Het Tweedimensionale Kakeya Vermoeden

Kars Mulder

Een scriptie ingezonden naar de Wiskundefaculteit van Universiteit Utrecht als onderdeel van de vereisten voor de graad

Bachelor Wiskunde

Begeleider: Fabian Ziltener

21 Januari 2016

Universiteit Utrecht

Abstract

In deze scriptie wordt geprobeerd een variant op het tweedimensionale Kakeya vermoeden te bewijzen: iedere Borel deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ die precies één lijn in iedere richting bevat, moet Hausdorff dimensie twee hebben.

Het artikel begint met de definitie van Hausdorff dimensie. Er is geen voorkennis vereist behalve standaard analyse, maat- en integratietheorie.

Het is echter gebleken dat er een fout in deze scriptie zit. Het bewijs is hierdoor onvolledig en mogelijk incorrect.

Inhoudsopgave

1 Introductie

1.1 Hausdorff dimensie en het Kakeya vermoeden

Deze scriptie houdt zich bezig met de volgende algemene vraag:

Vraag 1.1. *Gegeven een aantal geometrische voorwaarden, hoe klein kan een verzameling zijn die daaraan voldoet?*

De wiskundige S. Kakeya stelde de vraag "Wat is de kleinste deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ waarin een lijnstuk van lengte 1 continu kan worden rondgedraaid?". Een triviaal voorbeeld is de cirkel met straal $\frac{1}{2}$, zie figuur 1, maar het is gebleken dat dit ook mogelijk is in een verzameling met arbitrair kleine positieve maat. In een verdere veralgemenisering definiëren we een n-dimensionale Kakeya verzameling als een deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ die een eenheidslijnstuk in iedere richting bevat. Het is aangetoond dat er Kakeya verzamelingen met maat nul bestaan, zie [Bes28].

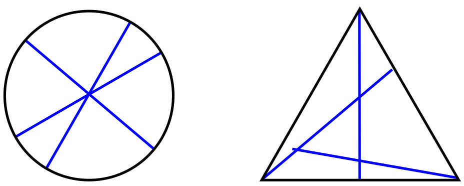
Men kan echter nog verdere onderscheidingen maken is verzamelingen van maat nul. Zo kan men over de dimensie van een verzameling praten en kunnen stellen "een tweedimensionale deelvariëteit is groter dan een eendimensionale deelvariëteit." Deze maat is nog niet al te nuttig: slechts zeer weinig deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ zijn deelvariëteiten.

We introduceren een nieuw concept: *Hausdorff dimensie*. De Hausdorff dimensie is een generalisatie van de dimensie van vectorruimten en variëteiten; het geeft een manier om aan iedere arbitraire metrische ruimte een dimensie toe te kennen. Het is gebaseerd op het principe "Als je een deelverzameling $A \subset \mathbb{R}^n$ met factor α schaalt, dan is het volume van αA precies α^n maal zo groot." In een Hausdorff s-dimensionale ruimte zou het volume met factor α^s schalen.

De Hausdorff dimensie heeft de verrassende eigenschap dat niet alle dimensies een geheel getal zijn; er bestaan bijvoorbeeld ruimtes met dimensie $\frac{\pi}{4}$. Een andere eigenschap is dat iedere deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ met Hausdorff dimensie strikt kleiner dan n, Lebesgue maat nul heeft. Dit roept de vraag op,

Vraag 1.2. *Bestaan er Kakeya deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ met Hausdorff dimensie strikt kleiner dan n?*

Het Kakeya vermoeden luidt dat zo'n verzameling niet bestaat. Dit vermoeden is bewezen voor $n = 2$, maar ligt in het nog open voor $n \geq 3$. In deze scriptie wordt het volgende partiële resultaat bewezen:



Figuur 1: Zowel een (gesloten) cirkel met straal $\frac{1}{2}$ als een gelijkzijdige driehoek met hoogte 1 bevatten een eenheidslijnsegment in iedere richting.

Stelling 1.3. *Zij $E \subset \mathbb{R}^2$ een Borel verzameling die precies één lijn in iedere richting bevat. Dan heeft E Hausdorff-dimensie twee.*

1.2 Structuur van de scriptie

In dit artikel houden we grootstendeels het boek [Fal03] aan; de meeste bewijzen in dit artikel zijn gebaseerd op bewijzen uit dit boek. We voegen onze eigen inbreng toe door een constructie met gegeneraliseerde Cantorverzamelingen te gebruiken, waardoor het gebruik van het lastig te bewijzen Frostman's lemma niet meer nodig is.

Het globale idee is een Kakeya verzameling K te nemen met een lijn in iedere richting, en vervolgens een puntenverzameling S te nemen waarbij de punten $(a, b) \in S$ overeenstemmen met lijnen $y = ax + b$ in K. Vervolgens merken we een geometrische correspondentie op tussen de intersectie van K met verticale lijnen $x = c$ en de projectie van S op lijnen door de oorsprong met een bepaalde hoek. Door vervolgens aan te tonen dat de dimensie van deze projecties bijna altijd 1 is, kunnen we afleiden dat K dimensie 2 moet hebben.

We beginnen met een introductie over Hausdorff dimensie. In de volgende sectie geven we een voorbeeld door middel van veralgemeniseerde Cantorverzamelingen. Hoewel de basistheorie over Cantorverzamelingen uit [Fal03] komt, hebben we de veralgemenisering er zelf bij geschreven en gebruiken we deze om een maat te construeren zodat we Frostman's lemma niet meer nodig hebben.

We gaan door met een halve karakterisering van Hausdorff dimensie door middel van potentiaal. Deze karakterisering helpt ons om een stelling over projecties te bewijzen, welke we nodig hebben hebben voor het bewijs van de hoofdstelling. Het volgende hoofdstuk over intersecties met (verticale) lijnen geeft ons een andere stelling die we nodig hebben voor het bewijs van de hoofdstelling.

1.3 Het probleem in het bewijs

Zoals in sectie 1.2 wordt gezegd is het globale idee een Kakeya verzameling K te nemen en daaruit een puntenverzameling S af te lijden. Bij het schrijven van deze scriptie werd aangenomen dat S een Borelverzameling zou zijn als K een Borelverzameling is, gemotiveerd door hoe lastig het is een niet-Borelverzameling te construeren zonder het keuzeaxioma. Het is gebleken dat deze aanname op losse schroeven staat. Hierdoor is er geen garantie dat S Borel is, wat problemen veroorzaakt wanneer we integratie gebruiken om wat te vertellen over de dimensie van projecties van S.

2 Hausdorff dimensie

Aan de kern van deze scriptie ligt het begrip Hausdorff dimensie. De Hausdorff dimensie is een van de manieren om het begrip van dimensie te generaliseren zodat het op arbitraire metrische ruimtes kan worden toegepast. We zullen eerst proberen een intuitieve uitleg te geven.

Stel dat je in $\mathbb{R}^n$ werkt, dan kun je het volume van een bol met straal r schatten op r^n. Om het volume van een deelverzameling F van $\mathbb{R}^n$ te berekenen zou je kunnen proberen een cover van F met bollen te maken, en het volume van deze bollen bij elkaar optellen. Naarmate je kleinere bollen kiest wordt de schatting nauwkeuriger.

Het is op te merken dat naarmate je kleinere bollen gebruikt, je meer bollen nodig hebt om een cover van een bepaalde verzameling te maken. Bekijk als voorbeeld figuur 2. Iedere keer dat de straal van de bollen wordt gehalveerd, heb je ongeveer vier maal zoveel bollen nodig om een vierkant te bedekken.

Het volume van een tweedimensionale bol met straal r schattend op r^2, blijft de som van het geschatte volume van de bollen in figuur 2 constant. Als we het geschatte volume van een bol kiezen als r zou het volume naar ∞ gaan als we kleinere bollen gebruikten: iedere keer dat de straal halveert hebben we vier maal zoveel bollen nodig en zijn de bollen half zo groot; een verdubbeling in het geschatte oppervlakte. Als we het volume van een bol schatten op r^3 zou het volume van een vierkant naar nul naderen met kleinere bollen.

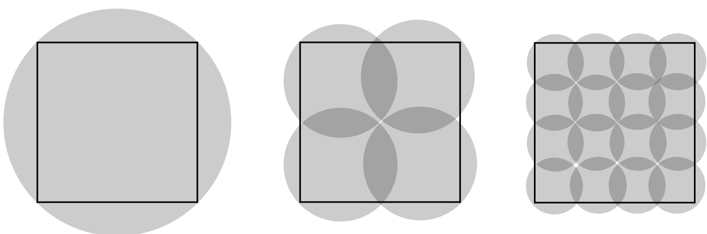
Dit heeft te maken met het feit dat een vierkant een tweedimensionaal figuur is. Als het een lijn was, dan had je maar ongeveer twee maal zoveel bollen nodig gehad. Deze schaling wordt gebruikt om Hausdorff dimensie te definiëren.

De Hausdorff dimensie is verbonden aan de Hausdorff maat. Voor iedere $s \in [0, \infty]$ bestaat er een s-dimensionale Hausdorff maat die ons verteld hoe groot een s-dimensionale ruimte is. We zullen eerst de definitie hiervan opschrijven en daarna een intuïtieve uitleg ervan geven.

Definitie 2.1. De diameter van een (deelverzameling van een) metrische ruimte A is de grootste afstand tussen twee punten in A, wat we noteren als $|A|$. Om precies te zijn,

$$|A| := \sup\{\mathrm{d}(x, y) : x, y \in A\}.$$

Definitie 2.2. Zij X een metrische ruimte en $\delta \in [0, \infty)$. Een δ-cover van X is een telbare cover $(A_i)_{i \in I}$ van X zodanig dat $|A_i| \leq \delta$ voor alle $i \in I$.



Figuur 2: Hoe een vierkant te bedekken met kleiner wordende bollen.

Definitie 2.3. Zij X een metrische ruimte en $s \in [0, \infty)$. De s-dimensionale Hausdorff maat $\mathcal{H}^s(X)$ is gedefinieerd in termen van de s-dimensionale δ-Hausdorff maat $\mathcal{H}^s_\delta$:

$$\mathcal{H}^s_\delta(X) := \inf\left\{\sum_{i\in I} |A_i|^s : (A_i)_{i\in I} \text{ is een } \delta\text{-cover van X}\right\}$$
$$\mathcal{H}^s(X) := \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(X).$$

We merken eerst op dat $\mathcal{H}^s(X)$ gedefinieerd is voor iedere metrische ruimte X als we op de uitgebreide reëele getallen kijken ($\mathbb{R} \cup \pm\infty$), het infimum van een lege verzameling als ∞ definiëren, en de som van nul elementen als 0 definiëren. Als δ kleiner word zijn er minder δ-covers van X mogelijk, dus kan $\mathcal{H}^s_\delta$ alleen stijgen. Als gevolg bestaat $\lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(X)$.

We gaan nu uitleggen wat er gebeurt. Als eerste stap wordt een telbare cover van X gemaakt door middel van verzamelingen van beperkte diameter. Vervolgens wordt het volume van deze verzamelingen geschat op hun diameter tot de macht s; dit is analoog aan hoe het volume van een bol van straal r in $\mathbb{R}^n$, rechtevenredig is aan r^n. Vervolgens wordt het geschatte volume van al deze verzamelingen bij elkaar opgeteld, en is het resultaat een bovenafschatting van $H^s_\delta(X)$.

De maat $H^s_\delta(X)$ probeert dus als het ware het volume van X te berekenen gegeven de aanname dat het volume van een bol rechtevenredig is met haar straal tot de macht s. Met grote bollen leidt dit echter nog niet tot al te interessante resultaten: zowel een lijnstuk als een vierkant kunnen worden bevat in een grote bol. Wat echter verschillend is aan deze twee is dat de hoeveelheid bollen die je nodig hebt om een lijn te bedekken omgekeerd evenredig is aan de straal van deze bollen, terwijl je bij een vierkant kwadratisch veel meer bollen nodig hebt wanneer de straal van deze bollen kleiner wordt.

Definitie 2.4. Zij X een metrische ruimte. Definieer de Hausdorff dimensie van X als $\dim_{\mathrm{H}} X = \sup\{t \in \mathbb{R} : \mathcal{H}^t(X) = \infty\}$.

Deze definitie is gebaseerd op de volgende observatie:

Stelling 2.5. *Zij X een metrische ruimte en s de Hausdorff dimensie van X. Dan geldt:*

- *Voor alle $\alpha < s$ geldt $\mathcal{H}^\alpha(X) = \infty$;*
- *Voor alle $\beta > s$ geldt $\mathcal{H}^\beta(X) = 0$.*

Er is dus als het ware precies één waarde van s waarop de s-dimensionale Hausdorff maat zinnig is. Dit is het overgangspunt waar de Hausdorff maat van ∞ naar 0 springt.

Gevolg 2.6. *Zij X een metrische ruimte en $s \in [0, \infty]$ zodanig dat $0 < \mathcal{H}^s(X) < \infty$. Dan geldt* $\dim_{\mathrm{H}} X = s$.

Een voorbeeld van een ruimte met fractale Hausdorff dimensie en de berekening daarvan is te vinden in sectie 3.

Het is belangrijk dat $\mathcal{H}^s$ een maat is. Het is niet lastig om aan te tonen dat $\mathcal{H}^s$ een buitenmaat is:

Stelling 2.7. *Zij X een metrische ruimte en s willekeurig, dan geldt:*

1. $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$;
2. *Als* $A \subset B \subset X$, *dan geldt* $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B)$;
3. *Zij* $(A_i)_{i\in I}$ *een telbare rij deelverzamelingen van* X, *dan geldt* $\mathcal{H}^s(\bigcup A_i) \leq \sum \mathcal{H}^s(A_i)$.

Als deze rij $(A_i)_{i\in I}$ allemaal disjunct en meetbaar zijn, geldt er gelijkheid in stap 3, wat $\mathcal{H}^s$ een maat maakt. In het bijzonder zijn alle Borel-deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ meetbaar. Het bewijs hiervan is maattheoretisch en zullen we hier niet behandelen.

Propositie 2.8. *De Hausdorff maat is een maat op Borel-deelverzamelingen van* $\mathbb{R}^n$.

Een maat waarvan de σ-algebra de Borel verzamelingen bevatten noemen we een Borel maat.

Voor een geometrisch gevoel van de Hausdorff maat willen we het volgende vaststellen:

Stelling 2.9. *Zij* $A \subset \mathbb{R}^n$ *een Borelverzameling en* $s \in [0, \infty]$. *Dan:*

1. *Als* $B \subset \mathbb{R}^n$ *congruent is aan* A, *dat wil zeggen dat* B *alleen verschilt met translaties, rotaties en spiegelingen, dan geldt* $\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(B)$;
2. *Als* $B \subset \mathbb{R}^n$ *gelijk is aan* A *geschaald met een factor* $0 < \lambda < \infty$, *oftewel* $B = \{\lambda x : x \in A\}$, *dan geldt* $\mathcal{H}^s(B) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$.

Bewijs van stelling 2.5. Herinner dat $s = \sup\{t \in \mathbb{R} : \mathcal{H}^t(X) = \infty\}$. Het globale idee achter dit bewijs is om voor alle getallen $u \neq s$ een getal v tussen u en s te vinden waarmee we door de definitie van s iets kunnen zeggen over $\mathcal{H}^v(X)$. Vervolgens maken we gebruik van verbanden tussen de u- en v-dimensionale maten van alle individuele δ-covers.

Stel dat $\alpha < s$, dan bestaat er een α' met $\alpha < \alpha' \leq s$ zodanig dat $\mathcal{H}^{\alpha'}(X) = \infty$. Zij $0 < \delta < 1$ willekeurig. Voor iedere δ-cover $(A_i)_{i\in I}$ van X geldt dat $\sum |A_i|^\alpha \geq \sum |A_i|^{\alpha'}$, met als gevolg $\mathcal{H}^\alpha_\delta(X) \geq \mathcal{H}^{\alpha'}_\delta(X)$ en dus $\mathcal{H}^\alpha(X) \geq \mathcal{H}^{\alpha'}(X) = \infty$.

Stel dat $\beta > s$, dan bestaat er een β' met $s < \beta' < \beta$ zodanig dat $\mathcal{H}^{\beta'}(X) < \infty$. Zij $0 < \delta < 1$ willekeurig. Voor iedere δ-cover $(A_i)_{i\in I}$ van X moet gelden dat

$$\begin{aligned} \sum |A_i|^\beta &= \sum |A_i|^{\beta'} \cdot |A_i|^{\beta-\beta'} \\ &\leq \sum |A_i|^{\beta'} \cdot \delta^{\beta-\beta'} \\ &= \delta^{\beta-\beta'} \sum |A_i|^{\beta'}. \end{aligned}$$

Met als gevolg dat $\mathcal{H}^\beta(X) \leq \delta^{\beta-\beta'}\mathcal{H}^{\beta'}(X)$. In de limiet $\delta \to 0$ leidt dit tot $\mathcal{H}^\beta(X) = 0$. $\square$

Bewijs van stelling 2.7. Zij $s \in [0, \infty]$ willekeurig, zij X een metrische ruimte.

Voor claim 1, merk op dat een lege cover een cover is van een lege verzameling. Hiermee volgt $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ triviaal met de conventie dat de som van een lege rij nul is.

Voor claim 2, merk op dat als $A \subset B$, dan is iedere δ-cover van B ook een δ-cover van A, dus volgt $\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \mathcal{H}^s_\delta(B)$ voor alle s, δ.

Voor claim 3: om het informeel te zeggen, dit komt doordat de vereniging van δ-covers voor individuele A_n weer een δ-cover van $\bigcup A_n$ is met een opgesomde $\mathcal{H}^s_\delta$ maat.

Nu doen we dit formeel. Zij $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij deelverzamelingen van X. Zij $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies voor iedere verzameling A_n een δ-cover $(A^i_n)_{i\in I_n}$ zodanig dat $\sum_{i\in I_n} |A^i_n|^s < \mathcal{H}^s_\delta(A_n) + \varepsilon \cdot 2^{-n}$. Er volgt dat

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\in I_n} |A^i_n|^s < \varepsilon + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s_\delta(A_n).$$

Omdat een telbare rij aan telbaar veel elementen weer telbaar is, zijn er in totaal telbaar veel A^i_n die allemaal samen een δ-cover van $\bigcup A_n$ vormen. Als gevolg hebben we $\mathcal{H}^s_\delta(\bigcup A_n) < \sum \mathcal{H}^s_\delta(A_n) + \varepsilon$ voor alle $\varepsilon > 0$. Door ε naar nul te laten gaan geldt $\mathcal{H}^s_\delta(\bigcup A_n) \leq \sum \mathcal{H}^s_\delta(A_n)$ en door δ in de limiet naar nul te laten gaan volgt de gewenste ongelijkheid. $\square$

Bewijs van stelling 2.9. Voor het eerste deel, merk op dat er een bijectie bestaat tussen δ-covers van A en δ-covers van B door iedere verzameling in de cover dezelfde translatie/rotatie/spiegeling te laten ondergaan als die nodig is om A in B te transformeren.

Voor het tweede deel, merk op dat er een bijectie bestaat tussen δ-covers van A en $\lambda\delta$-covers van B door iedere verzameling in de cover met factor λ te schalen. Dit leidt tot

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(B) &= \inf\left\{\sum_{i\in I} |U_i|^s : (U_i)_{i\in I} \text{ is een } \lambda\delta\text{-cover van } B\right\} \\
&= \inf\left\{\sum_{i\in I} |\lambda U_i|^s : (U_i)_{i\in I} \text{ is een } \delta\text{-cover van } A\right\} \\
&= \inf\left\{\sum_{i\in I} \lambda^s |U_i|^s : (U_i)_{i\in I} \text{ is een } \delta\text{-cover van } A\right\} \\
&= \lambda^s \mathcal{H}^s_\delta(A).
\end{aligned}$$

$\square$

3 Algemene Cantorverzamelingen

In deze sectie hebben we het over de Cantorverzameling en een veralgemenisering ervan, ook wel bekend als de Smith-Volterra-Cantor verzameling. Deze verzameling dient gelijktijdig als een voorbeeld van een verzameling met een fractale Hausdorff dimensie, en als een structuur die we later zullen gebruiken om een maat te definiëren die bepaalde gewenste eigenschappen heeft.

Om makkelijk met verzamelingen te rekenen is de volgende notatie nuttig; zij $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. Dan noteren we geschaalde en verplaatste versies van A met:

$$\lambda A = \{\lambda v : v \in A\}$$
$$A + x = \{v + x : v \in A\}$$

Verder is $x - \lambda A$ gedefinieerd als $x + (-\lambda)A$.

Definitie 3.1. De α-Cantorverzameling voor $\alpha \geq 2$. Definieer de volgende verzamelingen recursief:

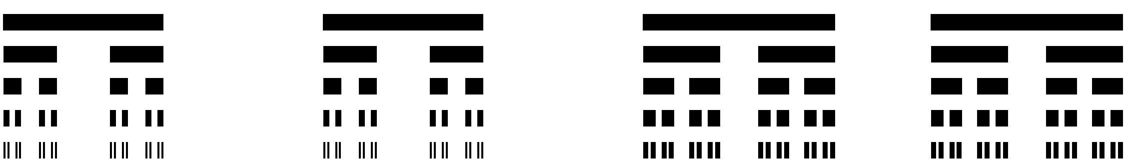
$$C_0^\alpha := [0,1]$$
$$C_{n+1}^\alpha := \frac{1}{\alpha}C_n^\alpha \cup \left(1 - \frac{1}{\alpha}C_n^\alpha\right)$$

De α-Cantorverzameling C^α is vervolgens gedefinieerd als $\bigcap_n C_n^\alpha$,

In iedere stap word een verzameling met factor α verkleint en worden twee van deze stukjes naast elkaar gelegd. Als voorbeeld, stel dat $\alpha = 3$, dan geldt $C_1^\alpha = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ en $C_2^\alpha = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Een andere manier om hiernaar te kijken is dat in iedere stap een stukje uit het midden van ieder interval wordt weggesneden. Een visuele weergave van een Cantorverzameling is te zien in figuur 3.

De volgende geometrische eigenschappen zijn belangrijk:

- Voor alle n geldt $C_{n+1}^\alpha \subset C_n^\alpha$;
- Ieder interval in C_n van lengte α^{-n} bevat twee intervallen in C_{n+1} van lengte α^{n+1};
- Van ieder level interval in C_n^α blijft minstens een punt over in C^α, bijvoorbeeld de randpunten;



Figuur 3: De eerste paar stappen bij het vormen van een Cantorverzameling. We zien hier een 3-Cantorverzameling en een $2\frac{1}{2}$-Cantorverzameling.

- Voor de intervallen I_k in C_n^α zijn alle $C^\alpha \cap I_k$ congruent aan elkaar.
- De Cantorverzamelingen zijn de intersectie van gesloten verzamelingen, en dus gesloten. Omdat ze begrensd zijn in $\mathbb{R}$ zijn ze ook compact.

De volgende stellingen zijn belangrijk. De Cantorverzameling zal worden gebruikt om een maat te construeren op $\mathbb{R}$, en met gevolg specifieke deelverzamelingen van $\mathbb{R}^2$, die aan bepaalde eigenschappen voldoet, welke we later nodig hebben. Het bestaan van deze maat wordt normaal gesproken aangetoond door middel van Frostman's lemma; wij gebruiken deze alternatieve methode omdat het bewijs van Frostman's lemma vrij ingewikkeld is. Deze maat wordt uiteindelijk gebruikt voor het bewijs van de hoofdstelling.

Stelling 3.2. *De Hausdorff dimensie van een α-Cantorverzameling is* $\log_\alpha 2 = \ln 2 / \ln \alpha$ *en voor* $s = \log_\alpha 2$ *geldt* $\frac{1}{4} \leq \mathcal{H}^s(C^\alpha) \leq 1$.

Stelling 3.3. *Voor iedere* $0 < s \leq 1$ *bestaat er een maat* μ *op* $\mathbb{R}$ *zodanig dat* $0 < \mu(\mathbb{R}) < \infty$ *en er een constante* $b \in \mathbb{R}$ *bestaat zodanig dat voor alle* $x \in \mathbb{R}$, $r > 0$ *geldt* $\mu(B(x;r)) < br^s$.

Bewijs voor stelling 3.2. We tonen eerst aan dat $\mathcal{H}^s(C^\alpha) < 1$ met $s = \log_\alpha 2$. Omdat de C_n^α verzamelingen allemaal C^α bevatten, kunnen we de 2^n intervallen met lengte α^{-n} waaruit ze bestaan gebruiken als covers die bovengrenzen voor $\mathcal{H}_\delta^s$ met $\delta = \alpha^{-n}$ geven.

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s_{\alpha^{-n}}(C^\alpha) &\leq 2^n \cdot \left(\alpha^{-n}\right)^{\log_\alpha 2} \\
&= 2^n \cdot \left(\alpha^{\log_\alpha 2}\right)^{-n} \\
&= 2^n \cdot 2^{-n} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Door n naar oneindig te laten gaan volgt in de limiet dat $\mathcal{H}^s(C^\alpha) \leq 1$.

We moeten nu aantonen dat $\mathcal{H}^s(C^\alpha) > 0$. Dit doen we door aan te tonen dat voor iedere telbare cover $(A_i)_{i \in I}$ van C^α geldt dat

$$\sum |A_i|^s \geq \frac{1}{4}.$$

Herinner dat C^α compact is. Zij A_n een willekeurige telbare cover van C^α. We kunnen de verzamelingen A_n uitbreiden naar open intervallen U_n die A_n bevatten maar waarvan de diameters arbitrair weinig groter zijn dan de diameters van A_n. Kies een rij U_n zodanig dat $\sum |U_n|^s \leq \sum |A_n|^s + \varepsilon$, bijvoorbeeld door $|U_n|^s = |A_n|^s + \varepsilon \cdot 2^{-n}$ af te dwingen. Via de compactheid van C^α heeft U_n altijd een eindige subcover, dus neem aan dat U_n eindig is.

De C_k^α verzamelingen bestaan uit de verenigingen van 2^k intervallen met lengte $(\frac{1}{\alpha})^k$. We noemen deze level-k intervallen. Kies voor iedere A_n een geheel getal k_n zodanig dat

$$\alpha^{-(k_n+1)} \leq |A_n| < \alpha^{-k}$$

Dan heeft A_n een niet-lege intersectie met hooguit twee level-k_n intervallen. Zij j het minimum van alle k_n. Omdat ieder level-k twee level-$(k+1)$ bevat, bevat ieder level-k_n precies 2^{j-k_n} level-j intervallen, dus heeft A_n een niet-lege intersectie met hooguit $2 \cdot 2^{j-k_n}$ level-j intervallen.

Omdat van ieder level-j interval minstens een punt overblijft in C^α, moet ieder level-j interval een niet-lege intersectie hebben met ten minste één verzameling uit een cover van C^α. Aldus is het aantal level-j intervallen, 2^j, niet groter dan de som van het maximaal aantal level-j intervallen waarmee de U_n een niet-lege intersectie hebben:

$$\begin{aligned}
2^j &\leq \sum 2 \cdot 2^{j-k_n} \\
&= \sum 4 \cdot 2^j \cdot 2^{-(k_n+1)} \\
&= \sum 4 \cdot 2^j \cdot (\alpha^s)^{-(k_n+1)} \\
&= \sum 4 \cdot 2^j \cdot \left(\alpha^{-(k_n+1)}\right)^s \\
&\leq \sum 4 \cdot 2^j \cdot |U_n|^s.
\end{aligned}$$

Als gevolg geldt $\sum |U_n|^s \geq \frac{1}{4}$, aldus $\sum |A_n|^s \geq \frac{1}{4} - \varepsilon$ voor iedere willekeurige ε, en volgt $\sum |A_n|^s \geq \frac{1}{4}$ voor iedere telbare cover A_n, en dus $\mathcal{H}^s(C^\alpha) \geq \frac{1}{4}$. □

Bewijs van stelling 3.3. Zij een $0 < s \leq 1$ gegeven. Zij α het getal zodanig dat de α-Cantorverzameling dimensie s heeft, oftewel $\alpha = 2^{1/s}$ volgens stelling 3.2. Zij C^α de α-Cantorverzameling en definieer de maat μ op $\mathbb{R}$ als $\mu(A) = \mathcal{H}^s(A \cap C^\alpha)$. Met stelling 3.2 volgt dat $0 < \mu(A) < \infty$.

Zij $x \in \mathbb{R}$, $r > 0$ willekeurig. Zij n het getal zodanig dat $\alpha^{-n+1} < r < \alpha^{-n}$. Dan kan de bol $B(x;r)$ een niet-lege intersectie hebben met hooguit twee level-n intervallen (zoals gedefinieerd in het bewijs van stelling 3.2). Omdat er 2^n level-n intervallen zijn, die allemaal een op translatie na identiek $1/2^n$ deel van de α-Cantorverzameling bedekken, moet gelden dat de $\mathcal{H}^s$ maat van het deel van de α-Cantorverzamelingen dat onder deze intervallen ligt, gelijk is aan $1/2^n$ van de maat van de hele α-Cantorverzameling, welke niet groter is dan 1. Aldus geldt $\mu(B(x;r)) \leq 2/2^n$.

Deze n is te berekenen als ongeveer $-n \approx \log_\alpha r$ (waar $\approx$ er hooguit 1 naast zit) en dus volgt

$$\begin{aligned}
2^{-n} &\approx 2^{\log_\alpha r} \\
&= 2^{\ln r / \ln \alpha} \\
&= e^{\ln 2 (\ln r / \ln \alpha)} \\
&= e^{(\ln 2 / \ln \alpha) \ln r} \\
&= e^{(\ln 2 / \ln \alpha) \ln r} \\
&= e^{s \cdot \ln r} \\
&= r^s
\end{aligned}$$

Waarbij deze $\approx$ er hooguit een factor twee naast zit. Van deze afschatting gebruikmakend volgt dat $\mu(B(x;r)) \leq 4r^s$ en hebben we de gewenste maat μ gevonden. □

4 Potentiaal-theoretische karakterisering

In deze sectie behandelen we een karakterisering van Hausdorff dimensie door middel van het van oorsprong natuurkundige begrip potentiaal. Het potentiaal berekend een reëel getal gegeven een deelverzameling van $\mathbb{R}^n$, een maat daarop, en een getal s die te maken heeft met de Hausdorff dimensie. Vanwege het gebrek aan Frostman's lemma is deze karakterisering onvoltooid, maar sterk genoeg voor ons doel.

Definitie 4.1. Zij X een deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en zij μ een Borel maat op X met de Borel sigma-algebra. Dan is het s-potentiaal $I_s(\mu)$ gelijk aan het volgende:

$$I_s(\mu) = \iint \frac{1}{||x-y||^s} \,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

De volgende twee stellingen geven een half-afgemaakte karakterisering van Hausdorff dimensie. Deze karakterisering is handig omdat het ons toestaat Hausdorff dimensie te berekenen met behulp van integralen.

Stelling 4.2. *Zij F een Borel deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Stel dat er een Borel-maat op μ op F bestaat met $0 < \mu(F) < \infty$ en $I_s(\mu) < \infty$, dan geldt $\mathcal{H}^s(F) = \infty$.*

Stelling 4.3. *Zij F een Borel deelverzameling van $\mathbb{R}^n$, $s > 0$, en stel dat er een Borel maat μ op F bestaat met $0 < \mu(F) = \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ en $\mu(B(x;r)) < br^s$ voor een constante b. Dan geldt $I_t(\mu) < \infty$ voor alle $0 < t < s$.*

Het is op te merken bij stelling 4.3 dat het bestaan van zo'n maat wordt gegarandeerd door Frostman's lemma mits $\mathcal{H}^s(F) > 0$, waardoor we bijna het omgekeerde van stelling 4.2 krijgen om de karakterisering sterker te maken. Frostman's lemma zal hier echter niet behandeld worden. De volgende lemma's zijn nodig voor het bewijs van onze stellingen.

Lemma 4.4. *Zij μ een Borel maat op $\mathbb{R}^n$, $F \subset \mathbb{R}^n$ een Borel verzameling, en zij $0 < c < \infty$. Als $\limsup_{r\to 0} \mu(B(x;r))/r^s < c$ voor alle $x \in F$, dan geldt $\mathcal{H}^s(F) \geq \mu(F)/c$.*

Lemma 4.5. *Zij μ een Borel maat op een ruimte $F \subset \mathbb{R}^n$. Stel dat $I_s(\mu) < \infty$ met $s > 0$, dan geldt voor alle $p \in F$ dat $\mu(\{p\}) = 0$.*

Bewijs van stelling 4.2. Stel dat $I_s(\mu) < \infty$ voor een bepaalde maat μ. Definieer

$$F_1 = \left\{ x \in F : \limsup_{r\to 0} \mu(B(x;r))/r^s > 0 \right\}$$

Stel dat $x \in F_1$, dan bestaat er een $\varepsilon > 0$ en een rij $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dalend naar nul zodanig dat $\mu(B(x;r_i)) \geq \varepsilon r_i^s$. Uit lemma 4.5 volgt dat $\mu(\{x\}) = 0$. Omdat μ een maat is, geldt $\lim_{q\to 0} \mu(B(x;q)) = \mu(\{x\}) = 0$. Aldus kunnen we een rij $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vinden en bijbehorende verzamelingen $A_i := B(x;r_i) \setminus B(x;q_i)$ zodanig dat $\mu(A_i) \geq \frac{1}{4}\varepsilon$. Door deelrijen te nemen kunnen we ervoor zorgen dat $r_{i+1} < g_i$ voor alle i, waardoor alle A_i disjunct worden.

Opmerkend dat $||x-y|| \leq r_i$ voor alle $y \in A_i$ kunnen we de volgende integraal afschatten voor alle $x \in F_1$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}\mu(y)}{||x-y||^s} &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} \frac{\mathrm{d}\mu(y)}{||x-y||^s} \\ &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4} \varepsilon r_i^s r_i^{-s} = \infty.\end{aligned}$$

Omdat geldt $I_s(\mu) = \iint \frac{\mathrm{d}\mu(y)}{||x-y||^s} \,\mathrm{d}\mu(x) < \infty$ moet gelden $\int \frac{\mathrm{d}\mu(y)}{||x-y||^s} < \infty$ voor bijna alle x. Aldus geldt $\mu(F_1) = 0$ en volgt $\lim_{r \to 0} \mu(B(x;r))/r^s = 0$ voor alle $x \in F \setminus F_1$. Met lemma 4.4 volgt hiermee de volgende ongelijkheid voor alle $c > 0$:

$$\mathcal{H}^s(F) \geq \mathcal{H}^s(F \setminus F_1) \geq \mu(F \setminus F_1)/c = (\mu(F) - \mu(F_1))/c = \mu(F)/c$$

Omdat $\mu(F) > 0$ volgt hieruit $\mathcal{H}^s(F) = \infty$. □

Bewijs van stelling 4.3. Zij μ een Borel maat op F met $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ en een constante b zodanig dat voor alle x, r geldt $\mu(B(x;r)) \leq br^s$. We moeten nu aantonen dat $I_t(\mu) < \infty$ voor alle $0 < t < s$. Hiervoor moeten we aantonen dat

$$\iint \frac{1}{||x-y||^t} \,\mathrm{d}\mu(y) \,\mathrm{d}\mu(x) < \infty.$$

Als we kunnen aantonen dat de binnenste integraal begrensd is door een constante voor alle x, oftewel $\int ||x-y||^{-t} \,\mathrm{d}\mu(y) < c < \infty$, dan moet de dubbele integraal ook eindig zijn omdat $\iint ||x-y||^{-t} \,\mathrm{d}\mu(y) \,\mathrm{d}\mu(y) \leq \int c \,\mathrm{d}\mu(x) = c\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$.

We kiezen een vaste $x \in F$ en definiëren

$$m(r) := \mu(B(x;r)) \leq br^s.$$

We richten ons nu op het aantonen dat de binnenste integraal begrensd is door een constante.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{||x-y||^t} \,\mathrm{d}\mu(y) &= \int_{||x-y||<1} \frac{1}{||x-y||^t} \,\mathrm{d}\mu(y) + \int_{||x-y|| \geq 1} \frac{1}{||x-y||^t} \,\mathrm{d}\mu(y) \\ &\leq \int_{||x-y||<1} \frac{1}{||x-y||^t} \,\mathrm{d}\mu(y) + \mu(\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

Door de limiet met r gaat naar 0 te nemen met de vergelijking $\mu(B(x;r)) < br^s$ volgt dat $\mu(\{x\}) = 0$, dus heeft het punt met $||x-y|| = 0$ geen invloed op de waarde van deze integraal.

$$\begin{aligned}
\int_{||x-y||<1} \frac{1}{||x-y||^t} \, \mathrm{d}\mu(y) &= \int_{0<||x-y||<1} \frac{1}{||x-y||^t} \, \mathrm{d}\mu(y) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_{\frac{1}{n} \leq ||x-y|| < \frac{1}{n-1}} \frac{1}{||x-y||^t} \, \mathrm{d}\mu(y) \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty} \int_{\frac{1}{n} \leq ||x-y|| < \frac{1}{n-1}} n^t \, \mathrm{d}\mu(y) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n^t \cdot \mu\left(\left\{y \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{n} \leq ||x-y|| < \frac{1}{n-1}\right\}\right) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n^t \left(m\Big(\frac{1}{n-1}\Big) - m\Big(\frac{1}{n}\Big)\right) \\
&= m(1) + \sum_{n=1}^{\infty} m\Big(\frac{1}{n}\Big) \cdot \big((n+1)^t - n^t\big) \\
&\leq m(1) + \sum_{n=1}^{\infty} bn^{-s} \cdot \big((n+1)^t - n^t\big) \, .
\end{aligned}$$

Neem de integraal $\int_n^{n+1} tx^{t-1} \, \mathrm{d}x = (n+1)^t - n^t$. Omdat tx^{t-1} een monotoon stijgende of dalende functie is (afhankelijk van t), moet de integraal $\int_n^{n+1} tx^{t-1} \, \mathrm{d}x$ ergens tussen tn^{t-1} en $t(n+1)^{t-1}$ liggen. We kunnen beide mogelijke waarden afschatten door $tn^{t-1} < t2^s n^{t-1}$ en $t(n+1)^{t-1} < t2^s n^{t-1}$, aldus $(n+1)^t - n^t < s2^s n^{t-1}$.

$$\begin{aligned}
\sum bn^{-s} \cdot \big((n+1)^t - n^t\big) &< \sum bn^{-s} \cdot t2^s n^{t-1} \\
&= bt2^s \sum n^{t-s-1}
\end{aligned}$$

Omdat $t - s - 1 < -1$ convergeert deze som naar een eindig getal. We hebben nu

$$\int ||x-y||^{-t} \, \mathrm{d}\mu(y) < \mu(\mathbb{R}^n) + m(1) + bt2^s \sum n^{t-s-1}$$

voor alle waarden van x. Zoals uitgelegd in het begin leidt dit tot $I_t(\mu) < \infty$. □

Bewijs van lemma 4.4. Het globale idee achter het volgende bewijs is te kijken naar deelverzamelingen F_δ van F waarop $\mu(B(x;r))/r^s < c$ geldt voor alle r kleiner dan δ, hiermee wat te zeggen over het verband tussen $\mu(F_\delta)$ en $\mathcal{H}^s_\delta(F)$, en dit met een limiet uit te breiden naar een verband tussen $\mu(F)$ en $\mathcal{H}^s(F)$.

Omdat gegeven is dat $\limsup_{r \to 0} \mu(B(x;r))/r^s < c$ voor alle $x \in F$ moet er een $\delta > 0$ zijn zodanig dat voor alle $0 < r < \delta$ geldt dat $\mu(B(x;r))/r^s < c$, oftewel $\mu(B(x;r)) < cr^s$. Aan de hand hiervan definiëren we

$$F_\delta = \{x \in F : \mu(B(x;r)) < cr^s \text{ voor alle } 0 < r \leq \delta\}.$$

Ga na dat F_δ een stijgende reeks is voor kleinere waarden van δ, en als $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een reeks is die naar nul daalt, dan volgt $\bigcup_n F_{\delta_n} = F$.

Zij $(U_i)_{i\in I}$ een δ-cover van F, en dus van F_δ. Stel dat een bepaalde U_i een punt x van F_δ bevat, dan moet de gesloten bol V_i met middelpunt x en straal $|U_i|$ de verzameling U_i bevatten. Met de definitie van F_δ volgt dan dat

$$\mu(U_i) \le \mu(V_i) < c|U_i|^s.$$

Om van deze vergelijking gebruik te maken sommeren we niet over de hele cover U_i, maar alleen de U_i die een niet-lege intersectie hebben met F_δ. Deze vormen nog steeds een cover van F_δ en geven ons een

$$\begin{aligned}\mu(F_\delta) &\le \sum \mu(U_i) \quad \text{voor } U_i \cap F_\delta \neq \emptyset\\ &\le c\sum |U_i|^s \quad \text{voor } U_i \cap F_\delta \neq \emptyset\\ &\le c\sum |U_i|^s \quad \text{voor alle } U_i.\end{aligned}$$

Let op hoe de onderste vergelijking lijkt op de berekening van de $\mathcal{H}^s_\delta$ maat van F. Omdat deze U_i een arbitraire δ-cover van F kunnen zijn, moet $\mu(F_\delta)$ kleiner zijn dan $c\mathcal{H}^s_\delta(F)$. Door nu een reeks δ_n dalend naar nul te nemen krijgen we

$$\begin{aligned}\mu(F) = \mu\Big(\bigcup F_{\delta_n}\Big) &= \lim_{n\to\infty} \mu(F_{\delta_n}) = \lim_{\delta\to 0} \mu(F_\delta)\\ &\le \lim_{\delta\to 0} c\mathcal{H}^s_\delta(F) = c\mathcal{H}^s(F)\end{aligned}$$

Omdat $c > 0$ kan dit worden omgeschreven naar $\mathcal{H}^s(F) \ge \mu(F)/c$. □

Bewijs van lemma 4.5. Zij $p \in F$ willekeurig. Stel dat $\mu(\{p\}) > 0$. Zij χ_p de indicator functie van $\{p\}$, dan volgt dat

$$\begin{aligned}\iint \frac{1}{||x-y||^s}\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y) &\ge \iint \frac{\chi_p}{||x-y||^s}\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y)\\ &= \int \frac{\mu(\{p\})}{||p-y||^s}\,\mathrm{d}\mu(y)\\ &\ge \int \frac{\mu(\{p\})\cdot\chi_p}{||p-y||^s}\,\mathrm{d}\mu(y)\\ &\ge \frac{\mu(\{p\})\cdot\mu(\{p\})}{||p-p||^s}\\ &= \infty.\end{aligned}$$

Omdat gegeven is dat $I(\mu) < \infty$ volgt dat $\mu(\{p\}) > 0$ niet het geval kan zijn, dus geldt $\mu(\{p\}) = 0$ voor alle $p \in F$. □

5 Projecties

In deze sectie en verder is het vaak handig om de volgende notatie te gebruiken. Zij $\varphi \in [0, 2\pi)$. Dan noteren we met $\vec{\varphi}$ de eenheidsvector in $\mathbb{R}^2$ die in de hoek φ wijst. Verder noteren we met $\text{proj}_\varphi : \text{P}(\mathbb{R}^2) \to \text{P}(\tilde{\varphi} \cdot \mathbb{R})$ de loodrechte projectie van deelverzamelingen van $\mathbb{R}^2$ naar de lijn met hoek φ door de oorsprong, waar P voor de powerset staat.

De volgende stelling geeft informatie over de dimensie van projecties van deelverzamelingen van $\mathbb{R}^2$ op lijnen. Dit is een van de hoofdingredinten van de hoofdstelling. We bewijzen dit door de potentiaal-theoretische karakterisatie te gebruiken, wat ons help dimensie uit te drukken in integralen. We transformeren een integraal op een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ in een integraal over de projectie ervan.

Stelling 5.1. *Zij $0 < s < 1$ en $F \subset \mathbb{R}^2$ waarop een Borel maat μ bestaat met $0 < \mu(F) < \infty$ en er een constante b bestaat zodanig dat $\mu(B(x; r)) < br^s$ voor alle $x \in F$, $r > 0$. Dan geldt $\dim_{\text{H}} \text{proj}_\varphi F \geq s$ voor bijna alle $\varphi \in [0, \varphi)$.*

Lemma 5.2. *Zij $\varphi \in [0, 2\pi)$ en $\vec{\varphi} \in \mathbb{R}^2$ de eenheidsvector is in hoek φ, dan geldt voor alle $p \in \mathbb{R}^2$ dat $\text{proj}_\varphi p = \langle \vec{\varphi}, p \rangle \cdot \vec{\varphi}$. In het bijzonder, als we de lijn $\lambda \cdot \vec{\varphi}$ met $\lambda \in \mathbb{R}$ identificeren met $\mathbb{R}$, dan volgt $\text{proj}_\varphi p = \langle \vec{\varphi}, p \rangle$.*

Lemma 5.3. *De volgende integraal is eindig voor alle $0 < s < 1$:*

$$\int_0^\pi \frac{1}{|\cos \varphi|^s} \text{d}\lambda(\varphi) < \infty$$

Het volgende lemma geeft ons een herschrijving van een integraal die we in het bewijs nodig hebben.

Lemma 5.4. *Zij μ een maat op een maatruimte F, λ de Lebesgue maat, en $0 < s < 1$. Dan geldt*

$$\int_0^\pi \int_F \int_F \frac{\text{d}\mu(x)\text{d}\mu(y)}{|\langle x, \vec{\varphi} \rangle - \langle y, \vec{\varphi} \rangle|^s} \text{d}\lambda(\varphi) = \int_F \int_F \frac{\text{d}\mu(x)\text{d}\mu(y)}{|x-y|^s} \cdot \int_0^\pi \frac{\text{d}\lambda(\varphi)}{|\cos \varphi|^s}$$

Bewijs van stelling 5.1. Uit stelling 4.3 volgt dat

$$\int_F \int_F \frac{\text{d}\mu(x)\text{d}\mu(y)}{||x-y||^s} < \infty.$$

We definiëren nu de maat $\mu_\varphi = \text{proj}_\varphi(\mu)$ op $\text{proj}_\varphi F$. Als we de lijn met hoek φ door de oorsprong identificeren met $\mathbb{R}$ en $\vec{\varphi}$ de eenheidsvector in richting φ is, dan volgt met lemma 5.2 dat $\mu_\varphi([a, b]) := \mu(\{\lambda \cdot \vec{\varphi} : \lambda \in [a, b]\}) = \mu(\{p \in F : a \leq \langle \vec{\varphi}, a \rangle \leq b\})$.

Het doel is nu om stelling 4.2 te gebruiken en aan te tonen dat voor bijna alle φ geldt

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\text{d}\mu_\varphi(u)\text{d}\mu_\varphi(v)}{|u-v|^s} < \infty.$$

Allereerst gebruiken we stelling 14.1 uit [Sch11] welke stelt dat voor meetbare functies f en T, geldt $\int f \, \mathrm{d}T(\mu) = \int f \circ T \, \mathrm{d}\mu$. Samen met de stelling van Tonelli kunnen we hiermee deze integraal omschrijven naar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\mu_\varphi(u)\mathrm{d}\mu_\varphi(v)}{|u-v|^s} = \int_F \int_F \frac{\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)}{|\langle x, \vec{\varphi}\rangle - \langle y, \vec{\varphi}\rangle|^s}.$$

We gaan nu deze vergelijking integreren over alle $\varphi \in [0, \pi)$ met Lebesgue maat $(\lambda.)$ Als deze integraal eindig is, dan moet volgen dat de bovenstaande vergelijking eindig is voor bijna alle φ. Dus, we willen aantonen dat

$$\int_0^{\pi} \int_F \int_F \frac{\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)}{|\langle x, \vec{\varphi}\rangle - \langle y, \vec{\varphi}\rangle|^s} \mathrm{d}\lambda(\varphi) < \infty.$$

Met lemma 5.4 volgt dat

$$\int_0^{\pi} \int_F \int_F \frac{\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)}{|\langle x, \vec{\varphi}\rangle - \langle y, \vec{\varphi}\rangle|^s} \mathrm{d}\lambda(\varphi) = \int_F \int_F \frac{\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)}{||x-y||^s} \cdot \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\lambda(\varphi)}{|\cos\varphi|^s}$$

Het eerste deel is eindig vanwege de aanname over μ en het tweede deel is eindig vanwege lemma 5.3. Aldus is deze integraal eindig, waaruit volgt dat de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\mu_\varphi(u)\mathrm{d}\mu_\varphi(v)}{|u-v|^s}$$

eindig is voor bijna alle φ, waaruit met stelling 4.2 volgt dat de dimensie van $\mathrm{proj}_\varphi F$ groter dan of gelijk moet zijn aan s. □

Bewijs van lemma 5.2. Geometrisch betekent projectie van een punt $p \in \mathbb{R}^2$ op een lijn L dat je een punt $x \in L$ zoekt zodanig dat L loodrecht staat op de lijn tussen p en x. Oftewel, we zoeken een punt $x = t \cdot \vec{\varphi}$ met $t \in \mathbb{R}$ zodanig dat $(p - x) \perp \vec{\varphi}$. Loodrechtheid van twee vectoren karakteriserend met het hebben van inproduct nul, kunnen we nu t berekenen:

$$\begin{aligned} \langle p - t \cdot \vec{\varphi}, \vec{\varphi}\rangle &= 0; \\ \langle p, \vec{\varphi}\rangle - t\,\langle \vec{\varphi}, \vec{\varphi}\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Omdat $||\vec{\varphi}|| = 1$ impliceert $\langle \vec{\varphi}, \vec{\varphi}\rangle = 1$ volgt hieruit dat $t = \langle p, \vec{\varphi}\rangle$. □

Bewijs van lemma 5.4. We beginnen met de volgende herschrijving waarbij α de hoek is tussen de vectoren $x - y$ en $\vec{\varphi}$.

$$|\langle x, \vec{\varphi}\rangle - \langle y, \vec{\varphi}\rangle|^s = |\langle x - y, \vec{\varphi}\rangle|^s = |x-y|^s \cdot |\vec{\varphi}|^s \cdot |\cos\alpha|^s = |x-y|^s \cdot |\cos\alpha|^s.$$

Bij constante x en y, niet beide nul, kan de hoek α kan worden geschreven als een constante $c_{x,y} := -\angle(x-y)$ plus φ; als $x = y = 0$ dan maakt het niet uit welke α we kiezen dus kunnen we $c_{0,0} = 0$ aannemen. Als we de stelling van Tonelli gebruiken om de volgorde van integratie te veranderen,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \int_F \int_F \frac{\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)}{|\langle x, \vec{\varphi}\rangle - \langle y, \vec{\varphi}\rangle|^s} \,\mathrm{d}\lambda(\varphi) &= \int_F \int_F \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\lambda(\varphi)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^s \cdot |\cos(c_{x,y}+\varphi)|^s} \\ &= \int_F \int_F \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\lambda(\varphi)}{|\cos(c_{x,y}+\varphi)|^s} \frac{\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^s},\end{aligned}$$

dan zien we dat de binnenste integraal niet afhankelijk is van x en y: wat de hoek van x en y ook mag zijn, er wordt geïntegreerd over een periode van de absolute waarde van de cosinus. Aldus geldt

$$\begin{aligned}\int_F \int_F \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\lambda(\varphi)}{|\cos(c_{x,y}+\varphi)|^s} \frac{\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^s} &= \int_F \int_F \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\lambda(\varphi)}{|\cos\varphi|^s} \frac{\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^s} \\ &= \int_F \int_F \frac{\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^s} \cdot \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\lambda(\varphi)}{|\cos\varphi|^s}.\end{aligned}$$

□

Bewijs van lemma 5.3. Informeel: op het punt waar de cosinus nul is, is de cosinus te benaderen met $|cos(x)| \approx |x - \frac{1}{2}\pi|$. Omdat $0 < s < 1$ en de integraal van x^{-s} eindig is voor deze waarden van s, volgt dat de integraal van de cosinus ook eindig is. □

6 Intersecties van fractalen met verticale lijnen

In deze sectie behandelen we een stelling die stelt dat als een verzameling $F \subset \mathbb{R}^2$ op bijna iedere verticale lijn dimensie één heeft, F dan zelf dimensie twee heeft. Als het ware plak je deze eendimensionale lijnen aan elkaar vast. Dit is het tweede belangrijke ingrediënt voor de hoofdstelling.

We gebruiken in deze sectie de volgende notatie:

Definitie 6.1. Voor $c \in \mathbb{R}$ is L_c de verticale lijn $x = c$ in $\mathbb{R}^2$, oftewel $L_c = \{(c, y) : y \in \mathbb{R}\}$.

Stelling 6.2. *Zij $F \subset \mathbb{R}^2$ een Borel verzameling en stel dat voor bijna alle $c \in \mathbb{R}$ geldt $\dim_{\mathrm{H}}(F \cap L_c) = 1$, dan volgt $\dim_{\mathrm{H}} F = 2$.*

Lemma 6.3. *Zij $F \subset \mathbb{R}^2$ een Borel verzameling en $1 \leq s \leq 2$. Dan geldt*

$$\int \mathcal{H}^{s-1}(F \cap L_c) \, \mathrm{d}\lambda(c) \leq \mathcal{H}^s(F).$$

Bewijs van stelling 6.2. Zij $1 \leq s < 2$ willekeurig. Dan geldt voor bijna alle $c \in \mathbb{R}$ dat $\mathcal{H}^{s-1}(F \cap L_c) = \infty$. Volgens lemma 6.3 volgt dat $\infty = \int \mathcal{H}^{s-1}(F \cap L_c) \, \mathrm{d}\lambda(c) \leq \mathcal{H}^s(F)$, dus moet gelden dat $\dim_{\mathrm{H}} F \geq s$ voor alle $s < 2$. Omdat $F \subset \mathbb{R}^2$ concluderen we dat $\dim_{\mathrm{H}} F = 2$. □

Bewijs van lemma 6.3. Het idee is om een δ-cover van F te nemen en deze cover vervolgens uit te breiden naar een cover van vierkanten. Het is makkelijk om over de intersectie van vierkanten met lijnen te spreken: de intersectie is ofwel het hele lijnstuk even lang als de ribbe van de vierkant, of leeg. Hierdoor krijgen we een makkelijk te integreren afschatting van boven voor $\mathcal{H}^{s-1}(F \cap L_c)$.

Zij $\delta > 0$ en $\varepsilon > 0$ willekeurig, en zij $(U_i)_{i \in I}$ een willekeurige δ-cover van F zodanig dat $\sum_i |U_i|^s < \mathcal{H}^s_\delta(F) + \varepsilon$. We merken op dat iedere U_i bevat is in een kubus met ribbe $|U_i|$. Zij $(S_i)_{i \in I}$ de verzameling kubussen met ribben parrallel aan de x en y assen zodanig dat S_i de verzameling U_i bevat.

We merken op dat voor iedere c, de reeks $(\{S_i \cap L_c\})_I$ een δ-cover vormt van $F \cap L_c$: stel dat $y \in F \cap L_c$, dan is er een i met $(c, y) \in U_i$ en dus $(c, y) \in S_i \cap L_c$.

Zij $\chi_i : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ de indicatorfunctie die voor iedere $c \in \mathbb{R}$ vertelt of de lijn L_c een lege of niet-lege intersectie heeft met S_i; dit betekent dat χ_i de waarde 1 heeft op een interval met lengte $|U_i|$ en nul is voor de rest. Voor alle c geldt dan:

$$\mathcal{H}^{s-1}_\delta(F \cap L_c) \leq \sum |S_i \cap L_c|^{s-1} = \sum |U_i|^{s-1} \cdot \chi_i(c)$$

Omdat aan de rechterhand een bijna-elementaire functie staat (het heeft telbaar veel termen in plaats van eindig veel) is de integraal over c te berekenen als volgt:

$$\int \mathcal{H}^{s-1}_\delta(F \cap L_c) \, \mathrm{d}\lambda \leq \int \sum |U_i| \cdot \chi_i(c) \, \mathrm{d}\lambda = \sum |U_i|^{s-1} \cdot |U_i| = \sum |U_i|^s < \mathcal{H}^s_\delta(F) + \varepsilon.$$

Omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig is volgt hieruit dat $\int \mathcal{H}^{s-1}_\delta(F \cap L_c) \, \mathrm{d}\lambda \leq H^s_\delta(F)$. Door δ naar nul te laten gaan volgt hier verder uit dat $\int \mathcal{H}^{s-1}(F \cap L_c) \, \mathrm{d}\lambda \leq H^s(F)$ □

7 De hoofdstelling

Stelling 7.1 (De hoofdstelling). *Zij E een Borel deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ zodanig dat voor iedere $\varphi \in [0, \pi)$ er precies een lijn met hoek φ in E ligt. Dan heeft E Hausdorff-dimensie twee.*

In het bewijs van deze stelling is het gunstig om met de volgende functies voor lijnen te werken.

Definitie 7.2. Zij $L : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{P}(\mathbb{R}^2)$ de functie die een punt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ stuurt naar de lijn $y = ax + b$ als deelverzameling van $\mathbb{R}^2$: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax + b\}$. Voor een verzameling punten $F \subset \mathbb{R}^2$ definiëren we $L(F)$ als de vereniging van al deze lijnen, $\bigcup_{p \in F} L(p)$. Ten slotte definiëren we L_c als de lijn $x = c$.

De crux van het bewijs ligt in in het volgende lemma, die de dimensie van een lijnenverzameling relateer aan de projectie van de verzameling punten die deze lijnen genereren. We gaan bewijzen dat $\dim_{\mathrm{H}}(\mathrm{proj}_\varphi F)$ dimensie één heeft voor bijna alle φ. Vervolgens gebruiken we stelling

Lemma 7.3. *Stel dat $c = 1/\tan(\varphi)$, dan geldt voor alle $F \subset \mathbb{R}^2$ dat $\dim_{\mathrm{H}}(L(F) \cap L_c) = \dim_{\mathrm{H}}(\mathrm{proj}_\varphi F)$.*

In het volgende bewijs nemen we aan dat de geconstrueerde F een Borelverzameling is. Bij nader inzien is dit echter misschien niet waar. Lemma 7.4 aan het eind van deze sectie geeft een andere manier om deze verzameling F te construeren, welke tegelijkertijd licht schijnt op het probleem.

Bewijs van stelling 7.1. Zij E een Borel deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ die precies één lijn in iedere richting bevat. Definieer $F = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : L(a, b) \subset E\}$. We nemen aan, hoewel dit mogelijk niet waar is, dat F een Borelverzameling is.

Omdat E een lijn in iedere richting bevat, moet het een lijn van iedere hellingscoëfficient bevatten, dus zal voor iedere $a \in \mathbb{R}$ er precies één $(a, b) \in F$ zijn. Een gevolg hiervan is dat de projectie van F op de a-as bijectief is.

Vanwege stelling 3.3 weten we dat er voor iedere $0 < s < 1$ er een maat ν op $\mathbb{R}$ bestaat met $0 < \nu(\mathbb{R}) < \infty$ en een constante b zodanig dat voor alle $r \in \mathbb{R}, b > 0$ geldt $\nu(B(x; r)) < br^s$. Definieer nu de maat μ op F door middel van $\mu(A) = \nu(\mathrm{proj} A)$ voor $A \subset F$, waar proj de projectie op de a-as is. Deze μ voldoet nog steeds aan dezelfde ongelijkheden als ν.

Uit stelling 5.1 volgt dat $\dim_{\mathrm{H}}(\mathrm{proj}_\varphi) \geq s$ voor bijna alle $\varphi \in [0, \pi)$. Door een rij $(s_i))i \in \mathbb{N}$ te nemen stijgend naar 1 kunnen we hieruit afleiden dat $\dim_{\mathrm{H}}(\mathrm{proj}_\varphi) = 1$ voor bijna alle φ.

Met lemma 7.3 volgt dat $\dim_{\mathrm{H}}(L(F) \cap L_c) = 1$ voor bijna alle $c \in \mathbb{R}$. Met stelling 6.2 volgt dat $\dim_{\mathrm{H}} L(F) = 2$. Tenslotte, omdat $L(F) \subset E \subset \mathbb{R}^2$ volgt dat $2 \leq \dim_{\mathrm{H}} E \leq 2$ dus $\dim_{\mathrm{H}} = 2$. □

Bewijs van lemma 7.3. We beschouwen eerst een punt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ en een lijn L_c met $c \in \mathbb{R}^2$. Het is snel na te gaan dat $L(a, b) \cap L_c = (c, ac + b)$. Deze $ac + b$ kan ook worden geschreven als $(a, b) \cdot (c, 1)$ met het standaardinproduct, oftewel

$$ac + b = (a, c) \cdot \frac{(c, 1)}{||(c, 1)||} \cdot ||(c, 1)|| \tag{7.1}$$

waarbij $(c, 1)/||(c, 1)||$ een vector in $\mathbb{R}^2$ is met lengte 1.

Zij $\varphi = \arctan(1/c)$, de hoek van $(c, 1)/||(c, 1)||$, dan volgt uit lemma 5.2 met vergelijking 7.1 dat $ac + b = ||\text{proj}_\varphi(a, b)|| \cdot ||(c, 1)||$ en dus $L(a, b) \cap L_c = (c, ||(c, 1)|| \cdot ||\text{proj}_\varphi(a, b)||)$. Geometrisch betekent dit voor $L(F)$ dat $L(F) \cap L_c$ congruent is aan $\text{proj}_\varphi F$ geschaald met factor $||(1, c)||$. Er volgt dat $\dim_{\mathrm{H}}(L(F) \cap L_c) = \dim_{\mathrm{H}}(\text{proj}_\varphi F)$. $\square$

Om een beeld te krijgen van de projectie die een Kakeya verzameling E stuurt naar een puntenverzameling F zoals gebruikt in het bewijs van stelling 7.1, hebben we het volgende lemma:

Lemma 7.4. *Zij $E \subset \mathbb{R}^2$ en definieer $F := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : L(a, b) \subset E\}$. Definieer de functie*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ f &: (a, b, x) \mapsto (x, ax + b) \end{aligned}$$

en zij $\text{proj} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *de projectie die de laatste coördinaat verwijderd. Dan geldt*

$$F = (\text{proj } f^{-1}(E^c))^c.$$

Dit lemma schijnt licht op het probleem met de aanname "als E een Borelverzameling is, dan is F ook Borel". Het probleem ligt in de projectie van $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^2$. Als een Borel Kakeya verzameling E bestaat zodanig dat proj $f^{-1}(E^c)$ niet Borel is, dan zal F ook niet Borel zijn. Er bestaan Borelverzamelingen waarvan de projectie niet Borel is, zie [KN53], dus is het bestaan van zo'n verzameling E niet onwaarschijnlijk.

Bewijs van lemma 7.4. We tonen eerst aan dat $F \subset (\text{proj } f^{-1}(E^c))^c$. Stel $(a, b) \in F$, dan moeten alle punten met $y = ax + b$ in E liggen, dus liggen er geen punten in de vorm $(x, ax + b)$ in E^c, dus ligt (a, b, x) voor geen enkele waarde van x in $f^{-1}(E^c)$, dus $(a, b) \notin \text{proj } f^{-1}(E^c)$ en volgt $(a, b) \in (\text{proj } f^{-1}(E^c))^c$.

We tonen nu aan dat $(\text{proj } f^{-1}(E^c))^c \subset F$. Stel dat $(a, b) \in (\text{proj } f^{-1}(E^c))^c$, dan volgt $(a, b) \notin \text{proj } f^{-1}(E^c)$, dus geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$ dat $(a, b, x) \notin f^{-1}(E^c)$ en kan E^c geen punten bevatten in de vorm $(x, ax + b)$. Als gevolg geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$ dat $(x, ax + b) \in E$ en dus $L((a, b)) \subset E$. Als gevolg geldt $(a, b) \in F$. $\square$

Referenties

[Bes28] A. S. Besicovitch. On kakeya's problem and a similar one. *Mathematische Zeitschrift*, 27(1):312–320, 1928.

[Fal03] K. Falconer. *Fractal Geometry: Mathemathical Foundations and Applications*. Wiley, 2nd edition, 2003.

[KN53] Lyudmila Vsevolodovna Keldysh and Petr Sergeevich Novikov. The work of nn luzin in the domain of the descriptive theory of sets. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 8(2):93–104, 1953.

[Sch11] R.L. Schilling. *Measures, Integrals and Maringales*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2011.