behorende bij de numerieke oplossing en de gevonden waarde uit de meting met ruis. Er is gebleken dat de fout gemiddeld ongeveer 0 is, maar dat de spreiding van de fout steeds groter wordt naarmate de ruisfactor toeneemt. Hieruit kan worden geconcludeerd dat naarmate de ruis toeneemt, men steeds minder waarde kan hechten aan de golfsnelheid verkregen uit een meting met ruis.

Bibliografie

- Robert A. Adams and Christopher Essex. Calculus, A Complete Course. Pearson Canada, 2010.
- [2] F. Beukers. Lineaire algebra, 2012.
- [3] Richard L. Burden and J. Douglas Faires. *Numerical Analysis*. Brooks Cole, 2010.
- [4] F.M. Dekking, C. Kraaikamp, H.P. Lopuhaä, and L.E. Meester. A Modern Introduction to Probability and Statistics, Understanding Why and How. Springer, 2005.
- [5] Saktipada Ghorai. Solution of nonlinear equations. http://home.iitk.ac.in/~sghorai/ TEACHING/MTH308/root.pdf.
- [6] Shodor Education Foundation Inc. https://www.shodor.org/unchem/math/newton/.
- [7] Gilbert Strang. Open courseware mit, 2006. Chapter 5: Initial Value Problems, section 5.3.
- [8] Gilbert Strang. Open courseware mit, 2006. Chapter 5: Initial Value Problems, section 5.2.
- [9] Tristan van Leeuwen. An inverse problem for the 1d wave-equation.
- [10] Kim Williams and Sandro Caparrini. Discovering the principles of mechanics 1600-1800: Essays by David Speiser. Birkhäuser Verlag AG, 2008.
- [11] Kris Wysocki. Fourier series. http://www.math.psu.edu/wysocki/M412/Notes412_8.pdf, 2010.
- [12] Dongbin Xiu. Numerical Methods for Stochastic Computations, A Spectral Method Approach. Princeton University Press, 2010.

Appendices

Bijlage A Exacte oplossing

De één-dimensionale golfvergelijking, zoals gedefinieerd in (1.1), is niet alleen numeriek maar ook analytisch op te lossen. Dit kan met een Fourier-transformatie. De numerieke oplossing (zie Hoofdstuk 2) kost minder rekenkracht en is daarom veel gebruikt in voorgaande hoofdstukken, maar de analytische oplossing geeft inzicht in de nauwkeurigheid van de numerieke oplossing. Eerst wordt de exacte oplossing bepaald, vervolgens wordt de fout in de numerieke oplossing besproken.

Eerst wordt een algemene oplossing voor (1.1) gevonden, vervolgens worden de begin- en randvoorwaarden in de oplossing opgenomen. Noem de oplossing van (1.1) u(x,t). Er geldt $x \in [0, l]$ en $t \in [0, T]$. De randvoorwaarden zijn u(0, t) = u(l, t) = 0. De beginvoorwaarden zijn $\dot{u}(x, 0) = 0$ en $u(x, 0) = u_0(x)$.

A.1 Algemene oplossing

Aangezien u van x en t afhangt, kan de oplossing van(1.1) worden geschreven als u(x,t) = X(x)T(t), met functies X en T. Uit (1.1) volgt dat $X(x)T''(t) = c^2X''(x)T(t)$ en dus

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$
(A.1)

Aangezien de linkerkant van (A.1) onafhankelijk is van x, moet dat ook gelden voor de rechterkant. Andersom is de rechterkant van (A.1) onafhankelijk van t en dus moet dat ook gelden voor de linkerkant. Daaruit volgt dat beide kanten gelijk moeten zijn aan een scalair, onafhankelijk van xen t. Het is handig om hiervoor $-k^2$ te kiezen, dit zal later de berekeningen vereenvoudigen. Dus:

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2.$$

met $k \in \mathbb{R}$. Hieruit volgt

$$X''(x) = -k^2 X(x)$$

en

$$T''(t) = -k^2 c^2 T(t).$$

Dit oplossen voor X en T geeft oneindig veel oplossingen, namelijk:

$$X_n(x) = a_n \sin(kx) + b_n \cos(kx) \tag{A.2}$$

$$T_n(t) = c_n \sin(kct) + d_n \cos(kct)$$

Dit zijn oplossingen voor X en T, voor alle $n \in \mathbb{Z}$. Vanwege superpositie geldt nu dat de algemene oplossing

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

=
$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_n \sin(kx) + b_n \cos(kx)][c_n \sin(kct) + d_n \cos(kct)]$$

is. De begin- en randvoorwaarden bepalen de waarden van a_n, b_n, c_n, d_n en k, voor alle $n \in \mathbb{Z}$.

A.2 Randvoorwaarden

De randvoorwaarden zijn X(0) = 0 en X(l) = 0. Met behulp van A.2 kunnen nu b_n en k worden bepaald. Uit X(0) = 0 volgt

$$X(0) = b_n = 0,$$

dus $X_n(x) = a_n \sin(kx)$. Dan volgt uit X(l) = 0 dat

$$X(l) = a_n \sin(kl) = 0,$$

dus $k = \frac{n\pi}{l}$. Neem aan dat er minstens één *n* is waarvoor $a_n \neq 0$. Immers, anders zou dit altijd de triviale oplossing u(x,t) = 0 geven. De oplossing voor *u* wordt

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

= $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(kx)[c_n \sin(kct) + d_n \cos(kct)]$

met $k = \frac{n\pi}{l}$, $n \in \mathbb{N}$. Merk op dat voor n = 0, en dus k = 0, geldt dat $a_0 \sin(0) = 0$, dus

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(kx) [c_n \sin(kct) + d_n \cos(kct)].$$
(A.3)

A.3 Beginvoorwaarden

Om de waarden van a_n , c_n en d_n te bepalen, wordt gebruik gemaakt van de beginvoorwaarden. Eerst wordt de beginvoorwaarde $\dot{u}(x,0) = 0$ gebruikt om c_n te bepalen, vervolgens zal $u(x,0) = u_0(x)$ worden gebruikt om a_n en d_n te bepalen [11]. Uit (A.3) volgt:

$$\dot{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(kx) [c_n kc \cos(kct) - d_n kc \sin(kct)],$$

met $k = \frac{n\pi}{l}$, dus

$$\dot{u}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n k c \sin(kx) = 0.$$

en

Er is minstens é
én n waarvoor $a_n \neq 0$ dus uit bovenstaande volgt $c_n = 0$, voor all
en. De oplossing u wordt nu:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(kx) d_n \cos(kct)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(kx) \cos(kct),$$
(A.4)

met $\alpha_n = a_n d_n$.

De waarde van α_n wordt bepaald door de beginfunctie $u_0(x)$. Uit (A.4) volgt:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(kx)$$
(A.5)
= $u_0(x)$.

Algemeen geldt

$$\alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(\frac{n\pi}{l}x) dx,$$

met $f(x) = u_0(x)$. De waarde α_n wordt ook wel de Fourier coëfficiënt genoemd. Hieronder wordt besproken hoe α_n is bepaald [11].

De periode van $\sin(kx)$, met $k = \frac{n\pi}{l}$, is altijd $\frac{2\pi l}{n\pi} = \frac{2l}{n}$ en dus een fractie van 2l. Dat betekent dat er in een interval [0, 2l] altijd een geheel aantal, namelijk n, periodes passen.

Vermenigvuldig beide kanten met $\sin(mx)$, met m willekeurig en $m \in \mathbb{R}$. Neem dan de integraal over $f(x) = u_0(x)$ uit (A.5) van x = -l tot x = l. Hieruit volgt

$$\int_{-l}^{l} f(x)\sin(mx)dx = \int_{-l}^{l} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(kx)\sin(mx)dx$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} \alpha_n \sin(kx)\sin(mx)dx.$$
(A.6)

Door onderstaande eigenschappen te gebruiken, geeft dit een uitdrukking voor α_n . De omgekeerde regel van Simpson luidt:

$$\sin(nx)\sin(mx) = \frac{1}{2}[\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)]$$

dus

$$\int_{-l}^{l} \sin(nx)\sin(mx) = \frac{1}{2} \int_{-l}^{l} [\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)]dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_{-l}^{l} \cos((n-m)x)dx - \frac{1}{2} \int_{-l}^{l} \cos((n+m)x)dx$$

Voor n = m geldt $\int_{-l}^{l} \cos(0) dx = \int_{-l}^{l} 1 dx = 2l$, maar voor $n \neq m$ geldt $\int_{-l}^{l} \cos(n+m) dx = 0$. Hieruit volgt

$$\int_{-l}^{l} \sin(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} 0 \text{ als } m \neq n \\ l \text{ als } m = n. \end{cases}$$

Dus voor alle waarden van n, behalve voor n = m, levert de integraal uit (A.6) de waarde 0 op. Dit geeft

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(x) \sin(nx) dx = \int_{-l}^{l} f(x) \sin(mx) dx = l\alpha_m$$

waarbij n = m. Maak nu gebruik van het feit dat $f(x) \sin(nx)$ symmetrisch is, dan geldt:

$$\alpha_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \sin(nx) dx$$

De analytische oplossing van (1.1) is dus:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(kx) \cos(kct)$$
(A.7)

met $\alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(nx) dx$, $k = \frac{n\pi}{l}$ en $f(x) = u_0(x)$.

Uit bovenstaande blijkt meteen het grootste nadeel van het berekenen van de analytische oplossing: het berekenen van de integraal in α_n kost veel rekenkracht. In deze scriptie is een aantal keer gekozen voor de beginfunctie $u_0(x) = \sin(\pi x)$ met x op het interval [0, 1] (dus l = 1). Nu is in te zien dat dit de analytische oplossing aanzienlijk vereenvoudigd. Namelijk:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(kx)$$
$$= \sin(\pi x),$$

dus $\alpha_1 = 1$ en $\alpha_i = 0$ voor i = 2, 3, ... Echter, voor veel beginfuncties moet de integraal in α_n worden berekend.

A.4 Numerieke fout

In Figuur A.1 is voor een aantal tijdstippen de numerieke en de analytische oplossing getekend. De beginfunctie is bepaald met een Karhunen-Loève expansie (zie Hoofdstuk 3) en er is gekozen voor c = 1. Voor de numerieke oplossing is gekozen voor $\Delta x = 0.01$ en $\Delta t = 0.001$. De som in de analytische oplossing kan uiteraard niet sommeren tot oneindig, dus is gekozen om te sommeren tot 100. Vervolgens is de fout weergegeven in Figuur A.2. Noem $u_{m,n}$ de analytische oplossing zoals bepaald in (A.7) op positie m en tijdstip n. Noem $v_{m,n}$ de numerieke oplossing zoals bepaald in Hoofdstuk 2 op positie m en tijdstip n. De fout op plaats m en tijdstip n is dan gedefinieerd als

$$fout_{m,n} = |u_{m,n} - v_{m,n}|.$$



Figuur A.1: a. Analytische oplossing b. Numerieke oplossing



Figuur A.2: Fout in de numerieke oplossing op tijdstip t = 0.5

In Figuur A.2 is ervoor gekozen om de fout op tijdstip t = 0.5 weer te geven. De maximale fout die wordt gemaakt op dit tijdstip is ongeveer 0.26, terwijl u tussen 0 en 20 ligt. Hieruit blijkt dat de numerieke oplossing de analytische oplossing goed benadert voor de gekozen waarden van Δt , Δx en c en voor de gekozen beginfunctie. Indien Δt en Δx kleiner worden gekozen, en de sommatie niet tot 100 loopt maar tot een getal groter dan 100, zal de fout afnemen.