Universiteit Utrecht
Departement Wiskunde

Bachelorscriptie Wiskunde

TWIN Wiskunde en Natuurkunde

Fractionele calculus

Een studie van afgeleiden en integralen van niet-gehele orde

Auteur:
M.A. Lip
Studentnummer 4107276

Begeleider:
prof. dr. E.P. van den Ban

15 juni 2016

15 ECTS

Samenvatting

Verschillende definities van fractionele afgeleiden en integralen worden behandeld, namelijk de Riemann-Liouville fractionele integraal, de Caputo en Riemann-Liouville fractionele afgeleiden, en een definitie met behulp van Fouriertransformatie die de Fourier fractionele afgeleide genoemd wordt. De benodigde theorie van distributies wordt besproken, de fractionele afgeleiden en integralen worden onderling vergeleken, en ten slotte wordt een praktische toepassing in de vorm van visco-elastische stoffen uitgewerkt.

Inhoudsopgave

1 Inleiding

In het deelgebied van de wiskunde dat bekend staat als *analyse* nemen twee operaties op functies een prominente plaats in: differentiëren en integreren. Deze twee operaties berekenen respectievelijk de helling van een grafiek, en het oppervlak onder een grafiek. Voor veel functies geldt dat de afgeleide van de integraal van de functie weer de oorspronkelijke functie is, dus de twee operaties zijn in die zin elkaars inverse.

Als de differentiaaloperator meerdere keren wordt toegepast, levert dit een hogere orde afgeleide op, waarbij de orde van de afgeleide gelijk is aan het aantal keer dat de operator is toegepast. Omdat de integraaloperator in veel gevallen gezien kan worden als de inverse operator ten opzichte van de differentiaaloperator, wordt deze ook wel als de afgeleide van orde -1 genoteerd. Herhaald toepassen van de integraaloperator levert dan negatieve gehele getallen als orde op. Als we de functie zelf dan als de afgeleide van orde 0 zien, is het systeem van afgeleiden en integralen te zien als een familie van operatoren die als parameter de orde hebben, die alle gehele waarden aan kan nemen.

De infinitesimaalrekening is in de tweede helft van de 17e eeuw ontwikkeld door zowel Leibniz als Newton, onafhankelijk van elkaar. In het jaar 1695 heeft Leibniz in een brief aan L'Hôpital voor het eerst het idee geopperd dat er misschien ook een operator te definiëren was met de notatie $\frac{\mathrm{d}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}x^{\frac{1}{2}}}$, zie [4]. Deze operator zou dan de halfde afgeleide zijn, en zou in het systeem van afgeleiden en integralen opgenomen kunnen worden als de operator met orde $\frac{1}{2}$. De theorie van dit soort differentiaal- en integraaloperatoren die nu ook breuken als orde zouden kunnen hebben, is de *fractionele calculus* genoemd.

De fundering voor de theorie van de fractionele calculus is door Liouville gelegd in het begin van de 19e eeuw, zie [5], en veel van de theorie is dan ook in de 19e en 20e eeuw ontwikkeld. In deze periode zijn verschillende definities van fractionele afgeleiden en integralen ontwikkeld, waarbij de orde van de operatoren niet alleen niet-geheel hoeft te zijn, maar zelfs geen breuk meer hoeft te zijn. De naam "fractionele calculus" is hierdoor dus een enigszins verouderde term, maar aangezien dit de bekende term voor het vakgebied was, wordt hij nog steeds gebruikt.

De onderzoeksvraag waar we deze scriptie omheen bouwen is "Hoe kunnen de definities van afgeleiden en integralen uitgebreid worden tot willekeurige reële orde, op een praktisch toepasbare manier?". Om deze vraag te beantwoorden zullen we een aantal verschillende definities van fractionele integralen en afgeleiden bespreken, beginnend met de Riemann-Liouville definitie voor fractionele integralen, die we op twee verschillende manieren uitbreiden tot de Riemann-Liouville fractionele afgeleiden en de Caputo fractionele afgeleiden. We bespreken ook een definitie van fractionele afgeleiden en integralen door middel van Fouriertransformatie, die we de Fourier fractionele afgeleide of integraal zullen noemen. Vervolgens zullen we deze definities onderling vergelijken wat betreft de functies waarop ze toegepast kunnen worden, en de eigenschappen die de afgeleiden en integralen hebben, en we zullen bekijken of de verschillende definities in sommige gevallen dezelfde resultaten opleveren. Vervolgens zullen we een praktische toepassing van de fractionele calculus bespreken, in de vorm van de studie van visco-elastische stoffen.

Voor deze studie, en voor de meest algemene vorm van de definitie van de Fourier fractionele afgeleide, is de theorie van distributies of gegeneraliseerde functies nodig. Deze zullen we daarom direct behandelen, gevolgd door de definities van de verschillende fractionele afgeleiden en integralen en het vergelijken van deze definities. Daarna sluiten we af met de praktische toepassing en de conclusie.

2 Distributies

In deze sectie leggen we uit wat distributies zijn en hoe operaties op distributies werken, zoals differentiëren en Fouriertransformatie. Lezers die al bekend zijn met deze begrippen kunnen deze sectie overslaan en direct verdergaan naar de definities van de verschillende fractionele afgeleiden en integralen. We volgen in deze sectie de notatie en uitleg van [1], waarbij veel is ingekort en in een andere volgorde gepresenteerd wordt.

Distributies, ook wel gegeneraliseerde functies genoemd, zijn een uitbreiding van het begrip continue functies. Een voordeel van distributies ten opzichte van gewone functies is dat elke distributie differentieerbaar is, en dat de afgeleide weer een distributie is. Hierdoor krijgen alle continue functies, gezien als distributies, dus afgeleiden van elke gehele orde, die ook distributies zijn.

We beginnen met een korte inleiding waar distributies vandaan komen. Voor kwadratisch integreerbare functies van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}$ bestaat het integraal-inproduct, gegeven door

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Voor functies van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{C}$ is dit geen complex inproduct, omdat er dan negatieve waarden uit kunnen komen, en het een bilineaire afbeelding is in plaats van een sesquilineaire afbeelding. Het idee achter distributies begint ermee dat we deze paring tussen functies nu willen zien als een lineaire afbeelding, toegepast op g, waarbij we een continue functie f identificeren met de lineaire afbeelding gegeven door

$$\mathrm{test} f : \phi \to \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

De ruimte van functies ϕ waar we deze afbeelding op gaan toepassen wordt de ruimte van testfuncties genoemd, deze zullen we in de eerste subsectie nader bestuderen.

De ruimte van distributies wordt vervolgens gedefinieerd als de ruimte van continue lineaire afbeeldingen van de ruimte van testfuncties naar $\mathbb{C}$. We zullen operaties definiëren op distributies door de betreffende operaties op functies toe te passen, te kijken hoe de distributies die horen bij die functies dan transformeren en die formules dan als definiërende eigenschap te gebruiken. Op deze manier wordt in de tweede subsectie de afgeleide van een distributie gedefinieerd.

In de derde subsectie bespreken we de definitie van Fouriertransformatie. Dit doen we zowel voor Schwartz-functies, die een deelruimte van de oneindig vaak differentieerbare functies vormen, als voor getemperde distributies, een deelruimte van de distributies.

2.1 Testfuncties en distributies

We beginnen met de definitie van de drager van een functie, die we direct gebruiken om de ruimte van testfuncties te definiëren.

Definitie 2.1. Zij X een deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Voor een functie $\phi : X \to \mathbb{C}$ noteren we met $\operatorname{supp} \phi$ de *drager* van ϕ, gedefinieerd als de afsluiting in X van de verzameling van de punten $x \in X$ waar $\phi(x) \neq 0$.

Definitie 2.2 (Testfuncties ([1], Definitie 2.5))**.** Zij X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Een *testfunctie* op X is een oneindig vaak differentieerbare functie $\phi : X \to \mathbb{C}$, waarvan de drager een compacte deelverzameling van X is. De ruimte van alle testfuncties op X wordt genoteerd als $C_0^\infty(X)$.

Een testfunctie voldoet dus aan twee eisen: het oneindig vaak differentieerbaar zijn wordt gebruikt omdat voor de afgeleiden van distributies nodig gaat zijn dat de testfuncties even vaak differentieerbaar zijn als het aantal keer dat we de afgeleide van de distributie nemen. De eis van de compacte drager is volgens de stelling van Heine-Borel equivalent met de eis dat de drager gesloten en begrensd is, in $\mathbb{R}^n$. Omdat de drager een afsluiting is, is hij altijd gesloten in X, dus we eisen eigenlijk dat de drager niet tegen de rand van X aan ligt, en begrensd is.

Als X een open deelverzameling van Y is, die een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ is, kan elke testfunctie ϕ op X uitgebreid worden tot een testfunctie op Y, door $\phi(y) = 0$ te nemen voor elke $y \in Y \setminus X$. De begrensde drager garandeert dat de lineaire afbeeldingen test$f$ voor elke continue functie f en elke testfunctie ϕ een convergente integraal opleveren:

Lemma 2.3. *Voor elke locaal integreerbare functie $f : X \to \mathbb{C}$ en testfunctie $\phi \in C_0^\infty(X)$ convergeert de integraal*

$$\int_X f(x)\phi(x)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Bewijs. Omdat ϕ een testfunctie is, is de drager begrensd, dus buiten dit begrensde gebied is de integrand $f(x)\phi(x)$ gelijk aan $0f(x)$, omdat $\phi(x) = 0$, dus gelijk aan 0. Binnen de compacte drager is de continue functie ϕ begrensd, dus de integrand wordt gemajoreerd door $M|f(x)|$ voor een bovengrens M van $|\phi(x)|$. De integraal van $M|f(x)|$ over de begrensde drager convergeert, omdat f locaal integreerbaar is. De integraal convergeert dus over de begrensde drager van ϕ, en daarbuiten is de integrand 0, dus de hele integraal convergeert. $\square$

De combinatie van oneindig vaak differentieerbaar en compacte drager legt een erg sterke beperking op aan testfuncties, hierdoor is het in eerste instantie niet direct duidelijk of er wel functies zijn die aan beide eisen voldoen. In het geval van een analytische functie geldt namelijk dat hij overal 0 is zodra hij op een open verzameling 0 is, dus dan geldt dat de drager ofwel het hele domein is, ofwel de lege verzameling. Het blijkt dat de eis van oneindig vaak differentieerbaar zijn niet zo sterk is.

Voorbeeld 2.4. Een voorbeeld van een testfunctie op $\mathbb{R}$ is de functie

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x-a}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{b-x}} \qquad (a < x < b), \tag{4}$$
$$f(x) = 0 \qquad (\text{anders}) \tag{5}$$

voor a en b reële getallen met $a < b$. De drager van de functie is het gesloten interval $[a, b]$, en het is makkelijk in te zien dat de functie overal buiten de punten a en b oneindig vaak differentieerbaar is. Om te laten zien dat de functie oneindig vaak differentieerbaar is in de punten a en b, is het voldoende om te laten zien dat de functie

$$g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \qquad (x > 0), \tag{6}$$
$$g(x) = 0 \qquad (\text{anders}) \tag{7}$$

oneindig vaak differentieerbaar is in 0. Dan kunnen we immers met de productregel concluderen dat de functie f ook oneindig vaak differentieerbaar is. We merken om te beginnen op dat de functie g continu is in 0, omdat de limiet van x naar 0 van $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ gelijk is aan 0. Vanuit de machtreeks van e^y volgt dat $\mathrm{e}^y > \frac{y^n}{n!}$ voor elke $n > 0$ geheel en $y \geq 0$. Dus voor $x > 0$ is

$$g(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} \leq \frac{n!}{\left(\frac{1}{x}\right)^n} = n!x^n. \tag{8}$$

Hieruit kunnen we afleiden dat g differentieerbaar is in 0, met afgeleide 0, door middel van de insluitstelling. Voor $x > 0$ geldt ook de formule

$$g'(x) = \frac{g(x)}{x^2}. \tag{9}$$

Hieruit kunnen we met inductie aantonen dat er polynomen p_k zijn zodat voor $x > 0$ geldt dat

$$g^{(k)}(x) = p_k(\frac{1}{x})g(x). \tag{10}$$

De polynomen worden dan gegeven door

$$p_0(y) = 1 \qquad p_{k+1}(y) = (p_k(y) - p_k'(y))y^2. \tag{11}$$

We zien in het bijzonder dat de graad van p_k dus $2k$ is, waardoor er voor elke k een constante $c(k)$ is zodat

$$|p_k(y)| \leq c(k)y^{2k} \qquad (y \geq 1). \tag{12}$$

Hieruit volgt dan dat voor $0 < x \leq 1$ geldt dat

$$|g^{(k)}(x)| \leq c(k)n!x^{n-2k}. \tag{13}$$

Door hierin $n \geq 2k + 2$ te kiezen, volgt met inductie dat de functie g een $(k + 1)$-de afgeleide heeft in 0, en dat deze gelijk is aan 0. De functie is dus inderdaad oneindig vaak differentieerbaar in 0, dus is de functie f inderdaad een testfunctie.

Uit dit voorbeeld kunnen we ook voor meerdimensionale ruimten testfuncties construeren, door het product van enkele van deze functies van de verschillende coördinaten te nemen.

In de definitie van distributies willen we eisen dat de distributies continu zijn. Omdat de ruimte van testfuncties oneindig-dimensionaal is, zijn namelijk niet alle lineaire afbeeldingen continu. Voor continuïteit is een zekere vorm van convergentie nodig, dus definiëren we convergentie van testfuncties als volgt:

Definitie 2.5. Laat X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ zijn, $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ een rij van testfuncties op X, en ϕ een testfunctie op X. De rij convergeert dan in $C_0^\infty(X)$ naar ϕ als zowel geldt dat er een compacte deelverzameling K van X is, zodat voor alle j geldt dat $\operatorname{supp}\phi_j \subset K$, als dat voor elke multi-index α geldt dat de rij $(\partial^\alpha\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uniform op K convergeert naar $\partial^\alpha\phi$.

De eerste eis zorgt ervoor dat het gedrag van de rij als geheel binnen één compacte verzameling plaatsvindt. De tweede eis zorgt dat niet alleen de functies zelf convergeren naar ϕ, maar dat elke combinatie van partiële afgeleiden van de rij ook nog convergeren naar de betreffende afgeleide van de limietfunctie. Deze sterke eis op convergentie van testfuncties gaat ervoor zorgen dat het makkelijker is voor lineaire afbeeldingen om continu te zijn, en dat de distributies van de afgeleiden van testfuncties mogen afhangen, omdat we daarvan voor een convergente rij ook weten dat ze convergeren.

We hebben nu genoeg voorbereidingen getroffen om de definitie van distributies te geven:

Definitie 2.6 (Distributies ([1], Definitie 3.1))**.** Zij X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Een *distributie* op X is een complex lineaire afbeelding u van $C_0^\infty(X)$ naar $\mathbb{C}$ (ook wel een complex lineaire functionaal genoemd) die continu is in de zin dat

$$\lim_{j\to\infty} u(\phi_j) = u(\phi) \qquad \text{wanneer} \qquad \lim_{j\to\infty}\phi_j = \phi \quad \text{in } C_0^\infty(X). \tag{14}$$

Anders gezegd bedoelen we met continu in deze context dus dat convergentie van rijen behouden blijft. De ruimte van alle distributies op X wordt genoteerd als $\mathcal{D}'(X)$.

De notatie $\mathcal{D}'(X)$ is afgeleid van de notatie $\mathcal{D}(X)$ die ook gebruikt wordt voor de ruimte van testfuncties, waarbij het accent de duale ruimte aangeeft. Verder kunnen we de eis van continuïteit herschrijven door te gebruiken dat u lineair is, naar

$$\lim_{j\to\infty} u(\phi_j-\phi) = 0 \qquad \text{wanneer} \qquad \lim_{j\to\infty}\phi_j - \phi = 0, \tag{15}$$

dus we hoeven alleen voor rijen die naar 0 convergeren te controleren dat het beeld van de rij ook naar 0 convergeert. De inbedding van de continue functies in de ruimte van distributies gebeurt met de volgende stelling:

Stelling 2.7. *Zij X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Voor elke locaal integreerbare functie f op X, definieert*

$$(\mathrm{test} f)(\phi) = \int_X f(x)\phi(x)\mathrm{d}x \tag{16}$$

een distributie $u = \mathrm{test} f$ op X.

Bewijs. Met behulp van Lemma 2.3 volgt dat de integraal altijd convergeert, dus dat het een welgedefinieerde afbeelding is. Omdat integralen lineair zijn, is het ook een lineaire afbeelding. Uit het bewijs van Lemma 2.3 volgde dat

$$|(\mathrm{test} f)(\phi)| \leq \|\phi\|_K \int_K |f(x)|\mathrm{d}x \tag{17}$$

met $\|\phi\|_K$ de supremum-norm van ϕ over K, en K de drager van ϕ. Als we een rij $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ hebben die naar 0 convergeert, is er één compacte K te kiezen waarin alle dragers bevat zijn, en gaat $\|\phi_j\|_K$ naar 0, dus dan convergeert ook $(\mathrm{test} f)(\phi)$ naar 0, dus de afbeelding is ook continu. □

De stelling vertelt ons zelfs dat er bij elke locaal integreerbare functie een distributie hoort, in plaats van alleen bij elke continue functie, maar dit is enigszins bedrieglijk. Voor continue functies blijkt namelijk de afbeelding $\mathrm{test} : f \to \mathrm{test} f$ een injectieve afbeelding te zijn, terwijl voor locaal integreerbare functies dit niet zo is. We kunnen dus de continue functies 1-op-1 koppelen aan een deelruimte van de distributies, terwijl er voor locaal integreerbare functies moet worden toegevoegd dat twee functies bij dezelfde distributie horen dan en slechts dan als ze bijna overal gelijk zijn (dat wil zeggen, de verzameling van punten waar ze verschillen heeft Lebesgue maat 0). Binnen de theorie van Lebesgue integratie is het gebruikelijk om functies als hetzelfde te zien wanneer ze bijna overal gelijk zijn, dus in dat geval kunnen wel de locaal integreerbare functies ingebed worden in de distributies.

We behandelen een paar voorbeelden van distributies:

Voorbeeld 2.8. De Dirac deltadistributie, vaak ook de Dirac deltafunctie genoemd, is de distributie δ gedefinieerd als

$$\delta(\phi) = \phi(0) \qquad\qquad (\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)). \tag{18}$$

Deze afbeelding is welgedefinieerd en lineair, en omdat voor convergente rijen van testfuncties de convergentie in ieder geval uniform is, convergeert dan ook $\phi_j(0)$ naar $\phi(0)$ als ϕ_j naar ϕ convergeert. Hiermee is dit dus een distributie.

Voorbeeld 2.9. De Heaviside stapfunctie is de functie H gedefinieerd door $H(x) = 0$ als $x < 0$ en $H(x) = 1$ als $x > 0$. De waarde $H(0)$ verschilt tussen verschillende definities. Gezien als distributie zijn al deze definities hetzelfde, omdat de functies bijna overal gelijk zijn.

Een voordeel van het gebruiken van distributies, is dat elke distributie te benaderen is door middel van gladde functies. Om dit resultaat te formuleren, hebben we eerst een vorm van convergentie van distributies nodig:

Definitie 2.10. Laat $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ een rij van distributies op X zijn, en laat ook $u \in \mathcal{D}'(X)$. We schrijven dan

$$\lim_{j\to\infty} u_j = u \qquad \text{als voor alle } \phi \in C_0^\infty(X) \qquad \lim_{j\to\infty} u_j(\phi) = u(\phi). \tag{19}$$

Analoog definiëren we convergentie van een familie distributies u_ϵ die van een continue variabele ϵ afhangen als puntsgewijze convergentie.

Als we de testfuncties uitbreiden tot een grotere open verzameling Y, geldt dat ze convergeren dan en slechts dan als ze dit in X deden, omdat buiten X de testfuncties overal 0 zijn.

Het volgende resultaat presenteren we zonder bewijs:

Stelling 2.11. *Zij X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Voor elke $u \in \mathcal{D}'(X)$ bestaat er een rij testfuncties $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ met $\lim_{j\to\infty} \mathrm{test}u_j = u$*

Bewijs. Zie [1], Corollary 11.7. □

2.2 Afgeleiden van distributies

Voor een continu differentieerbare functie f op een open deelverzameling X van $\mathbb{R}^n$ kunnen we met behulp van partieel integreren laten zien dat

$$\begin{aligned}(\mathrm{test}\partial_j f)(\phi) &= \int_X \partial_j f(x)\phi(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_X -f(x)\partial_j\phi(x)\mathrm{d}x \\ &= -(\mathrm{test}f)(\partial_j\phi),\end{aligned} \tag{20}$$

waarbij er geen randtermen zijn, omdat de functie ϕ buiten zijn compacte drager binnen X overal 0 is. We gebruiken deze formule om de afgeleide van een distributie te definiëren:

Definitie 2.12. Zij X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en u een distributie op X. De partiële afgeleiden van u worden dan gegeven door

$$(\partial_j u)(\phi) = -u(\partial_j\phi) \qquad (\phi \in C_0^\infty(X)). \tag{21}$$

Deze afbeelding is dan zelf ook weer een distributie. Hij is lineair omdat u en het nemen van de afgeleide lineair zijn, en hij is continu, omdat als een rij testfuncties convergeert, dan ook de afgeleiden als testfuncties convergeren, en u continu is.

Uit vergelijking (20) zien we dan dat geldt dat

$$\partial_j(\mathrm{test} f) = \mathrm{test}(\partial_j f) \tag{22}$$

voor elke continu differentieerbare f, dus deze definitie van differentiëren is een uitbreiding van het normale begrip van differentiëren. Voor functies met continue partiële (gewone) afgeleiden geldt dat de volgorde van partieel differentiëren omgedraaid mag worden, specifieker: als een functie f continue tweede orde partiële afgeleiden $\partial_i\partial_j f$ en $\partial_j\partial_i f$ heeft, dan zijn deze gelijk. Voor distributies geldt dat je de volgorde altijd mag omwisselen:

Lemma 2.13. *Zij u een distributie op een open deelverzameling X van $\mathbb{R}^n$. Dan geldt voor de tweede orde partiële afgeleiden dat*

$$\partial_i\partial_j u = \partial_j\partial_i u. \tag{23}$$

Bewijs. We passen de linkerkant toe op een testfunctie ϕ, en herschrijven het resultaat:

$$(\partial_i\partial_j u)(\phi) = -(\partial_j u)(\partial_i \phi) = u(\partial_j\partial_i\phi). \tag{24}$$

Omdat ϕ oneindig vaak differentieerbaar is, zijn de tweede orde afgeleiden continu, dus mogen we de volgorde van de afgeleiden omdraaien, om te krijgen dat

$$(\partial_i\partial_j u)(\phi) = u(\partial_i\partial_j\phi) = (\partial_j\partial_i u)(\phi). \tag{25}$$

Aangezien dit voor elke ϕ geldt, mogen we dus inderdaad bij distributies de volgorde van afgeleiden omwisselen. □

We werken een paar voorbeelden uit:

Voorbeeld 2.14. We bepalen de afgeleiden van de Dirac deltadistributie, als distributie op $\mathbb{R}$. Dan voldoen de afgeleiden aan

$$\delta^{(k)}(\phi) = -\delta^{(k-1)}(\phi'). \tag{26}$$

Door dit herhaald toe te passen, krijgen we

$$\delta^{(k)}(\phi) = (-1)^k\delta(\phi^{(k)}) = (-1)^k\phi^{(k)}(0). \tag{27}$$

Voorbeeld 2.15. We bepalen de afgeleide van de Heaviside stapfunctie H, gezien als distributie. Deze voldoet aan

$$\begin{aligned}(\mathrm{test}H)'(\phi) = -(\mathrm{test}H)(\phi') &= -\int_{\mathbb{R}} H(x)\phi'(x)\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^\infty \phi'(x)\mathrm{d}x = \phi(0)\end{aligned} \tag{28}$$

met de hoofdstelling van de integraalrekening en het feit dat ϕ een begrensde drager heeft, en dus naar 0 gaat als x naar oneindig gaat. Hieruit volgt dus voor elke ϕ dat

$$(\mathrm{test}H)'(\phi) = \phi(0) = \delta(\phi), \tag{29}$$

dus $(\mathrm{test}H)' = \delta$.

2.3 Fouriertransformatie

We beginnen deze subsectie meteen met de formule voor Fouriertransformatie van functies:

Definitie 2.16 (Fouriertransformatie van functies)**.** Zij $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ een integreerbare functie. De *Fouriergetransformeerde* van u, genoteerd met $\mathcal{F}u$, is dan een functie van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{C}$, gegeven door

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle} u(x)\mathrm{d}x, \tag{30}$$

waarbij $\langle x, \xi\rangle$ het Euclidisch inproduct is.

Omdat u integreerbaar is over $\mathbb{R}^n$, is ook $|u|$ integreerbaar, en kunnen we deze als majorant gebruiken om te laten zien dat de integraal in (30) convergeert. Hiermee is de Fouriergetransformeerde een welgedefinieerde functie.

Voor Fouriertransformaties willen we een functieruimte en een ruimte van distributies hebben, waarvoor de Fouriergetransformeerden bestaan, waarvoor we de inverse Fouriertransformatie kunnen definiëren en waarvoor ook geldt dat we binnen de ruimte kunnen differentiëren, zodat we het over Fouriertransformaties van afgeleiden kunnen hebben. Daarom definiëren we de ruimte van Schwartzfuncties:

Definitie 2.17 (Schwartzfunctie, ([1], Definitie 14.5))**.** Een functie ϕ op $\mathbb{R}^n$ heet *snel afnemend* als voor elke multi-index β de functie $x \to x^\beta\phi(x)$ begrensd is op $\mathbb{R}^n$. We definiëren nu de ruimte $\mathcal{S}$ van *Schwartzfuncties* als de ruimte van alle oneindig vaak differentieerbare functies ϕ waarvoor $\partial^\alpha\phi$ snel afnemend is voor elke multi-index α. Voor een rij $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ van Schwartzfuncties en een functie ϕ in $\mathcal{S}$ zeggen we dat $\lim_{j\to\infty}\phi_j = \phi$ als voor alle multi-indices α en β geldt dat de rij functies $(x^\beta\partial^\alpha\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uniform op $\mathbb{R}^n$ convergeert naar $x^\beta\partial^\alpha\phi$.

Omdat Schwartzfuncties snel afnemend zijn, worden ze gemajoreerd door $\frac{C}{(1+\|x\|)^{n+1}}$ voor een $C > 0$, dus zijn ze integreerbaar over $\mathbb{R}^n$. We kunnen dus voor elke Schwartzfunctie de Fouriergetransformeerde bepalen. De eis op de afgeleiden zorgt dat ook voor de afgeleiden van Schwartzfuncties geldt dat ze Schwartzfuncties zijn. Voor testfuncties geldt dat ze buiten een compact gebied 0 zijn, dus als we voor een testfunctie ϕ de functie $x^\beta\partial^\alpha\phi(x)$ bekijken, is dit een continue functie die buiten een compact gebied 0 is, en dus begrensd. Hieruit volgt dat elke testfunctie ook een Schwartzfunctie is. De vorm van convergentie op testfuncties impliceert ook dat een convergente rij testfuncties, gezien als Schwartzfuncties, nog steeds convergeert, naar dezelfde limiet. Het volgende lemma vertelt ons dat de Fouriergetransformeerde van een Schwartzfunctie weer een Schwartzfunctie is:

Lemma 2.18. *Fouriertransformatie definieert een continue lineaire afbeelding van $\mathcal{S}$ naar $\mathcal{S}$. Voor elke $1 \le j \le n$, $\phi \in \mathcal{S}$ en $\xi \in \mathbb{R}^n$ geldt*

$$(\mathcal{F}(\partial_j\phi))(\xi) = \mathrm{i}\xi_j(\mathcal{F}\phi)(\xi), \tag{31}$$

$$(\mathcal{F}(x_j\phi))(\xi) = \mathrm{i}\partial_j(\mathcal{F}\phi)(\xi). \tag{32}$$

Bewijs. Als $\phi \in \mathcal{S}$ kunnen we door middel van de afschatting $|\phi(x)| \le c(1+\|x\|)^{-n-1}$ voor een $c > 0$ de integrand in (30) majoreren door $c(1+\|x\|)^{-n-1}$, waaruit volgt dat de integraal convergeert, en begrensd en continu is als functie van ξ. Omdat $\phi \in \mathcal{S}$ ligt ook $x_j\phi(x)$ in $\mathcal{S}$, dus de Fouriergetransformeerde hiervan bestaat ook, en $x_j\phi(x)$ is continu en integreerbaar, en als we $\mathrm{i}\partial_j$ toepassen op $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}\phi(x)$, waarbij de afgeleide naar de ξ-variabele is, levert dit $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}x_j\phi(x)$, dus volgt dat

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}(x_j\phi))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}x_j\phi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{i}\partial_j(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}\phi(x))\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{i}\partial_j\left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}\phi(x)\mathrm{d}x\right) = \mathrm{i}\partial_j(\mathcal{F}\phi)(\xi).\end{aligned} \tag{33}$$

Hiermee is vergelijking (32) aangetoond, en in het bijzonder volgt met inductie hieruit dat $\mathcal{F}\phi$ oneindig vaak differentieerbaar is. Voor de andere vergelijking kunnen we partieel integreren, waarbij de randtermen wegvallen omdat de functies naar 0 gaan, wat oplevert dat

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}(\partial_j\phi))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}\partial_j\phi(x)\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^n} \partial_j\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}\phi(x)\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{i}\xi_j\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}\mathrm{d}x = \mathrm{i}\xi_j(\mathcal{F}\phi)(\xi),\end{aligned} \tag{34}$$

waarbij de afgeleiden naar de x-variabelen zijn. Hiermee is vergelijking (31) aangetoond. Om aan te tonen dat de Fouriergetransformeerde van een Schwartzfunctie weer een Schwartzfunctie is, gebruiken we nu deze 2 vergelijkingen, om voor multi-indices α en β te krijgen dat

$$\xi^\beta\partial^\alpha(\mathcal{F}\phi) = \xi^\beta\mathcal{F}(\mathrm{i}^{-|\alpha|}x_j\phi) = \mathcal{F}(\mathrm{i}^{-|\alpha|-|\beta|}\partial^\beta x^\alpha\phi). \tag{35}$$

Omdat $\partial^\beta x^\alpha\phi$ weer een Schwartzfunctie is, geldt dat de Fouriergetransformeerde hiervan begrensd is. Hieruit volgt dus dat $\xi^\beta\partial^\alpha(\mathcal{F}\phi)$ begrensd is voor elke multi-indices α en β, waarmee we hebben aangetoond dat $\mathcal{F}\phi$ een Schwartzfunctie is.

Het continu zijn van de afbeelding is weer in termen van behoud van convergentie van rijen. We hoeven dus alleen te laten zien dat als $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ een rij Schwartzfuncties is, die naar 0 convergeert, dat dan $(\mathcal{F}\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ook naar nul convergeert. Hiervoor moeten we laten zien dat voor alle multi-indices α en β geldt dat $\xi^\beta\partial^\alpha(\mathcal{F}\phi_j)$ uniform naar 0 convergeert, dus met vergelijking (35) moeten we aantonen dat $\mathcal{F}(\mathrm{i}^{-|\alpha|-|\beta|}\partial^\beta x^\alpha\phi_j)$ uniform naar nul convergeert voor alle α en β. Omdat $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ naar 0 convergeert, geldt voor alle α en β dat $(\partial^\beta x^\alpha\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uniform naar 0 convergeert, dus kunnen we $\mathrm{i}^{-|\alpha|-|\beta|}\partial^\beta x^\alpha\phi_j$ majoreren door $c_j(1+\|x\|)^{-n-1}$ voor een rij c_j die naar 0 convergeert. Daaruit volgt dat

$$|\xi^\beta\partial^\alpha(\mathcal{F}\phi_j)| \le c_j\int\frac{1}{(1+\|x\|)^{n+1}}\mathrm{d}x = c_jC, \tag{36}$$

waarbij we de waarde van de integraal C noemen. Omdat c_j naar 0 gaat, volgt dus dat $|\xi^\beta\partial^\alpha(\mathcal{F}\phi_j)|$ naar 0 gaat, en de convergentie is uniform omdat de afschatting niet van ξ

afhangt. Hieruit volgt dat een rij die naar 0 convergeert wordt afgebeeld op een rij die naar 0 convergeert, dus de afbeelding is continu. $\square$

We behandelen een voorbeeld van Fouriertransformatie.

Voorbeeld 2.19. De functie $f : x \to \mathrm{e}^{-x^2}$ is een Schwartzfunctie, omdat voor elke $n > 0$ geldt dat $x^n \mathrm{e}^{-x^2}$ begrensd is, en omdat elke afgeleide van e^{-x^2} met behulp van de productregel en kettingregel van de vorm $p(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ is, met p een polynoom. Voor de functie f geldt dat $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -2xf(x)$, dus voor de Fouriergetransformeerde geldt dat $\mathrm{i}\xi(\mathcal{F}f)(\xi) = -2\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(\mathcal{F}f)$, dus $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(\mathcal{F}f) = -\frac{1}{2}\xi(\mathcal{F}f)$. De oplossing van deze differentiaalvergelijking is $(\mathcal{F}f)(\xi) = C\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4}}$ voor een constante C. Deze constante kunnen we bepalen door $(\mathcal{F}f)(0)$ te bepalen, dit levert

$$C = (\mathcal{F}f)(0) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}, \tag{37}$$

dus de Fouriergetransformeerde van $f : x \to \mathrm{e}^{-x^2}$ is $(\mathcal{F}f) : \xi \to \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$.

Fouriertransformatie op de ruimte van Schwartzfuncties is een bijectieve afbeelding naar de Schwartzfuncties, wat we in de volgende stelling benoemen zonder het bewijs te geven:

Stelling 2.20. *Fouriertransformatie is een bijectieve afbeelding van $\mathcal{S}$ naar $\mathcal{S}$, met als inverse de afbeelding*

$$(\mathcal{F}^{-1}(\psi))(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle} \psi(\xi) \mathrm{d}\xi. \tag{38}$$

Bewijs. Zie [1], Stelling 14.11. $\square$

Een handig ander resultaat is:

Lemma 2.21. *Zij $\phi, \psi \in \mathcal{S}$. Dan ligt ook de convolutie, gegeven door*

$$\phi * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t)\psi(x-t)\mathrm{d}t \tag{39}$$

in $\mathcal{S}$, en geldt dat

$$\mathcal{F}(\phi * \psi) = \mathcal{F}\phi\mathcal{F}\psi, \tag{40}$$

$$\mathcal{F}(\phi\psi) = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}\phi * \mathcal{F}\psi. \tag{41}$$

Bewijs. Zie [1], Stelling 14.12. $\square$

Voor twee integreerbare functies ϕ en ψ geldt dat

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}\phi)(x)\psi(x)\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}\phi(\xi)\psi(x)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}\phi(x)\psi(\xi)\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)(\mathcal{F}\psi)(x)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{42}$$

In deze formules herkennen we de integralen die voor het definiëren van testfuncties gebruikt zijn. Hieruit zouden we dus de Fouriergetransformeerde van een distributie willen definiëren door middel van

$$(\mathcal{F}u)(\phi) = u(\mathcal{F}\phi). \tag{43}$$

Echter, voor gewone distributies kan dit niet, omdat een testfunctie niet noodzakelijk een testfunctie als Fouriergetransformeerde heeft. Daarom definiëren we een deelruimte van de distributies:

Definitie 2.22 (Getemperde distributies)**.** Een *getemperde distributie* is een complex lineaire afbeelding van $\mathcal{S}$ naar $\mathbb{C}$, die continu is in de zin dat convergentie van rijen behouden blijft. We zeggen dat een rij u_j van getemperde distributies convergeert naar u, als voor elke $\phi \in \mathcal{S}$ geldt dat $\lim_{j\to\infty} u_j(\phi) = u(\phi)$. De ruimte van getemperde distributies wordt genoteerd als $\mathcal{S}'$.

Omdat de ruimte van testfuncties een deelruimte is van de ruimte van Schwartzfuncties, en convergentie van testfuncties impliceert dat ze ook als Schwartzfuncties convergeren, zijn alle getemperde distributies ook te zien als distributies, door het domein te beperken.

Definitie 2.23. Zij u een getemperde distributie. Dan is de Fouriergetransformeerde van u de getemperde distributie gegeven door

$$(\mathcal{F}u)(\phi) = u(\mathcal{F}\phi). \tag{44}$$

De Fouriergetransformeerde is dan inderdaad een getemperde distributie, omdat voor elke Schwartzfunctie ϕ geldt dat $\mathcal{F}\phi$ ook een Schwartzfunctie is, dus we kunnen u erop toepassen. Omdat Fouriertransformatie continu is, en u continu is, is de samenstelling dat ook, dus $\mathcal{F}u$ is continu.

Voor getemperde distributies kunnen we deze vergelijking wel als definiërende eigenschap gebruiken, omdat de Fouriergetransformeerde van een Schwartzfunctie weer een Schwartzfunctie is.

Lemma 2.24. *De afbeelding $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ is continu.*

Bewijs. Voor elke rij getemperde distributies $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ die naar een getemperde distributie u convergeert, geldt voor elke $\phi \in \mathcal{S}$ dat $\lim_{j\to\infty} u_j(\phi) = u(\phi)$, dus geldt ook voor elke $\phi \in \mathcal{S}$ dat $\lim_{j\to\infty}(\mathcal{F}u_j)(\phi) = \lim_{j\to\infty} u_j(\mathcal{F}\phi) = u(\mathcal{F}\phi) = (\mathcal{F}u)(\phi)$, dus convergeert de rij $(\mathcal{F}u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ naar $\mathcal{F}u$. □

Uit vergelijking (42) volgt dat voor een integreerbare functie f geldt dat

$$\mathcal{F}(\text{test} f) = \text{test}(\mathcal{F}f), \tag{45}$$

dus Fouriertransformatie op getemperde distributies is een uitbreiding van de eerdere definitie. Voor de Fouriertransformatie op getemperde distributies geldt dan ook dat het een bijectieve afbeelding van $\mathcal{S}'$ naar $\mathcal{S}'$ is, en dat dezelfde formules gelden als in lemmata 2.18 en 2.21, als convolutie en vermenigvuldigen met functies op de goede manier gedefinieerd worden, zie [1], hoofdstukken 9 en 11, Stelling 14.18 en Stelling 14.25. De vermenigvuldiging van een distributie met een functie wordt hierbij gegeven door:

Definitie 2.25. Zij u een distributie, en ϕ een oneindig vaak differentieerbare functie. Dan is het product van de distributie en de functie ook weer een distributie, gegeven door:

$$(\phi u)(\psi) = u(\phi\psi) \qquad\qquad (\psi \in C_0^\infty(X)). \tag{46}$$

We behandelen nog een aantal voorbeelden:

Voorbeeld 2.26. De Dirac deltadistributie is een getemperde distributie, dus we kunnen er de Fouriergetransformeerde van nemen. Dit is dan een getemperde distributie, gegeven door

$$(\mathcal{F}\delta)(\phi) = \delta(\mathcal{F}\phi) = (\mathcal{F}\phi)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\mathrm{d}x. \tag{47}$$

Dit komt precies overeen met de getemperde distributie die hoort bij de functie $f(x) = 1$, dus kunnen we schrijven dat $\mathcal{F}\delta = \mathrm{test}1$.

Voorbeeld 2.27. De formule voor inverse Fouriertransformatie kan met behulp van de spiegelingsoperator S, die een functie $x \to f(x)$ omzet in de functie $Sf : x \to f(-x)$, geschreven worden als

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^n} S \circ \mathcal{F}. \tag{48}$$

Deze formule breidt ook uit naar de distributies, omdat hij voor de Schwartzfuncties geldt, en de Fouriertransformatie op getemperde distributies hier een continue uitbreiding van is. Daaruit volgt dat de Fouriergetransformeerde van de distributie test1 gegeven wordt door

$$\mathcal{F}(\mathrm{test}1) = (2\pi)^n S\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{test}1) = (2\pi)^n S\delta = (2\pi)^n \delta. \tag{49}$$

Voorbeeld 2.28. Als we de functie $f(x) = x^n$, voor n een natuurlijk getal en $x \in \mathbb{R}$, bekijken als getemperde distributie, geldt hiervoor dat

$$\mathcal{F}(\mathrm{test}f) = \mathrm{i}^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n}(\mathcal{F}(\mathrm{test}1)) = 2\pi \mathrm{i}^n \delta^{(n)}. \tag{50}$$

3 Fractionele afgeleiden en integralen

In deze sectie bespreken we verschillende definities van fractionele afgeleiden en integralen, beginnend met de Riemann-Liouville fractionele integraal. Deze kan op 2 manieren worden uitgebreid naar fractionele afgeleiden, namelijk naar de Riemann-Liouville fractionele afgeleide en de Caputo fractionele afgeleide. Ook wordt een definitie met behulp van Fouriertransformaties behandeld.

3.1 Riemann-Liouville fractionele integralen

We volgen in deze subsectie voornamelijk de behandeling van [7], Sectie 2.3, maar er zijn voorbeelden toegevoegd en berekeningen en bewijzen worden in meer detail uitgewerkt.

Om het over een integraal van a tot x te hebben, is het nodig dat de functie integreerbaar is over dit interval. We bekijken hier functies van (a, ∞) naar $\mathbb{C}$. Om te garanderen dat een functie f integreerbaar is van a tot x voor elke $x > a$ moet de functie locaal integreerbaar zijn voor $x > a$, en moet er een $b > a$ bestaan zodat de integraal van a tot b convergeert.

Definitie 3.1. Een functie f heet *integreerbaar vanaf* a als hij locaal integreerbaar is in (a, ∞) en er een $b > a$ bestaat zodat de integraal $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ convergeert.

Als we $|f|$ kunnen afschatten op $c(x-a)^s$ voor $a < x < b$ voor een positieve c, een $b > a$ en een $s > -1$, kunnen we deze afschatting gebruiken om te laten zien dat de integraal van f over (a, b) convergeert. We definiëren de ruimte van deze functies:

Definitie 3.2. We schrijven $R^s_{loc}(a, \infty)$ voor de ruimte van locaal integreerbare functies $f : (a, \infty) \to \mathbb{C}$, zodat er een constante $c > 0$ en een constante $b > a$ bestaan, zodat $|f(x)| \le c(x - a)^s$ voor alle $a < x < b$. De vereniging van deze functieruimten over alle $s > -1$ wordt genoteerd met $R^*_{loc}(a, \infty)$.

Voor elke $f \in R^*_{loc}(a, \infty)$ geldt dan dat f integreerbaar vanaf a is. Om ook integralen vanaf $-\infty$ te kunnen nemen, formuleren we vergelijkbare definities:

Definitie 3.3. Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heet *integreerbaar vanaf* $-\infty$ als deze locaal integreerbaar is, en er een $b \in \mathbb{R}$ bestaat zodat de integraal van f over $(-\infty, b)$ convergeert.

Definitie 3.4. We schrijven $R^s_{loc}(\mathbb{R})$ voor de ruimte van locaal integreerbare functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zodat er constanten $c > 0$ en $b < 0$ bestaan, zodat $|f(x)| \le c(-x)^s$ voor $x < b$. De vereniging van deze ruimten over alle $s < -1$ wordt genoteerd met $R^-_{loc}(\mathbb{R})$.

In deze notatie gebruiken we de $-$ om aan te geven dat we nu dus naar $s < -1$ kijken. Voor de functies in $R^-_{loc}(\mathbb{R})$ geldt nu dat ze integreerbaar vanaf $-\infty$ zijn.

We gebruiken voor de gewone en fractionele integralen in deze sectie een vaste ondergrens. Dit stelt ons in staat om unieke primitieven van gehele orde te definiëren, die we zullen noteren met $f^{(-k)}(x)$, waarbij dus $f^{(0)}(x) = f(x)$ en $f^{(-k-1)}(x) = \int_a^x f^{(-k)}(t)\mathrm{d}t$.

Lemma 3.5. *Zij $a \in \mathbb{R}$ en f een functie die integreerbaar vanaf a is. Dan bestaat de primitieve van f, waarvan de integraal bij a begint.*

Bewijs. De functie f is locaal integreerbaar, dus de integraal van f convergeert op elk compacte interval $X \subset (a, \infty)$. We weten dat er een $b > a$ bestaat zodat de integraal convergeert over (a, b). Voor $x \ge b$ kunnen we dan de integraal over $(a, x]$ opsplitsen in de integraal over (a, b) en de integraal over het compacte interval $[b, x]$. Over elk van deze verzamelingen convergeert de integraal, dus door de integraal over deze twee verzamelingen op te splitsen volgt dus dat hij convergeert. Als $x < b$ kunnen we een analoog argument met het verschil van twee integralen gebruiken. $\square$

Analoog aan dit lemma geldt ook dat functies die integreerbaar vanaf $-\infty$ zijn een primitieve hebben, waarbij de ondergrens van de integraal in $-\infty$ ligt.

Als we de eerste drie primitieven van een functie f bepalen, kunnen we de tweede en derde orde primitieven door middel van verwisselen van integratievolgorde herschrijven naar:

$$\begin{aligned} f^{(-1)}(x) &= \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, && (51) \\ f^{(-2)}(x) &= \int_a^x \int_a^{t_1} f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}t_1 \\ &= \int_a^x \int_t^x f(t)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t \\ &= \int_a^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t, && (52) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(-3)}(x) &= \int_a^x f^{(-2)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_a^x \int_a^t (t-t_1)f(t_1)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t \\ &= \int_a^x \int_{t_1}^x (t-t_1)f(t_1)\mathrm{d}t\mathrm{d}t_1 \\ &= \int_a^x \frac{1}{2}(x-t_1)^2 f(t_1)\mathrm{d}t_1. && (53) \end{aligned}$$

Hierin zien we het patroon verschijnen van de Cauchy formule voor herhaald integreren:

Stelling 3.6. *Zij $a \in \mathbb{R}$. Voor een functie f die integreerbaar vanaf a is, bestaan de primitieven van gehele orde, gedefinieerd door herhaalde integralen vanaf a, en geldt de volgende formule:*

$$f^{(-n)}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)\mathrm{d}t \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{54}$$

Bewijs. Volgens Lemma 3.5 convergeert de integraal van f voor elke $x > a$. Elke integraal is continu, en in het punt a gelijk aan 0, dus is de integraal zelf weer integreerbaar vanaf a. Met inductie volgt dat alle primitieven van gehele orde bestaan. De integraal aan de rechterkant convergeert ook, omdat de integrand nog steeds integreerbaar vanaf a is. Immers, de integrand is het product van een locaal integreerbare functie en een continue functie, dus locaal integreerbaar, en de integraal van f over een interval (a, b) convergeerde, en de factor $(x-t)^{n-1}$ is rondom $t = a$ continu en dus begrensd, dus is $(x-t)^{n-1}f(t)$ integreerbaar over (a, b).

We bewijzen (54) met inductie. Voor $n = 1$ staat er dat $f^{(-1)}(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ en dat is precies de definitie van de primitieve.

Stel nu dat (54) geldt voor $n = k$. Dan geldt voor $n = k + 1$ dat

$$\begin{aligned}
f^{(-k-1)}(x) &= \int_a^x f^{(-k)}(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_a^x \int_a^t \frac{1}{(n-1)!}(t-t_1)^{n-1} f(t_1)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t \\
&= \int_a^x \int_{t_1}^x \frac{1}{(n-1)!}(t-t_1)^{n-1} f(t_1)\mathrm{d}t\mathrm{d}t_1 \\
&= \int_a^x \frac{1}{n!}(x-t_1)^n f(t_1)\mathrm{d}t_1. \qquad (55)
\end{aligned}$$

Hiermee is de inductiestap voltooid, dus kunnen we concluderen dat de formule inderdaad voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt. $\square$

De Cauchy formule voor primitieven kan gegeneraliseerd worden naar willekeurige positieve orde door de faculteit te vervangen door de Gamma-functie. Dit levert de volgende definitie:

Definitie 3.7 (Riemann-Liouville fractionele integraal ([7], vergelijking (2.88)))**.** Zij $a \in \mathbb{R}$ en $f : (a, \infty) \to \mathbb{C}$ een functie die integreerbaar vanaf a is. De *Riemann-Liouville fractionele integraal* van orde $p > 0$ van f, genoteerd met ${}_a\mathbf{D}_x^{-p} f(x)$, is een functie van (a, ∞) naar $\mathbb{C}$, en wordt gegeven door

$$ {}_a\mathbf{D}_x^{-p} f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^x (x-t)^{p-1} f(t)\mathrm{d}t. \qquad (56)$$

Zolang de limiet van a naar $-\infty$ convergeert, noteren we

$$ {}_{-\infty}\mathbf{D}_x^{-p} f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{p-1} f(t)\mathrm{d}t. \qquad (57)$$

De eis dat $p > 0$ is nodig om te zorgen dat de factor $(x-t)^{p-1}$ niet de integrand te snel laat divergeren rondom $t = x$, waardoor de integraal ook zou divergeren. Als $p > 0$, dan convergeert de integraal daadwerkelijk, omdat de integrand locaal integreerbaar is op (a, x), en rondom a is $(x-t)^{p-1}$ begrensd en konden we f integreren, rondom x gaat $(x-t)^{p-1}$ langzamer dan $(x-t)^{-1}$ naar oneindig, terwijl f locaal integreerbaar was, dus beide uiteinden leveren geen problemen op. Als p geheel is, krijgen we met $\Gamma(n) = (n-1)!$ weer de oorspronkelijke formule terug,

$$\begin{aligned}
{}_a\mathbf{D}_x^{-n} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\mathrm{d}t \\
&= f^{(-n)}(x). \qquad (58)
\end{aligned}$$

Voor de integralen vanaf $-\infty$ is een voldoende (maar niet noodzakelijke) eis om te zorgen dat de limiet van a naar $-\infty$ bestaat, dat $f \in R^s_{loc}(\mathbb{R})$ voor een $s < -p$. Met $p = 1$ zien we dus precies de ruimte $R^-_{loc}(\mathbb{R})$ terug.

We berekenen een aantal voorbeelden:

Voorbeeld 3.8. We bepalen de fractionele integraal van de functie $f : x \to (x-a)^q$ met $q > -1$. Deze eis op q garandeert dat de functie integreerbaar is vanaf a, immers $f \in R^q_{loc}(a, \infty)$. Door middel van de substitutie $s = \frac{t-a}{x-a}, t = (x-a)s + a$ in de integraal kunnen we het herschrijven naar de Beta-functie:

$$\begin{aligned}
{}_a\mathbf{D}_x^{-p}(x-a)^q &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^x (x-t)^{p-1}(t-a)^q \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 (x-a-(x-a)s)^{p-1}((x-a)s)^q (x-a)\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)}(x-a)^{p+q} \int_0^1 (1-s)^{p-1} s^q \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)}(x-a)^{p+q} B(q+1,p) = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)}(x-a)^{p+q}. \qquad (59)
\end{aligned}$$

Dit is een generalisatie van dezelfde formule voor integralen van gehele orde.

Voorbeeld 3.9. We bepalen de fractionele integraal van de functie $f : x \to \mathrm{e}^{bx}$ met beginpunt $a = -\infty$ en $b > 0$. Omdat $b > 0$ gaat de functie f dusdanig snel naar 0 als x naar $-\infty$ gaat, dat $f \in R^s_{loc}(\mathbb{R})$ voor elke $s \in \mathbb{R}$, dus de integraal convergeert altijd. Door de substitutie $s = b(x-t)$ uit te voeren, kunnen we de integraal herschrijven naar de Gamma-functie, dit levert

$$\begin{aligned}
{}_{-\infty}\mathbf{D}_x^{-p}\mathrm{e}^{bx} &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{p-1}\mathrm{e}^{bt}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{1}{b^p} s^{p-1} \mathrm{e}^{bx-s}\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)b^p}\mathrm{e}^{bx} \int_0^\infty s^{p-1}\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s = \frac{1}{b^p}\mathrm{e}^{bx}, \qquad (60)
\end{aligned}$$

wat een generalisatie van de gebruikelijke formule is, namelijk

$$f^{(-k)}(x) = \frac{1}{b^k}\mathrm{e}^{bx}.$$

We ronden deze subsectie af met het bewijs van vier eigenschappen van deze fractionele integralen.

Stelling 3.10 (([7]), (2.99) en verder)**.** *Voor alle* $p, q > 0$ *en* $x > a$ *geldt dat* ${}_a\boldsymbol{D}_x^{-p}\,{}_a\boldsymbol{D}_x^{-q} = {}_a\boldsymbol{D}_x^{-p-q}$

Bewijs. We berekenen de samenstelling van de operatoren, toegepast op een functie f, door middel van verwisselen van de integratievolgorde en resultaat (59):

$$\begin{aligned}
{}_a\mathbf{D}_x^{-p}({}_a\mathbf{D}_x^{-q}f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^x (x-t)^{p-1}\frac{1}{\Gamma(q)}\int_a^t (t-s)^{q-1}f(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_a^x f(s)\int_s^x (x-t)^{p-1}(t-s)^{q-1}\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_a^x (x-s)^{p+q-1}f(s)\mathrm{d}s \\
&= {}_a\mathbf{D}_x^{-p-q}f(x).
\end{aligned}$$

□

Stelling 3.11 ([7], (2.89) en verder)**.** *Als f continu is op het interval $[a,\infty)$, dan geldt voor alle $x > a$*

$$\lim_{p\downarrow 0} {}_a\mathbf{D}_x^{-p}f(x) = f(x).$$

Bewijs. We bewijzen dit voor het gemakkelijkere geval waarin f continu differentieerbaar is, voor het algemene geval verwijzen we naar [7], vanaf vergelijking (2.89) in paragraaf 2.3.2.

Omdat f continu differentieerbaar is, kunnen we partieel integreren en krijgen we

$$ {}_a\mathbf{D}_x^{-p}f(x) = \frac{(x-a)^p f(a)}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^x (x-t)^p f'(t)\mathrm{d}t.$$

Hierin kunnen we de limiet nemen om direct te krijgen dat

$$\lim_{p\downarrow 0} {}_a\mathbf{D}_x^{-p}f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x).$$

□

Stelling 3.12. *Zij k een natuurlijk getal en f een k maal differentieerbare functie, met een k-de afgeleide die integreerbaar vanaf a is. Dan is voor $p > 0$ de fractionele integraal ${}_a\boldsymbol{D}_x^{-p}f(x)$ ook k maal differentieerbaar.*

Bewijs. Met behulp van partieel integreren vinden we weer dat

$$ {}_a\mathbf{D}_x^{-p}f(x) = \frac{(x-a)^p f(a)}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^x (x-t)^p f'(t)\mathrm{d}t. \tag{61}$$

De afgeleide hiervan is

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left({}_a\mathbf{D}_x^{-p}f(x)\right) &= \frac{(x-a)^{p-1}f(a)}{\Gamma(p)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)}0^p f'(x) + \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^x (x-t)^{p-1}f'(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{(x-a)^{p-1}f(a)}{\Gamma(p)} + {}_a\mathbf{D}_x^{-p}f'(x). \qquad (62)
\end{aligned}$$

Omdat de eerste term aan de rechterkant oneindig vaak differentieerbaar is, en f' een $k-1$ maal differentieerbare functie is met een $(k-1)$-de afgeleide die integreerbaar vanaf a is, volgt nu met inductie dat ${}_a\mathbf{D}_x^{-p}f(x)$ inderdaad k maal differentieerbaar is. □

Stelling 3.13. *Zij k een natuurlijk getal en $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een k maal differentieerbare functie. Zij $p > 0$ zodat voor alle $0 \leq m \leq k$ geldt dat $f^{(m)} \in R^s_{loc}(\mathbb{R})$ voor een $s < -p-1$. Dan is ${}_a\boldsymbol{D}_x^{-p} f(x)$ ook k keer differentieerbaar.*

Bewijs. Het bewijs gaat analoog aan het bewijs van Stelling 3.12, waarbij de extra eisen op f garanderen dat alle gebruikte fractionele integralen bestaan, en dat de randterm bij het partieel integreren naar 0 gaat. □

3.2 Caputo en Riemann-Liouville fractionele afgeleiden

In dit onderdeel wordt de definitie van fractionele integralen op twee verschillende manieren uitgebreid naar fractionele afgeleiden. We volgen de definities en notaties van [7], maar de structuur van de presentatie is aangepast, en er zijn voorbeelden toegevoegd.

Bovenstaande definitie van de fractionele integraal is alleen toepasbaar voor positieve orde p van de integraal, en dus negatieve orde $-p$ van de differentiaaloperator. We hebben in Stelling 3.10 aangetoond dat voor fractionele integralen geldt dat de ordes optellen, en voor normale afgeleiden weten we ook dat $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} f(x)) = \frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}} f(x)$. Deze relaties breiden we nu op twee verschillende manieren uit, als eerste door de eerste afgeleide positieve gehele orde te geven, en de tweede een negatieve orde:

Definitie 3.14 (Riemann-Liouville fractionele afgeleide)**.** Zij $k \in \mathbb{N}$ en $0 < \alpha \leq 1$. Zij $f : (a, \infty) \to \mathbb{C}$ een k maal differentieerbare functie waarvan de k-de afgeleide integreerbaar vanaf a is. De *Riemann-Liouville fractionele afgeleide* van f, van orde $k - \alpha$ wordt dan gegeven door

$$ {}_a\mathbf{D}_x^{k-\alpha} f(x) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}({}_a\mathbf{D}_x^{-\alpha} f(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\mathrm{d}t. \tag{63}$$

Als we $p = k - \alpha$ schrijven, geldt dus voor $x > a$ dat

$$ {}_a\mathbf{D}_x^{p} f(x) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}({}_a\mathbf{D}_x^{p-k} f(x)) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \int_a^x (x-t)^{k-p-1} f(t)\mathrm{d}t \qquad (k-1 = \lfloor p \rfloor). \tag{64}$$

Wederom kunnen we de limiet van a naar $-\infty$ nemen, zolang deze bestaat.

Voor functies die niet noodzakelijk k keer differentieerbaar zijn, met k-de afgeleide integreerbaar vanaf a kunnen we alsnog van de Riemann-Liouville fractionele afgeleide spreken, zolang de formule een resultaat oplevert.

De afgeleide van de fractionele integraal bestaat vanwege Stelling 3.12. Als de functie aan de eisen van Stelling 3.13 voldoet kunnen we gegarandeerd de limiet van a naar $-\infty$ nemen. In deze definitie kiezen we $0 < \alpha \leq 1$, maar voor het convergeren van de integraal is alleen nodig dat $0 < \alpha$. Het resultaat van de integraal hangt echter niet direct af van de keuze van α en k, alleen van de waarde van $k - \alpha$. Immers, als we zowel k als α met een geheel getal n ophogen, kunnen we Stelling 3.10 gebruiken en combineren met het feit dat voor gehele $p = n$ de fractionele integraal overeenkomt met de gewone herhaalde integraal om deze extra afgeleiden en integralen tegen elkaar weg te laten vallen (immers, ${}_a\mathbf{D}_x^{-\alpha} f(x)$ is continu):

$$ {}_a\mathbf{D}_x^{(k+n)-(\alpha+n)} f(x) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}({}_a\mathbf{D}_x^{-n}({}_a\mathbf{D}_x^{-\alpha} f(x)))\right) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}({}_a\mathbf{D}_x^{-\alpha} f(x)) = {}_a\mathbf{D}_x^{k-\alpha} f(x). \tag{65}$$

We hebben dus voor het berekenen van de afgeleiden de vrijheid om α en k met gehele getallen op te hogen, dus in de tweede formule kunnen we elke gehele $k > p$ kiezen. Verder geldt als we $p = n$ geheel kiezen dat we $k = n+1$ krijgen, wat het volgende resultaat geeft:

$$ {}_a\mathbf{D}_x^n f(x) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}({}_a\mathbf{D}_x^{-1} f(x)) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(f^{(-1)}(x)) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x). \tag{66}$$

Dus voor gehele p reduceert deze definitie weer tot de gewone definitie van de afgeleiden.

Voor de tweede definitie nemen we de eerste afgeleide van negatieve orde, en de tweede van positieve gehele orde:

Definitie 3.15 (Caputo fractionele afgeleide)**.** Zij $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$ en zij $f : (a, \infty) \to \mathbb{C}$ een functie die k maal differentieerbaar is, met een k-de afgeleide die integreerbaar vanaf a is. De *Caputo fractionele afgeleide* van f van orde $k - \alpha$ is dan

$$ {}_a^C\mathrm{D}_x^{k-\alpha} f(x) = {}_a\mathbf{D}_x^{-\alpha} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f^{(k)}(t)\mathrm{d}t. \tag{67}$$

Met $p = k - \alpha$ geldt dus, voor $x > a$,

$$ {}_a^C\mathrm{D}_x^{p} f(x) = {}_a\mathbf{D}_x^{p-k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(x) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \int_a^x (x-t)^{k-p-1} f^{(k)}(t)\mathrm{d}t \qquad (k-1 = \lfloor p \rfloor). \tag{68}$$

Ook hier kunnen we weer a naar $-\infty$ laten gaan, zolang de integraal blijft convergeren.

Voor deze definitie hebben we $0 < \alpha < 1$ genomen, en dit keer is dit wel belangrijk voor de uitkomst van de fractionele afgeleide. Als we bijvoorbeeld k en α allebei met 1 ophogen, levert dit in het geval dat $f \in C^{k+1}$ dat

$$\begin{aligned} {}_a^C\mathrm{D}_x^{(k+1)-(\alpha+1)} f(x) &= {}_a\mathbf{D}_x^{-\alpha} \int_a^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}t^k}\right)\mathrm{d}t = {}_a\mathbf{D}_x^{-\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(x) - \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(a)\right) \\ &= {}_a^C\mathrm{D}_x^{k-\alpha} f(x) - {}_a\mathbf{D}_x^{-\alpha}(\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(a)) \\ &= {}_a^C\mathrm{D}_x^{k-\alpha} f(x) - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^\alpha f^{(k)}(a) \end{aligned} \tag{69}$$

en dat is alleen hetzelfde als ${}_a^C\mathrm{D}_x^{k-\alpha} f(x)$ wanneer $\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(a) = 0$. Voor grotere verhogingen van k en α gelden vergelijkbare eisen. De reden dat we $\alpha \neq 1$ kiezen, is omdat we voor $\alpha = 1$ niet altijd de gewone afgeleiden terugvinden, tenzij de betreffende afgeleide 0 is in het punt $x = a$. Wat wel geldt is de volgende formule:

Stelling 3.16 ([7], pagina 79)**.** *Zij $n \in \mathbb{N}$ en $f : (a,\infty) \to \mathbb{C}$ een functie in $C^{n+1}(a,\infty)$. Dan geldt voor $x > a$ dat*

$$\lim_{p\uparrow n} {}_a^C\mathrm{D}_x^p f(x) = f^{(n)}(x) \tag{70}$$

Bewijs. Door middel van partieel integreren vinden we voor $n-1 < p < n$ dat

$$\begin{aligned} {}_a^C\mathrm{D}_x^p f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^x (x-t)^{n-p-1} f^{(n)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^{n-p}}{\Gamma(n-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p+1)} \int_a^x (x-t)^{n-p} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{71}$$

en hierin kunnen we direct de limiet nemen om te krijgen dat

$$\lim_{p\uparrow n} {}_a^C\mathrm{D}_x^p f(x) = f^{(n)}(a) + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = f^{(n)}(x) \tag{72}$$

□

Als we p omlaag naar een geheel getal laten naderen, komt er weer alleen de gebruikelijke afgeleide uit als deze 0 is in $x = a$:

$$\begin{aligned} \lim_{p\downarrow n} {}_a^C\mathrm{D}_x^p f(x) &= \lim_{p\downarrow n} \frac{1}{\Gamma(n-p+1)} \int_a^x (x-t)^{n-p} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_a^x f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a). \end{aligned} \tag{73}$$

We berekenen een paar voorbeelden:

Voorbeeld 3.17*.* We beginnen met een constante functie, $f : x \to c$. De twee afgeleiden hiervan zijn, voor elke $p > 0$:

$$\begin{aligned} {}_a\mathbf{D}_x^p c &= \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \int_a^x (x-t)^{k-p-1} c \;\mathrm{d}t = \frac{c}{\Gamma(k-p+1)} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} (x-a)^{k-p} \\ &= \frac{(x-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)}, \end{aligned} \tag{74}$$

$$ {}_a^C\mathrm{D}_x^p c = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \int_a^x (x-t)^{k-p-1} 0 \;\mathrm{d}t = 0. \tag{75}$$

We zien dus dat in het geval van de Caputo fractionele afgeleide geldt dat elke afgeleide van een constante 0 is, net als bij gewone afgeleiden. In het geval van de Riemann-Liouville fractionele afgeleide geldt dit alleen als de orde van de afgeleide geheel is. Immers, dan is $1 - p$ een niet-positief geheel getal en dan gaat de Gamma-functie naar oneindig.

Voorbeeld 3.18. We bekijken de functie $f : x \to (x-a)^q$. Voor de Caputo afgeleide hebben we nodig dat de k-de afgeleide integreerbaar vanaf a is, dus daar moet $q - k > -1$ zijn, dus $q > k - 1$, dus $q > \lfloor p \rfloor$. Omdat we bij de Riemann-Liouville afgeleide beginnen met een fractionele integraal, hebben we voor het convergeren van de integraal alleen nodig dat $q > -1$, en dit blijkt ook een k keer differentieerbare functie op te leveren, dus hier kunnen we q kleiner laten worden dan bij de Caputo fractionele afgeleide. We vinden dan de volgende resultaten, met behulp van (59):

$$\begin{aligned}
{}_a\mathbf{D}_x^p (x-a)^q &= \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \int_a^x (x-t)^{k-p-1} (t-a)^q \mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(k-p+q+1)} (x-a)^{k-p+q} \\
&= \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-p+1)} (x-a)^{q-p} \qquad (p > 0, q > -1), \qquad (76) \\
{}_a^C\mathrm{D}_x^p (x-a)^q &= \frac{1}{\Gamma(k-p)} \int_a^x (x-t)^{k-p-1} \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1-k)} (t-a)^{q-k} \mathrm{d}t \\
&= \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-p+1)} (x-a)^{q-p} \qquad (p > 0, q > \lfloor p \rfloor). \qquad (77)
\end{aligned}$$

We zien dus dat in beide gevallen hetzelfde resultaat geldt, maar onder verschillende voorwaarden.

Voorbeeld 3.19. We bekijken weer de functie $f : x \to \mathrm{e}^{bx}$ met $b > 0$, en we nemen weer $a = -\infty$ als ondergrens. Omdat $f \in R_{loc}^s(\mathbb{R})$ voor elke $s \in \mathbb{R}$ en omdat de functie willekeurig vaak differentieerbaar is, bestaat elke fractionele afgeleide hiervan. Met behulp van vergelijking (60) vinden we dan, voor $p > 0$,

$$\begin{aligned}
{}_{-\infty}\mathbf{D}_x^p e^{bx} &= \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \int_{-\infty}^x (x-t)^{k-p-1} \mathrm{e}^{bt} \mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} b^{p-k} \mathrm{e}^{bx} = b^p \mathrm{e}^{bx}, \qquad (78) \\
{}_{-\infty}^{\ C}\mathrm{D}_x^p e^{bx} &= \frac{1}{\Gamma(k-p)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{k-p-1} b^k \mathrm{e}^{bt} \mathrm{d}t \\
&= b^p \mathrm{e}^{bx}. \qquad (79)
\end{aligned}$$

In dit voorbeeld zien we dus dat beide afgeleiden hetzelfde zijn.

We sluiten deze sectie af met een aantal stellingen over eigenschappen van de twee fractionele afgeleiden.

Stelling 3.20. *Zij f een continue functie en zij $p > 0$. Dan is*

$$ {}_a\mathbf{D}_x^p ({}_a\mathbf{D}_x^{-p} f(x)) = f(x). \qquad (80)$$

Bewijs. We weten al dat de stelling geldt voor gehele orde afgeleiden en integralen. Als we nu $k-1 = \lfloor p \rfloor$ schrijven, en Stelling 3.10 gebruiken, vinden we

$$\begin{aligned}
{}_a\mathbf{D}_x^p({}_a\mathbf{D}_x^{-p}f(x)) &= \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}({}_a\mathbf{D}_x^{p-k}({}_a\mathbf{D}_x^{-p}f(x))) \\
&= \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}({}_a\mathbf{D}_x^{-k}f(x)) = f(x). \qquad \square
\end{aligned}$$

Uit deze stelling volgt de volgende stelling:

Stelling 3.21. *Zij $p > 0$ en $q > 0$ en f een functie waarvoor ${}_a\mathbf{D}_x^{p-q}f(x)$ bestaat. Dan geldt*

$$ {}_a\mathbf{D}_x^p({}_a\mathbf{D}_x^{-q}f(x)) = {}_a\mathbf{D}_x^{p-q}f(x), \tag{81}$$

waarbij we ${}_a\mathbf{D}_x^0 f(x) = f(x)$ nemen.

Bewijs. We maken een onderscheid tussen de gevallen $p = q$, $p > q$ en $p < q$. Voor $p = q$ volgt het direct uit de vorige stelling. Als $p > q$ kunnen we $m - 1 = \lfloor p \rfloor$ en $n - 1 = \lfloor p - q \rfloor$ schrijven, met dus $m \geq n$. Gebruikmakend van Stelling 3.10 en het feit dat gewone afgeleiden en integralen tegen elkaar wegvallen vinden we

$$\begin{aligned}
{}_a\mathbf{D}_x^p({}_a\mathbf{D}_x^{-q}f(x)) &= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}({}_a\mathbf{D}_x^{-(m-p)}({}_a\mathbf{D}_x^{-q}f(x))) \\
&= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}({}_a\mathbf{D}_x^{-(m-p-q)}f(x)) \\
&= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{\mathrm{d}^{m-n}}{\mathrm{d}x^{m-n}}({}_a\mathbf{D}_x^{-(m-n)}\,{}_a\mathbf{D}_x^{-(n-p-q)}f(x)) \\
&= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}({}_a\mathbf{D}_x^{-(n-p-q)}f(x)) = {}_a\mathbf{D}_x^{p-q}f(x).
\end{aligned} \tag{82}$$

In het geval dat $p < q$ kunnen we Stelling 3.10 en bovenstaande stelling gebruiken om te krijgen dat

$$ {}_a\mathbf{D}_x^p({}_a\mathbf{D}_x^{-q}f(x)) = {}_a\mathbf{D}_x^p({}_a\mathbf{D}_x^{-p}({}_a\mathbf{D}_x^{-(q-p)}f(x))) = {}_a\mathbf{D}_x^{p-q}f(x). \qquad \square$$

De volgende stellingen geven voorwaarden waaronder de twee afgeleiden hetzelfde zijn:

Stelling 3.22. *Zij $p > 0$ niet-geheel, $k-1 = \lfloor p \rfloor$ en $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een k maal differentieerbare functie, zodat voor alle $0 \leq m \leq k$ geldt dat er een $s < p - k$ bestaat zodat $f^{(m)} \in R^s_{loc}(\mathbb{R})$. Dan geldt dat*

$$ {}_{-\infty}\mathbf{D}_x^p f(x) = {}_{-\infty}^{\;\;C}\mathrm{D}_x^p f(x). \tag{83}$$

Bewijs. De eisen op de functie en zijn afgeleiden garanderen dat de fractionele integraal van orde $k - p$ van f en alle afgeleiden tot en met k-de orde bestaan. Verder convergeren de functie en zijn afgeleiden ook allemaal naar 0 als x naar $-\infty$ gaat. Hiermee kunnen we f herschrijven naar

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} f'(t)\mathrm{d}t. \tag{84}$$

Door dit te gebruiken, vinden we

$$\begin{aligned} {}_{-\infty}\mathbf{D}_x^p f(x) &= \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} {}_{-\infty}\mathbf{D}_x^{p-k}({}_{-\infty}\mathbf{D}_x^{-1} f'(x)) \\ &= \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} {}_{-\infty}\mathbf{D}_x^{-1}({}_{-\infty}\mathbf{D}_x^{p-k} f'(x)) \\ &= \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}} {}_{-\infty}\mathbf{D}_x^{p-k} f'(x). \end{aligned} \tag{85}$$

Hierbij is gebruik gemaakt van Stelling 3.10 om de twee integralen om te wisselen. Door deze stap nu k keer te herhalen, vinden we

$${}_{-\infty}\mathbf{D}_x^p f(x) = {}_{-\infty}\mathbf{D}_x^{p-k} f^{(k)}(x) = {}_{-\infty}^{\;C}\mathrm{D}_x^p f(x). \tag{86}$$

□

Stelling 3.23. *Zij $f : [a, \infty) \to \mathbb{C}$ een k maal differentieerbare functie, met k-de afgeleide integreerbaar vanaf a, zodat voor alle $0 \leq m \leq k$ geldt dat $f^{(m)}(a) = 0$. Dan geldt voor $x > a$ dat*

$${}_a\mathbf{D}_x^p f(x) = {}_a^C\mathrm{D}_x^p f(x). \tag{87}$$

Bewijs. Dit bewijs gaat analoog aan Stelling 3.22, waarbij nu de eigenschap $f^{(m)}(a) = 0$ gebruikt wordt om $f(x) = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$ te kunnen gebruiken. □

3.3 Fourier fractionele afgeleiden

We hebben in Lemma 2.18 gezien dat voor afgeleiden van gehele orde geldt dat $\mathcal{F}(\partial^\alpha \phi) = (\mathrm{i}\xi)^\alpha(\mathcal{F}\phi)$ voor elke multi-index α en elke Schwartzfunctie ϕ. Dezelfde formule geldt ook voor getemperde distributies. Deze formule zullen we nu uitbreiden naar niet-gehele orde. We noemen deze fractionele afgeleide de Fourier fractionele afgeleide.

Definitie 3.24 (Fourier fractionele afgeleide)**.** Zij $f \in \mathcal{S}$ een Schwartzfunctie van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{C}$. Dan is de *Fourier fractionele afgeleide* van f, van ordes gegeven door de multi-index α, met elke $\alpha_j > -1$, maar niet noodzakelijk geheel, gegeven door

$$\partial^\alpha f(x) = \mathcal{F}^{-1}((\mathrm{i}\xi)^\alpha(\mathcal{F}f)(\xi)). \tag{88}$$

Dit kunnen we expliciet uitwerken tot

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}(\mathrm{i}\xi)^\alpha(\mathcal{F}f)(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{89}$$

In deze definitie wordt de notatie $(\mathrm{i}\xi)^\alpha$ gebruikt, deze staat voor

$$\prod_{j=1}^{n}(\mathrm{i}\xi)^{\alpha_j}. \tag{90}$$

In het geval van gehele-orde afgeleiden was dit al welgedefinieerd, maar nu moeten we hierin specificeren wat er met $(\mathrm{i}\xi)^a$ bedoeld wordt voor a eventueel niet-geheel. We kiezen er hier voor om dit de waarde te geven met norm gegeven door $|\xi|^a$ en argument gegeven door a keer het argument van $\mathrm{i}\xi$, wat gelijk is aan $\frac{\pi}{2}$ voor $\xi > 0$ of $-\frac{\pi}{2}$ voor $\xi < 0$.

Een probleem aan deze definitie is dat het vermenigvuldigen met $(\mathrm{i}\xi)^\alpha$ voor niet-gehele orden ervoor zorgt dat de functie $(\mathrm{i}\xi)^\alpha(\mathcal{F}f)(\xi)$ niet noodzakelijk meer een Schwartzfunctie is. Immers, als $(\mathcal{F}f)(0) \neq 0$, is de functie in een omgeving van 0 ongelijk aan 0. Als de orde α_j niet geheel is, dan levert de partiële afgeleide naar ξ_j van orde $\lceil \alpha_j \rceil$ onder andere een term van de vorm $C\left(\prod_{k\neq j}(\mathrm{i}\xi_k)^{\alpha_k}\right)\mathrm{i}^{\alpha_j}\xi_j^{\alpha_j-\lceil\alpha_j\rceil}(\mathcal{F}f)(\xi)$. Deze term is niet begrensd, want als ξ_j naar nul gaat, gaat de factor $\xi_j^{\alpha_j-\lceil\alpha_j\rceil}$ naar oneindig, terwijl er niets naar nul gaat om dit te compenseren. De functie blijft wel altijd integreerbaar, omdat hij nog steeds snel genoeg daalt als de coördinaten naar oneindig gaan, en omdat elke factor $\xi_j^{\alpha_j}$ een macht van meer dan -1 heeft, dus we kunnen altijd nog de formule voor inverse Fouriertransformatie toepassen. We moeten dus wel oppassen dat het resultaat van de fractionele afgeleide geen Schwartzfunctie meer is, zodat eigenschappen hiervan niet meer gebruikt kunnen worden.

We formuleren nu de volgende continuïteitseigenschap van de Fourier fractionele afgeleide:

Stelling 3.25. *Zij f een Schwartzfunctie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{C}$. Dan is de Fourier fractionele afgeleide van orde k van f continu als functie van k en x voor $k > -1$ en $x \in \mathbb{R}$. Hierbij is de continuïteit als functie van k uniform over x, dat wil zeggen dat er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat, zodat als $|k - k'| < \delta$, dan $|\partial^k f(x) - \partial^{k'} f(x)| < \epsilon$, waarbij δ niet van x afhangt.*

Bewijs. Om aan te tonen dat de functie $g(k, x) = \partial^k f(x)$ continu is, gaan we majorantie gebruiken. Er geldt dat

$$g(k, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}(\mathrm{i}\xi)^k(\mathcal{F}f)(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{91}$$

We splitsen deze integraal op in een stuk waar $|\xi| < 1$ en een stuk waar $|\xi| \geq 1$. We gaan er voor nu van uit dat k in een interval (k_0, k_1) ligt, met $k_0 > -1$ en $k_1 > k_0$. Het deel van de integraal met $-1 < \xi < 1$ kan dan gemajoreerd worden door de integreerbare functie

$$h(\xi) = |\xi|^{k_0}|(\mathcal{F}f)(\xi)|$$

en het deel met $|\xi| \geq 1$ kan gemajoreerd worden door de integreerbare functie

$$j(\xi) = |\xi|^{k_1}|(\mathcal{F}f)(\xi)|.$$

Als we de integraal over ξ met $|\xi| < 1$ nog opsplitsen in een integraal van -1 tot 0 en een integraal van 0 tot 1, zijn de integranden continu op elk interval. Met behulp van het majorantiecriterium volgt hieruit dat de drie delen van de integraal continu zijn als functie van (k, x), dus de som ervan is ook continu als functie van (k, x). Dit hebben we nu aangetoond voor k op het interval (k_0, k_1), maar omdat $k_0 > -1$ en $k_1 > k_0$ willekeurig zijn, volgt hieruit dat $g(k, x)$ continu is voor alle $k > -1$ en alle x.

De continuïteit als functie van k is uniform over x, omdat we voor elke x het verschil $|g(k, x) - g(k', x)|$ kunnen afschatten met de integraal

$$|g(k,x) - g(k',x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |(\mathrm{i}\xi)^k - (\mathrm{i}\xi)^{k'}||(\mathcal{F}f)(\xi)|\mathrm{d}\xi.$$

Als we weer uitgaan van $k, k' \in (k_0, k_1)$ kunnen we gebruik maken van $|(\mathrm{i}\xi)^k - (\mathrm{i}\xi)^{k'}| \leq 2|\xi|^{\max(k,k')} \leq 2|\xi|^{k_1}$ voor $\xi \geq 1$ en $|(\mathrm{i}\xi)^k - (\mathrm{i}\xi)^{k'}| \leq 2|\xi|^{\min(k,k')} \leq 2|\xi|^{k_0}$ voor $\xi < 1$. Aangezien de functies $2|\xi|^{k_1}|(\mathcal{F}f)(\xi)|$ en $2|\xi|^{k_0}|(\mathcal{F}f)(\xi)|$ integreerbaar zijn op $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ en $(-1, 1)$ respectievelijk, volgt met het majorantiekenmerk dat deze integraal continu is als functie van (k, k'). Als we het punt (k, k) invullen, komt er 0 uit, dus uit de continuïteit volgt dat er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ is, zodat uit $|k-k'| < \delta$ volgt dat $|(k, k')-(k, k)| < \delta$ en dus

$$\int_{\mathbb{R}} |(\mathrm{i}\xi)^k - (\mathrm{i}\xi)^{k'}||(\mathcal{F}f)(\xi)|\mathrm{d}\xi < \epsilon,$$

dus

$$|g(k,x) - g(k',x)| < \epsilon. \tag{92}$$

Hierbij is dus de δ onafhankelijk van x gekozen. □

Ook voor deze fractionele afgeleide geldt dat de operator commuteert:

Stelling 3.26. *Voor elke Schwartzfunctie f van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{C}$ en elke $p, q > -1$ met $p+q > -1$ geldt dat*

$$\partial^p \partial^q f(x) = \partial^{p+q} f(x), \tag{93}$$

waarbij voor ∂^p de formule (89) wordt toegepast alsof $\partial^q f(x)$ een Schwartzfunctie is, aangezien de Fouriertransformatie en inverse Fouriertransformatie ook betekenis hebben voor functies die alleen maar continu en integreerbaar zijn.

Bewijs. Als we $\partial^q f$ uitschrijven als $\mathcal{F}^{-1}((\mathrm{i}\xi)^q(\mathcal{F}f)(\xi))$, en ∂^p vergelijkbaar, volgt dat

$$\partial^p \partial^q f = \mathcal{F}^{-1}((\mathrm{i}\xi)^p \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}((\mathrm{i}\xi)^q(\mathcal{F}f)(\xi)))) = \mathcal{F}^{-1}((\mathrm{i}\xi)^{p+q}(\mathcal{F}f)(\xi)) = \partial^{p+q} f. \qquad \square$$

In bovenstaande stelling zien we onder andere dat de formule voor de Fourier fractionele afgeleide kan worden uitgebreid naar continue integreerbare functies f, zolang $(\mathrm{i}\xi)^p(\mathcal{F}f)(\xi)$ integreerbaar blijft. We kunnen de definitie ook uitbreiden naar getemperde distributies:

Definitie 3.27. Zij u een getemperde distributie. Dan is de Fourier fractionele afgeleide van orde $p > -1$ gegeven door

$$\partial^p u = \mathcal{F}^{-1}((\mathrm{i}\xi)^p(\mathcal{F}u)), \tag{94}$$

zolang de rechterkant welgedefinieerd is.

In deze definitie vermenigvuldigen we een distributie met een functie, op de manier zoals in Definitie 2.25 gedefinieerd is voor het vermenigvuldigen van een distributie, die niet noodzakelijk getemperd hoefde te zijn, en een oneindig vaak differentieerbare functie. Dit vermenigvuldigen kan op twee manieren verkeerd gaan: de functie $\xi \to (\mathrm{i}\xi)^p$ is niet oneindig vaak differentieerbaar in $\xi = 0$, dus distributies die van de afgeleiden in de oorsprong afhangen leveren problemen op. Als $p < 0$ is de functie zelfs niet gedefinieerd in $\xi = 0$, dus dit kan ook problemen opleveren. Iets wat een probleem lijkt te zijn, is het feit dat het resultaat van de vermenigvuldiging een distributie is, en niet noodzakelijk een getemperde distributie, maar dit probleem blijkt mee te vallen: voor elke Schwartzfunctie ϕ waar we $(\mathrm{i}\xi)^p(\mathcal{F}u)$ op willen toepassen, geldt dat $(\mathrm{i}\xi)^p\phi$ nog steeds snel afnemend is, waarbij voor $p < 0$ een omgeving van de oorsprong weggelaten moet worden. Dit zorgt ervoor dat getemperde distributies die van integralen afhangen, zoals test$f$ voor continue functies f, nog steeds resultaten blijven opleveren.

We behandelen twee voorbeelden waar het goed gaat, en één waar het niet goed gaat:

Voorbeeld 3.28. We bepalen de fractionele afgeleiden van de distributie test $\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}$ met a reëel. Als we met δ_a de verschoven Dirac deltadistributie noteren, gegeven door $\delta_a(\phi) = \phi(a)$, geldt dat de Fouriergetransformeerde hiervan gegeven wordt door

$$(\mathcal{F}\delta_a)(\phi) = \delta_a(\mathcal{F}\phi) = (\mathcal{F}\phi)(a) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xa}\phi(x)\mathrm{d}x = (\text{test } \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-a)x})(\phi). \tag{95}$$

Dus $\mathcal{F}\delta_a = \text{test } \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-a)x}$. Hieruit volgt dan, met behulp van $\mathcal{F}S\mathcal{F} = 2\pi$ voor getemperde distributies ([1], Stelling 14.18), met S de spiegelingsoperator, dat

$$2\pi\delta_a = \mathcal{F}S\mathcal{F}\delta_a = \mathcal{F}S(\text{test } \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-a)x}) = \mathcal{F}(\text{test } \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}). \tag{96}$$

Gebruikmakend hiervan, vinden we dat de distributie $(\mathrm{i}\xi)^p\mathcal{F}(\text{test } \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax})$ gegeven wordt door

$$\begin{aligned}(\mathrm{i}\xi)^p\mathcal{F}(\text{test } \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax})(\phi) &= \mathcal{F}(\text{test } \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax})((\mathrm{i}\xi)^p\phi) \\ &= 2\pi\delta_a((\mathrm{i}\xi)^p\phi) = 2\pi(\mathrm{i}a)^p\phi(a) = (2\pi(\mathrm{i}a)^p\delta_a)(\phi).\end{aligned} \tag{97}$$

De fractionele afgeleide is nu dus de inverse Fouriergetransformeerde van $2\pi(\mathrm{i}a)^p\delta_a$, en aangezien Fouriertransformatie lineair is, kunnen we de constante factoren naar buiten halen, en wordt deze gegeven door

$$\partial^p(\text{test } \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}) = (\mathrm{i}a)^p\mathcal{F}^{-1}(2\pi\delta_a) = (\mathrm{i}a)^p\text{test } \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} = \text{test}((\mathrm{i}a)^p\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}) \qquad (p > -1). \tag{98}$$

We zien dus een uitbreiding van de reeds bekende formule

$$\partial^k(\text{test } \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}) = \text{test}(\partial^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}) = \text{test}((\mathrm{i}a)^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}),$$

voor k geheel.

In dit voorbeeld hebben we een zuiver imaginaire exponent gekozen, omdat voor een reële component in de exponent zou gelden dat de functie geen getemperde distributie meer oplevert.

Voorbeeld 3.29. Omdat de fractionele afgeleide lineair is, kunnen we nu ook de fractionele afgeleiden van $\sin(ax)$ voor a reëel bepalen. Er geldt immers dat

$$\sin(ax) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax}}{2\mathrm{i}}. \tag{99}$$

Hieruit volgt dus voor $p > -1$ dat

$$\partial^p(\mathrm{test}\sin(ax)) = \mathrm{test}\left(\frac{(\mathrm{i}a)^p\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} - (-\mathrm{i}a)^p\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax}}{2\mathrm{i}}\right). \tag{100}$$

Als we hierin a^p buiten haakjes halen, en $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$ schrijven, vinden we dat

$$\partial^p(\mathrm{test}\sin(ax)) = \mathrm{test}\left(a^p\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}p\mathrm{i}+\mathrm{i}ax} - \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}p\mathrm{i}-\mathrm{i}ax}}{2\mathrm{i}}\right) = \mathrm{test}(a^p\sin(ax + \frac{\pi}{2}p)). \tag{101}$$

Dit is weer een uitbreiding van de bekende formule voor gehele-orde afgeleiden:

$$\partial^k\sin(ax) = a^k\sin(ax + \frac{\pi}{2}k).$$

Voorbeeld 3.30. Een voorbeeld van een distributie waar het niet goed gaat, is de halfde-orde afgeleide van de getemperde distributie test$x$. De Fouriergetransformeerde van test$x$ is namelijk i keer de afgeleide van de Fouriergetransformeerde van test1, dus

$$\mathcal{F}(\mathrm{test}x) = 2\pi\mathrm{i}\delta'. \tag{102}$$

Deze distributie vermenigvuldigen we dan met $(\mathrm{i}\xi)^{\frac{1}{2}}$. Echter, als we dit toepassen op een Schwartzfunctie ϕ die niet nul is in de oorsprong, krijgen we

$$(\mathrm{i}\xi)^{\frac{1}{2}}2\pi\mathrm{i}\delta'(\phi) = \delta'(2\pi\mathrm{i}(\mathrm{i}\xi)^{\frac{1}{2}}\phi) = 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}((\mathrm{i}\xi)^{\frac{1}{2}}\phi(\xi))|_{\xi=0}, \tag{103}$$

en $(\mathrm{i}\xi)^{\frac{1}{2}}$ is niet differentieerbaar in de oorsprong, dus dit levert geen resultaat op. Hiermee is het resultaat dus geen distributie meer, dus kunnen we niet de inverse Fouriergetransformeerde bepalen.

We hebben nu voor de Fourier fractionele afgeleiden alleen afgeleiden van orde $p > -1$ besproken. Deze afgeleiden zouden uitgebreid kunnen worden naar alle orden, met vergelijkbare methoden als degenen die gebruikt zijn voor de Caputo of Riemann-Liouville afgeleiden, door samenstelling met gewone integralen van gehele orde te nemen. In tegenstelling tot de twee volgordes van samenstellen bij Caputo en Riemann-Liouville afgeleiden, kan bij de definitie voor Schwartzfuncties de integraaloperator alleen na de Fourier fractionele afgeleide worden toegepast, omdat de integraal van een Schwartzfunctie meestal niet snel afnemend gaat zijn, en dus zelf geen Schwartzfunctie meer is. Voor getemperde distributies kan het voor sommige distributies wel mogelijk zijn beide volgordes van toepassen te gebruiken, maar zoals we in Voorbeeld 3.30 zagen, levert niet elke getemperde distributie een fractionele afgeleide op, dus kunnen we van de samenstelling met gewone integralen ook niet garanderen dat het resultaat oplevert.

Bij het samenstellen met integralen wordt een afhankelijkheid van de ondergrens ingevoerd, omdat de integralen van een ondergrens a tot een bovengrens x lopen, terwijl deze fractionele afgeleiden alle functiewaarden gebruiken en geen onder- of bovengrens hebben.

4 Vergelijking tussen de fractionele afgeleiden en integralen

In deze sectie zullen we de drie definities van fractionele integralen en afgeleiden die we behandeld hebben, onderling vergelijken. We herhalen om te beginnen de formules voor de verschillende afgeleiden en integralen voor functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{C}$:

$$
\begin{aligned}
{}_a\mathbf{D}_x^{-p} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^x (x-t)^{p-1} f(t)\mathrm{d}t && (104)\\
&\quad (f \text{ locaal integreerbaar}, p > 0),\\
{}_a\mathbf{D}_x^{p} f(x) &= \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}({}_a\mathbf{D}_x^{p-k} f(x)) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \int_a^x (x-t)^{k-p-1} f(t)\mathrm{d}t && (105)\\
&\quad (f\ k \text{ maal differentieerbaar met locaal integreerbare } k\text{-de afgeleide},\\
&\quad p > 0, k-1 = \lfloor p \rfloor),\\
{}_a^C\mathrm{D}_x^{p} f(x) &= {}_a\mathbf{D}_x^{p-k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(x) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \int_a^x (x-t)^{k-p-1} f^{(k)}(t)\mathrm{d}t && (106)\\
&\quad (f\ k \text{ maal differentieerbaar met locaal integreerbare } k\text{-de afgeleide},\\
&\quad p > 0, k-1 = \lfloor p \rfloor),\\
\partial^\alpha f(x) &= \mathcal{F}^{-1}((\mathrm{i}\xi)^\alpha (\mathcal{F}f)(\xi)) && (107)\\
&\quad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ of } f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \alpha > -1).
\end{aligned}
$$

Hiervan zijn de Riemann-Liouville fractionele integraal in (104) en de Fourier fractionele afgeleide in (107) voor $\alpha < 0$ de enige twee die negatieve orden van de differentiaaloperator aankunnen, en de Riemann-Liouville fractionele afgeleide in (105), de Caputo fractionele afgeleide in (106) en de Fourier fractionele afgeleide voor $\alpha > 0$ zijn de formules die positieve orden aankunnen. In de eerste subsectie vergelijken we de fractionele integralen, en in de tweede subsectie vergelijken we de fractionele afgeleiden.

4.1 Vergelijking van fractionele integralen

Het eerste grote verschil tussen de Riemann-Liouville en de Fourier fractionele integralen is dat de Riemann-Liouville definitie een ondergrens van de integraal heeft, terwijl de Fourier definitie dit niet heeft. De functies die voor Riemann-Liouville fractionele integralen gebruikt kunnen worden hoeven alleen voor $x > a$, met a de ondergrens van de integraal, gedefinieerd te zijn, terwijl de Fourier definitie uitgaat van een functie die overal gedefinieerd is. De Riemann-Liouville definitie hangt vervolgens alleen af van de waarden van de functie f tussen a en x, terwijl de Fourier definitie van de gehele functie afhangt.

Het volgende grote verschil is dat de Riemann-Liouville fractionele integraal voor elke mogelijke orde $p > 0$ van de integraaloperator een resultaat geeft, terwijl de Fourier definitie alleen voor orden $0 < -\alpha < 1$ een resultaat geeft. De Fourier definitie kan in principe uitgebreid worden tot grotere orden door hem samen te stellen met integraaloperatoren, maar dit voegt dan wel afhankelijkheid van een beginpunt in.

Een ander groot verschil is de functieruimten waarop de operatoren toegepast kunnen worden. De Riemann-Liouville definitie eist alleen dat de functie integreerbaar is van a tot x, terwijl de versie van de Fourier definitie voor Schwartzfuncties eist dat de functie oneindig vaak differentieerbaar is, en dat elke afgeleide snel afnemend is. Het uitgebreidere domein van de Fourier definitie voor getemperde distributies is juist in zekere zin groter dan de ruimte van locaal integreerbare functies, omdat niet elk element van de ruimte te identificeren is met een functie. Het domein bevat echter niet elke locaal integreerbare functie, functies die niet begrensd zijn door een polynoom hoeven namelijk geen getemperde distributies op te leveren. Verder geldt ook dat niet voor elke getemperde distributie de definitie een resultaat oplevert, zoals we gezien hebben in Voorbeeld 3.30 voor de halfde afgeleide van de distributie test x.

Een overeenkomst tussen de twee fractionele integralen is dat voor beide geldt dat samenstelling met zichzelf optelling van de ordes van de operatoren betekent, volgens Stellingen 3.26 en 3.10. Verder geldt ook voor beide definities dat de fractionele afgeleiden in zekere zin continu zijn als functie van de orde, volgens Stellingen 3.11 en 3.25. Door Stelling 3.11 met Stelling 3.10 te combineren volgt namelijk voor elke $q > 0$ dat

$$\lim_{p \downarrow q} {}_a\mathbf{D}_x^{-p} f(x) = {}_a\mathbf{D}_x^{-q} f(x) \tag{108}$$

voor $a \in \mathbb{R}$ en $x > a$. Een verschil tussen deze resultaten is dat voor de Riemann-Liouville fractionele afgeleide alleen limieten van boven genomen kunnen worden, terwijl voor de Fourier fractionele afgeleide de afgeleiden echt continu zijn als functie van de orde. Echter, vergelijkbaar met het bewijs van 3.11 in het geval dat f continu differentieerbaar is, volgt dat de Riemann-Liouville fractionele afgeleide ook continu is als functie van de orde voor continu differentieerbare functies.

We vergelijken een aantal specifieke resultaten:

Voorbeeld 4.1. We hebben al in Voorbeelden 3.9 en 3.28 onder verschillende voorwaarden de integralen van e-machten berekend. De resultaten hiervan waren

$$
\begin{aligned}
{}_{-\infty}\mathbf{D}_x^{-p}\mathrm{e}^{bx} &= \frac{1}{b^p}\mathrm{e}^{bx} && (b > 0, p > 0), && (109)\\
\partial^\alpha \mathrm{test}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}) &= \mathrm{test}((\mathrm{i}a)^\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}) && (\alpha > -1, a \in \mathbb{R}). && (110)
\end{aligned}
$$

De operatoren werken dus voor verschillende exponenten, maar de resulterende formules zijn wel hetzelfde, waarbij b en $\mathrm{i}a$ dezelfde rol vervullen.

Voorbeeld 4.2. We hebben in Voorbeeld 3.8 gezien dat

$$
{}_a\mathbf{D}_x^{-p}(x-a)^q = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)}(x-a)^{p+q} \qquad (p > 0, q > -1). \tag{111}
$$

We hebben in Voorbeeld 3.30 al gezien dat niet elke fractionele afgeleide of integraal van dit soort machtsfuncties bestaat. Als we naar functies $f(x) = x^n$, met n een natuurlijk getal, kijken, geldt zelfs voor elke $\alpha < 0$ dat $\partial^\alpha(\mathrm{test}\ f)$ niet bestaat. Immers, op factoren na is de Fouriergetransformeerde van f gegeven door $\delta^{(n)}$, en als we deze distributie proberen te vermenigvuldigen met $(\mathrm{i}\xi)^\alpha$ voor $\alpha < 0$ levert dit problemen op, omdat voor elke Schwartzfunctie ϕ die niet 0 is in de oorsprong, de functie $(\mathrm{i}\xi)^\alpha\phi(\xi)$ niet gedefinieerd is in de oorsprong. Daardoor kunnen we niet de n-de afgeleide in de oorsprong bepalen, en is het resultaat geen getemperde distributie meer (en zelfs geen gewone distributie).

Voor de ruimte van Schwartzfuncties geldt dat beide definities erop toegepast kunnen worden. De Fourier definitie was precies hiervoor gedefinieerd, en de Riemann-Liouville definitie heeft alleen integreerbaarheid nodig, en Schwartzfuncties zijn integreerbaar. In de volgende stelling laten we zien dat de definities op deze ruimte met elkaar overeenkomen:

Stelling 4.3. *Zij f een Schwartzfunctie en zij $0 < p < 1$. Dan geldt dat*

$$
\partial^{-p} f(x) = {}_{-\infty}\mathbf{D}_x^{-p} f(x). \tag{112}
$$

Bewijs. Aangezien $\partial^{-p} f(x) = \mathcal{F}^{-1}((\mathrm{i}\xi)^{-p}(\mathcal{F}f)(\xi))$ is het voldoende om te laten zien dat

$$
(\mathrm{i}\xi)^{-p}(\mathcal{F}f)(\xi) = \mathcal{F}({}_{-\infty}\mathbf{D}_x^{-p} f(x))(\xi). \tag{113}
$$

Om dit aan te tonen, herschrijven we

$$
\begin{aligned}
{}_{-\infty}\mathbf{D}_x^{-p} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_{-\infty}^x (x-t)^{p-1} f(t)\mathrm{d}t\\
&= g * f(x), && (114)
\end{aligned}
$$

waarbij

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)} && (\text{als } t > 0),\\
g(t) &= 0 && (\text{als } t \leq 0). && (115)
\end{aligned}
$$

Hieruit volgt dan dat

$$\mathcal{F}({}_{-\infty}\mathbf{D}_x^{-p} f(x)) = \mathcal{F}(g * f) = \mathcal{F}g\mathcal{F}f. \tag{116}$$

Stelling 4.4 hieronder vertelt ons dat de Fouriergetransformeerde van g, die hiervoor gezien moet worden als getemperde distributie, gegeven wordt door

$$\mathcal{F}(\text{test } g) = \text{test}((\mathrm{i}\xi)^{-p}. \tag{117}$$

Door dit te gebruiken volgt dan dat

$$\mathcal{F}({}_{-\infty}\mathbf{D}_x^{-p} f(x))(\xi) = \mathcal{F}(g * f)(\xi) = (\mathrm{i}\xi)^{-p}(\mathcal{F}f)(\xi), \tag{118}$$

en dit was wat we wilden aantonen om de stelling te bewijzen. □

We hadden als tussenresultaat de volgende stelling nodig:

Stelling 4.4 ([2], Voorbeeld 7.1.17)**.** *Zij g de functie gegeven door*

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)} && (\text{als } t > 0), \\ g(t) &= 0 && (\text{als } t \leq 0). \end{aligned} \tag{119}$$

Dan is

$$\mathcal{F}(\text{test } g) = \text{test}((\mathrm{i}\xi)^{-p}). \tag{120}$$

Bewijs. We bepalen eerst een gerelateerd resultaat, de Fourier-Laplace getransformeerde van g. Deze is een functie van de deelverzameling $\{z|\Im(z) < 0\}$ van $\mathbb{C}$ naar $\mathbb{C}$, gegeven door

$$\mathcal{F}_L(g)(z) = \int_0^\infty g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zt}\mathrm{d}t. \tag{121}$$

Omdat $\Im(z) < 0$ levert de complexe e-macht een exponentieel dalende factor op, waardoor de integraal convergeert. De Fourier-Laplace getransformeerde lijkt erg op de Fouriergetransformeerde, en deelt ook een deel van de eigenschappen hiervan. Analoog aan Lemma 2.18 kunnen we bewijzen dat

$$\mathcal{F}_L(xg)(z) = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathcal{F}_L(g)(z), \tag{122}$$

$$\mathcal{F}_L(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x})(z) = \mathrm{i}z\mathcal{F}_L(g)(z) - g(0). \tag{123}$$

Hierbij valt bij het bewijs van de tweede vergelijking de randterm bij $x = 0$ niet weg, in tegenstelling tot de randterm bij $x = -\infty$ in het bewijs van Lemma 2.18.

In het geval dat $z = \mathrm{i}y$, met $y < 0$, geldt dat

$$\mathcal{F}_L(g)(\mathrm{i}y) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)} \mathrm{e}^{yt} \mathrm{d}t. \tag{124}$$

Met de substitutie $x = -yt$ levert dit

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_L(g)(\mathrm{i}y) &= \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{\Gamma(p)(-y)^{p-1}} \mathrm{e}^{-x} \frac{1}{-y} \mathrm{d}x \\ &= \frac{(-y)^{-p}}{\Gamma(p)} \int_0^\infty x^{p-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = (-y)^{-p} = (\mathrm{i}(\mathrm{i}y))^{-p}.\end{aligned} \tag{125}$$

Hier is bij de laatste stap de definitie van de Gamma-functie gebruikt. We zien dus dat voor $z = \mathrm{i}y$ geldt dat $\mathcal{F}_L(g)(z) = (\mathrm{i}z)^{-p}$. Omdat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xg(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{x^p}{\Gamma(p)} = p \frac{x^{p-1}}{\Gamma(p)} = pg(x)$$

voor alle $x > 0$, volgt dat

$$\begin{aligned}p\mathcal{F}_L(g)(z) &= \mathcal{F}_L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xg(x))\right)(z) = \mathrm{i}z\mathcal{F}_L(xg(x))(z) - 0g(0) \\ &= -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathcal{F}_L(g(x))(z).\end{aligned} \tag{126}$$

Uit deze vergelijking volgt dat $\mathcal{F}_L(g)(z)$ differentieerbaar is voor alle z met $\Im(z) < 0$, omdat we dan door z kunnen delen en de linkerkant welgedefinieerd blijft. Hieruit volgt dat g holomorf is op zijn domein, en daarmee dat g analytisch is. De functie $(\mathrm{i}z)^p$ is ook analytisch op het gebied met $\Im(z) < 0$, en we hebben in vergelijking (125) gezien dat voor de negatieve imaginaire as geldt dat deze twee analytische functies gelijk zijn. Voor twee analytische functies die gedefinieerd zijn op dezelfde samenhangende open verzameling, die gelijk zijn op een verzameling die niet-discreet is, geldt dat ze overal op de open verzameling gelijk zijn. Hieruit kunnen we dus concluderen dat

$$\mathcal{F}_L(g)(z) = (\mathrm{i}z)^{-p} \qquad (\Im(z) < 0). \tag{127}$$

Nu we dit resultaat hebben, kunnen we deze Fourier-Laplace getransformeerde gebruiken om de Fouriergetransformeerde van g te bepalen. Binnen de ruimte van getemperde distributies geldt dat

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \operatorname{test}(\mathrm{e}^{-\epsilon x} g(x)) = \operatorname{test} g. \tag{128}$$

Immers, voor elke Schwartzfunctie ϕ geldt

$$\operatorname{test}(\mathrm{e}^{-\epsilon x} g(x))(\phi) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\epsilon x} g(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \mathrm{e}^{-\epsilon x} g(x)\phi(x)\mathrm{d}x$$

en aangezien $\mathrm{e}^{-\epsilon x}$ voor elke R op $[0,R]$ uniform convergeert naar 1, en de integraal $\int_0^\infty g(x)\phi(x)\mathrm{d}x$ convergeert, mogen de limieten verwisseld worden en geldt

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\downarrow 0}\operatorname{test}(\mathrm{e}^{-\epsilon x}g(x))(\phi) &= \lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_0^R \mathrm{e}^{-\epsilon x}g(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R g(x)\phi(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty g(x)\phi(x)\mathrm{d}x = (\operatorname{test} g)(\phi). \end{aligned} \tag{129}$$

Omdat dit voor elke Schwartzfunctie geldt, volgt dat $\operatorname{test}(\mathrm{e}^{-\epsilon x}g(x))$ inderdaad naar test g convergeert. Omdat Fouriertransformatie continu is, volgt nu dat

$$\mathcal{F}(\operatorname{test} g) = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\mathcal{F}(\operatorname{test}(\mathrm{e}^{-\epsilon x}g(x))). \tag{130}$$

Verder is

$$\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\epsilon x}g(x))(\xi) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\epsilon x}g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x = \int_0^\infty g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x(\xi-\mathrm{i}\epsilon)}\mathrm{d}x = \mathcal{F}_L(g)(\xi-\mathrm{i}\epsilon). \tag{131}$$

Met behulp van (127) vinden we dus dat

$$\mathcal{F}(\operatorname{test}(\mathrm{e}^{-\epsilon x}g(x))) = \operatorname{test}((\mathrm{i}(\xi+\mathrm{i}\epsilon))^{-p}). \tag{132}$$

Dus:

$$\mathcal{F}(\operatorname{test} g) = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\mathcal{F}(\operatorname{test}(\mathrm{e}^{-\epsilon x}g(x))) = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\operatorname{test}((\mathrm{i}(\xi+\mathrm{i}\epsilon))^{-p}) = \operatorname{test}((\mathrm{i}\xi)^{-p}). \qquad \square$$

Met behulp van dit lemma is het bewijs van Stelling 4.3 compleet.

We zien dus dat de twee definities van fractionele afgeleiden overeenkomen als ze worden toegepast op Schwartzfuncties. Omdat we voor de Riemann-Liouville fractionele integraal in Stelling 3.10 hebben aangetoond dat de samenstelling van 2 fractionele integraaloperatoren weer een fractionele integraaloperator levert, met de ordes opgeteld, en omdat de Riemann-Liouville fractionele integralen van gehele orde gewone integralen van gehele orde zijn, geldt nu dat als we de Fourier fractionele integraal samenstellen met gewone integralen van gehele orde, dat we dan ook weer Riemann-Liouville fractionele integralen krijgen. Op deze manier kunnen we dus de Fourier definitie uitbreiden tot alle mogelijke orden integralen.

De definities komen dus op een deel van de functies waarop ze toegepast kunnen worden overeen. Echter, de definities komen alleen met elkaar overeen als we $-\infty$ als ondergrens nemen voor de Riemann-Liouville fractionele integraal. De Fourier definitie kan ook soms voor getemperde distributies gebruikt worden, en de Riemann-Liouville definitie ook voor functies die niet oneindig vaak differentieerbaar zijn, dus beide definities hebben eigenschappen die de andere definitie niet heeft.

4.2 Vergelijking van fractionele afgeleiden

Net als bij de vergelijking van de fractionele integralen geldt dat de Fourier definitie geen ondergrens heeft, terwijl de Riemann-Liouville en nu ook de Caputo definitie deze wel hebben. Ook is er weer het verschil tussen het domein van de functies waar de afgeleiden op toegepast kunnen worden, en dus ook het deel van de functie waar de afgeleiden van afhangen (voor Riemann-Liouville en Caputo alleen van $f(t)$ voor $a < t < x$ en voor Fourier van $f(t)$ voor alle t).

De mogelijke orden zijn nu al wel hetzelfde, dus wat dit betreft zijn er geen verschillen tussen de definities. De functieruimten waarop de afgeleiden gedefinieerd zijn, zijn voor de Riemann-Liouville definitie en de Caputo definitie hetzelfde, namelijk de k maal differentieerbare functies, met locaal integreerbare k-de afgeleide, voor afgeleiden van orde tussen $k-1$ en k. De Fourier definitie werkt weer op Schwartzfuncties en soms op getemperde distributies, waarbij de Schwartzfuncties een veel kleinere functieruimte zijn, maar de getemperde distributies een grotere functieruimte vormen, maar niet altijd een welgedefinieerde Fourier fractionele afgeleide hebben.

Ook hier kunnen we weer de continuïteit als functie van de orde vergelijken. Voor de Riemann-Liouville fractionele afgeleide geldt door de samenstelling met gewone afgeleiden en de vrijheid in de keuze van k en α, zolang $k-\alpha$ constant blijft, dat de fractionele afgeleide dezelfde continuïteit heeft als de fractionele integraal: voor continue functies geldt in ieder geval dat elke limiet voor α omlaag naar een waarde β de fractionele afgeleide van orde $k-\beta$ reproduceert, en voor continu differentieerbare functies geldt weer echte continuïteit. Voor de Caputo fractionele afgeleide zagen we in Stelling 3.16 dat limieten van de orde omhoog naar een geheel getal weer de normale afgeleide opleverden, voor voldoende gladde functies, maar voor deze fractionele afgeleide zagen we ook dat de keuze van k en α direct invloed kon hebben op de uitkomst van de fractionele afgeleide. Daaruit volgt dat de limiet vanaf de andere kant over het algemeen niet de normale afgeleide oplevert, tenzij de functie en voldoende afgeleiden van de functie op de ondergrens van de fractionele afgeleide 0 zijn. Voor de Fourier fractionele afgeleide geldt weer dat het resultaat continu is als functie van de orde.

We vergelijken weer twee specifieke resultaten:

Voorbeeld 4.5. In Voorbeelden 3.19 en 3.28 hebben we al gezien dat

$$
\begin{aligned}
{}_{-\infty}\mathbf{D}_x^p \mathrm{e}^{bx} &= b^p \mathrm{e}^{bx} && (b > 0), && (133)\\
{}_{-\infty}^{\;C}\mathrm{D}_x^p \mathrm{e}^{bx} &= b^p \mathrm{e}^{bx} && (b > 0), && (134)\\
\partial^\alpha \mathrm{test}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} &= \mathrm{test}((\mathrm{i}a)^\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}) && (a \in \mathbb{R}). && (135)
\end{aligned}
$$

We zien dus weer dat deze definities speciale gevallen van dezelfde formule zijn, maar dat ze op verschillende functieruimten werken.

Voorbeeld 4.6. In Voorbeeld 3.18 hebben we gezien dat

$$ {}_a\mathbf{D}_x^p(x-a)^q = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-p+1)}(x-a)^{q-p} \qquad (q>-1), \tag{136} $$

$$ {}_a^C\mathrm{D}_x^p(x-a)^q = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-p+1)}(x-a)^{q-p} \qquad (q>\lfloor p\rfloor). \tag{137} $$

Voor de Fourier definitie hebben we gezien dat niet elke afgeleide van een machtsfunctie bestaat. In het geval van een functie $f(x) = x^n$ met n niet-negatief en geheel is $\mathcal{F}(\text{test } f)$ op een constante factor na de distributie $\delta^{(n)}$. Om deze distributie te vermenigvuldigen met $(\mathrm{i}\xi)^\alpha$ moet gelden dat die factor zelf n keer differentieerbaar is in 0, dus moet α geheel zijn, of $\alpha > n$. In het eerste geval vinden we alleen maar de normale afgeleiden terug, en in het tweede geval is de betreffende afgeleide 0, en reproduceren we alleen het resultaat dat voor x^n geldt dat elke afgeleide van orde groter dan n gelijk is aan 0.

We zien dus dat hier de Riemann-Liouville en de Caputo fractionele afgeleiden de bekende formules reproduceren, maar onder verschillende voorwaarden, en dat de Fourier fractionele afgeleide maar erg beperkt in staat is om dit soort functies te differentiëren.

We hebben al in Stelling 3.22 gezien dat bij een ondergrens van $a = -\infty$ geldt dat de Riemann-Liouville en de Caputo fractionele afgeleiden overeenkomen, voor functies die snel genoeg naar 0 gaan. De Fourier fractionele afgeleide blijkt dan ook weer hetzelfde te zijn:

Stelling 4.7. *Zij f een Schwartzfunctie. Dan bestaan de Riemann-Liouville fractionele afgeleide en de Caputo fractionele afgeleide hiervan voor elke orde p, en geldt dat*

$$ {}_{-\infty}\mathbf{D}_x^p f(x) = {}_{-\infty}^{\;\;C}\mathrm{D}_x^p f(x) = \partial^p f(x) \tag{138} $$

voor alle $p > 0$.

Bewijs. Omdat f een Schwartzfunctie is, is hij oneindig vaak differentieerbaar, en is elke afgeleide integreerbaar vanaf $-\infty$, omdat hij snel afnemend is en dus in $R_{loc}^{-n}(\mathbb{R})$ zit voor elke $n \in \mathbb{N}$. Daaruit volgt dat de Riemann-Liouville en Caputo fractionele afgeleiden bestaan voor elke orde p. In Stelling 3.22 is al aangetoond dat de eerste gelijkheid tussen de afgeleiden geldt, dus we hoeven alleen nog aan te tonen dat de Riemann-Liouville fractionele afgeleide en de Fourier fractionele afgeleide met elkaar overeenkomen. Omdat volgens Stelling 4.3 voor integralen van orde tussen 0 en 1 geldt dat de Fourier en de Riemann-Liouville definitie overeenkomen, en omdat de Riemann-Liouville fractionele afgeleide gedefinieerd is als de k-de orde afgeleide van een Riemann-Liouville fractionele integraal, is de Riemann-Liouville fractionele afgeleide met ondergrens $a = -\infty$ gelijk aan de k-de orde afgeleide van de Fourier fractionele integraal. Echter, voor de Fourier fractionele integralen en afgeleiden geldt volgens Lemma 3.26 dat deze k-de orde afgeleide van de Fourier fractionele afgeleide van orde $p - k$ precies de Fourier fractionele afgeleide van orde p is. Hiermee is dan de gelijkheid tussen de eerste en de derde van de drie fractionele afgeleiden aangetoond, dus ze zijn alledrie gelijk. $\square$

We zien dus dat de drie definities van fractionele afgeleiden overeenkomen, zolang we naar Schwartzfuncties kijken en de ondergrens van de Riemann-Liouville en Caputo fractionele afgeleiden op $-\infty$ gesteld worden. Net als bij de integralen geldt weer dat de keuze van ondergrens ervoor zorgt dat de Riemann-Liouville en Caputo fractionele afgeleiden meer resultaten kunnen opleveren, en dat de verschillende functieruimten waar de definities op toegepast worden een wisselende mate van toepasbaarheid geven.

5 Praktische toepassing:Visco-elastische stoffen

In deze sectie bespreken we hoe de Caputo fractionele afgeleide of de Riemann-Liouville fractionele afgeleide gebruikt kunnen worden om het verband tussen stress en strain in visco-elastische stoffen te bepalen. We volgen grotendeels de definities en behandeling van [6], maar er wordt dieper op de wiskundige formulering in gegaan.

Voor het vervormen van stoffen zijn 2 grootheden van belang: de kracht per oppervlakte-eenheid die wordt uitgeoefend op het voorwerp of door het voorwerp wordt uitgeoefend, die de *stress* wordt genoemd, afgekort met de letter σ, en de vervorming van het voorwerp relatief ten opzichte van een beginpositie, die de *strain* genoemd wordt, afgekort met de letter ϵ. We beperken ons tot een-dimensionale problemen, en in dat geval is de strain de uitrekking van het voorwerp gedeeld door de oorspronkelijke lengte van een segment. Als dus een voorwerp over de hele lengte met een factor 2 wordt uitgerekt, is ϵ als functie van de plaats gelijk aan de dimensieloze constante 1. De studie van visco-elastische stoffen gaat vooral over het zoeken van het verband tussen de stress en de strain.

De bekendste voorbeelden van stoffen waarvan het verband tussen stress en strain bekend is, zijn de volgende twee:

Voorbeeld 5.1. Voor een ideale vaste stof geldt dat het verband tussen de stress en de strain recht evenredig is, dus

$$\sigma(x,t) = a\epsilon(x,t) \tag{139}$$

voor een constante $a > 0$ die van het materiaal afhangt.

Voorbeeld 5.2. Voor een ideale vloeistof geldt dat een constante kracht leidt tot een constante snelheid van vervorming. Dit leidt tot het volgende verband:

$$\sigma(x,t) = b\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t}(x,t). \tag{140}$$

Hierbij is $b > 0$ een constante die van het materiaal afhangt.

Het nadeel aan deze twee voorbeelden is dat er in de praktijk nauwelijks tot geen stoffen zijn die zich als een ideale vaste stof of een ideale vloeistof gedragen. De meeste stoffen gedragen zich deels als beide, en daarom moet een manier gebruikt worden om de twee vergelijkingen te combineren. Een klassieke manier hiervoor is om de twee modellen aan elkaar te koppelen alsof het componenten in een elektrische schakeling zijn. In termen van de grootheden stress en strain geldt voor het in serie koppelen van 2 systemen dat de strain optelt, en de stress gelijk is voor de beide systemen, terwijl voor het koppelen in parallel geldt dat de strain voor beide systemen gelijk is, maar de stress optelt.

Voorbeeld 5.3. In het geval van het in serie koppelen van een ideale vaste stof en een ideale vloeistof worden de vergelijkingen dus

$$\begin{aligned} \sigma(x,t) &= a\epsilon_{vastestof}(x,t), \\ \sigma(x,t) &= b\frac{\mathrm{d}\epsilon_{vloeistof}}{\mathrm{d}t}(x,t), \\ \epsilon(x,t) &= \epsilon_{vastestof}(x,t) + \epsilon_{vloeistof}(x,t), \end{aligned} \tag{141}$$

dus voor de totale stress en strain geldt

$$\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t}(x,t) = \frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}(x,t) + \frac{1}{b}\sigma(x,t). \tag{142}$$

We zien in deze vergelijking dat er een combinatie van de twee eerdere vergelijkingen ontstaat. Fysisch gezien verklaart deze vergelijking een deel van het gedrag van visco-elastische stoffen, bijvoorbeeld dat bij een constante strain $\epsilon = c$ de stress door de tijd heen exponentieel afneemt, maar hij heeft ook tekortkomingen, namelijk dat bij een constante stress $\sigma = c$ de strain door de tijd heen willekeurig blijft toenemen.

We gaan nu weer naar algemenere formules kijken, in plaats van specifieke voorbeelden. We bekijken in het vervolg de stress en de strain op een vaste positie, dus we schrijven alleen de tijdsafhankelijkheid expliciet op. We gaan ervan uit dat het verband tussen stress en strain een lineair verband is. Verder gaan we ervan uit dat de stress en de strain continue functies zijn, zodat ze een afgeleide hebben in de vorm van een distributie. In dat geval geldt dat we de functies als volgt kunnen schrijven:

Lemma 5.4. *Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een continu differentieerbare functie en $a \in \mathbb{R}$. Dan geldt de volgende formule:*

$$f(t) = \int_a^\infty \dot{f}(\tau)H(t-\tau)\mathrm{d}\tau + f(a) \tag{143}$$

waarbij $H(t-\tau)$ de Heaviside stapfunctie is, die 0 is voor $t-\tau < 0$ en 1 voor $t-\tau > 0$.

Bewijs. Omdat $H(t-\tau) = 0$ als $\tau > t$ en omdat hij 1 is als $\tau < t$ kunnen we de rechterkant herschrijven tot

$$\int_a^t \dot{f}(\tau)\mathrm{d}\tau + f(a) = f(t) \tag{144}$$

omdat f continu is. □

In het geval dat we a vervangen door $-\infty$, geldt voor functies f die naar 0 gaan als x naar $-\infty$ gaat, dat

$$f(t) = \int_{-\infty}^\infty \dot{f}(\tau)H(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \dot{f} * H(t). \tag{145}$$

Als f alleen continu is, in plaats van continu differentieerbaar, heeft hij nog wel een afgeleide als distributie. Omdat convolutie ook voor distributies betekenis heeft (zie [1], Hoofdstuk 11), kunnen we de formule ook toepassen op continue functies. Hierbij moeten we echter eisen dat er een eindige $a \in \mathbb{R}$ is, waarvoor $f(x) = 0$ voor $x < a$. Dan is de drager van de distributie $\dot{f}$ bevat in $[a, \infty)$ (dat wil zeggen dat de waarde van de $\dot{f}(\phi)$ alleen kan afhangen van het gedrag van de testfunctie ϕ binnen het interval $[a, \infty)$), en de drager van H is $[0, \infty)$, dus kunnen we de convolutie nemen. Hiervoor geldt dan:

Lemma 5.5. *Zij* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *een continue functie, zodat er een* $a \in \mathbb{R}$ *bestaat met* $\operatorname{supp} f \subset [a, \infty)$. *Als we met* $\dot{f}$ *de distributie noteren die de afgeleide van* $\operatorname{test} f$ *is, dan geldt*

$$f(t) = \dot{f} * H(t). \tag{146}$$

Bewijs. Uit Lemma 5.4 volgt dat de formule geldt voor differentieerbare f. De convolutie bestaat, omdat $\operatorname{supp} f \subset [a, \infty)$ en $\operatorname{supp} H = [0, \infty)$. Omdat convolutie met distributies een continue uitbreiding is van convolutie met functies, geldt dat we de formule kunnen uitbreiden naar het geval dat $\dot{f}$ een distributie is. □

Als we er nu van uitgaan dat de stress en de strain voor een bepaald tijdstip, dat we $t = 0$ noemen, beide nul waren, en dat ze daarna, voor $t > 0$, continu differentieerbaar zijn, maar dat er op $t = 0$ een sprongdiscontinuïteit mag zitten, kunnen we de functies als volgt schrijven:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \int_0^t H(t-\tau)\dot{\sigma}(\tau)\mathrm{d}\tau + \sigma(0)H(t), \\ \epsilon(t) &= \int_0^t H(t-\tau)\dot{\epsilon}(\tau)\mathrm{d}\tau + \epsilon(0)H(t). \end{aligned} \tag{147}$$

Als ze alleen continu zijn, moeten we $\dot{\sigma}$ en $\dot{\epsilon}$ weer als distributies zien.

Als we dus weten hoe de stress (of strain) reageert op een Heaviside stapfunctie in de strain (of stress), kunnen we bovenstaand verband gebruiken om het algemene verband tussen stress en strain te vinden. Deze reacties hebben daarom een naam gekregen:

Definitie 5.6. De strain die ontstaat als reactie op $\sigma(t) = H(t)$ heet de *creep compliance* en wordt genoteerd met $J(t)$. De stress die ontstaat als reactie op $\epsilon(t) = H(t)$ heet de *relaxation modulus* en wordt genoteerd met $G(t)$.

Natuurkundig gezien willen we dat er een oorzakelijk verband is tussen de stress en de strain, en daaruit volgt dat zowel J als G gelijk aan 0 moeten zijn voor negatieve tijden. Verder willen we ook dat de beide functies niet-negatief zijn, zodat de krachten en de vervormingen dezelfde kant op zijn. Ten slotte willen we dat J een stijgende, maar begrensde, functie is, en G een dalende functie, om te voldoen aan de experimentele waarnemingen dat een constante kracht een voorwerp langzaam uitrekt richting een evenwichtswaarde, en dat een constante uitrekking in eerste instantie terug wil naar de eerdere positie, maar dat deze kracht door de tijd heen afneemt.

Met behulp van deze definities kunnen we nu ϵ en σ in termen van elkaar en deze functies uitdrukken, voor het geval dat ze continu differentieerbaar zijn voor $t > 0$:

$$\epsilon(t) = \int_0^t J(t-\tau)\dot{\sigma}(\tau)\mathrm{d}\tau + \sigma(0)J(t), \tag{148}$$

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t-\tau)\dot{\epsilon}(\tau)\mathrm{d}\tau + \epsilon(0)G(t). \tag{149}$$

In het geval dat het alleen continue functies zijn, worden de formules:

$$\epsilon(t) = J * \dot{\sigma}(t), \tag{150}$$

$$\sigma(t) = G * \dot{\epsilon}(t). \tag{151}$$

Aangezien deze verbanden allebei moeten gelden, moeten J en G aan elkaar gerelateerd zijn.

Stelling 5.7. *Het verband tussen J en G wordt gegeven door $J * G(t) = t$ voor $t > 0$ en 0 anders.*

Bewijs. Om dit verband te vinden, kunnen we een stress en strain kiezen die continu differentieerbaar zijn voor $t > 0$, en continu in $t = 0$ zodat de tweede term in de formules wegvalt. Verder is voor $\tau < 0$ de afgeleide van zowel de stress als de strain 0, en voor $\tau > t$ is $t - \tau < 0$ en zijn zowel J als G gelijk aan 0, dus we kunnen de integratiegrenzen uitbreiden van $-\infty$ tot ∞. De rechterkant van beide vergelijkingen wordt dan weer een convolutie:

$$\begin{aligned}\epsilon(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} J(t-\tau)\dot{\sigma}(\tau)\mathrm{d}\tau = J * \dot{\sigma}(t),\\ \sigma(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau)\dot{\epsilon}(\tau)\mathrm{d}\tau = G * \dot{\epsilon}(t).\end{aligned} \tag{152}$$

Als we er ook nog van uitgaan dat ϵ en σ integreerbaar zijn over $\mathbb{R}$, kunnen we van beide kanten de Fouriergetransformeerde nemen, en krijgen we dat

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}\epsilon)(s) &= \mathrm{i}s(\mathcal{F}J)(s)(\mathcal{F}\sigma)(s),\\ (\mathcal{F}\sigma)(s) &= \mathrm{i}s(\mathcal{F}G)(s)(\mathcal{F}\epsilon)(s).\end{aligned} \tag{153}$$

door gebruik te maken van de convolutiestelling voor Fouriertransformatie (het equivalent van Lemma 2.21 voor distributies, zie [1], Stelling 14.25, waarvoor we extra moeten aannemen dat ϵ en σ compacte drager hebben) en van het feit dat Fouriertransformatie afgeleiden omzet in een factor is. De Fouriergetransformeerden van J en G bestaan voor praktische toepassingen, omdat J begrensd is, en G dalend en dus begrensd, zodat de Fouriergetransformeerde in ieder geval als getemperde distributie bestaat. In de randgevallen van een ideale vaste stof of ideale vloeistof blijken J en G niet aan deze vereisten te voldoen, maar het resultaat zal daarvoor ook blijken te kloppen. Het combineren van deze vergelijkingen levert

$$-s^2(\mathcal{F}J)(s)(\mathcal{F}G)(s) = 1. \tag{154}$$

Door nu links en rechts de inverse Fouriertransformatie te nemen, krijgen we aan de linkerkant de tweede afgeleide van de convolutie van J en G, en aan de rechterkant de Dirac deltadistributie. De distributies met als afgeleide de Dirac deltadistributie zijn van de vorm $\mathrm{test}(H(t)+c)$, en de integralen van deze functie zijn $ct+a$ voor $t<0$ en $(c+1)t+a$ voor $t>0$. Omdat we al weten dat de convolutie 0 moet zijn voor $t \leq 0$, vinden we dat $c=0$ en $a=0$. Hiermee hebben we dan inderdaad gevonden dat

$$J * G(t) = t \qquad\qquad (t > 0). \qquad \square$$

We bekijken met deze definities weer een aantal voorbeelden:

Voorbeeld 5.8. In het geval van een ideale vaste stof was het verband tussen de stress en de strain recht evenredig, dus de reactiefuncties J en G worden dan gegeven door

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{a}H(t), \\ G(t) &= aH(t) \end{aligned} \tag{155}$$

voor een constante $a > 0$ die van het materiaal afhangt. De convolutie van de twee functies wordt gegeven door

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(\tau)H(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t 1\mathrm{d}\tau = t. \tag{156}$$

Voorbeeld 5.9. In het geval van een ideale vloeistof werd het verband tussen de stress en strain gegeven door (140), dus hier worden de reactiefuncties gegeven door

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{b}t \qquad (t > 0), \\ G &= b\delta. \end{aligned} \tag{157}$$

We zien hier dus dat G een distributie is in plaats van een functie. De convolutie van de twee reactiefuncties wordt gegeven door

$$J * (b\delta)(t) = bJ(t) = t. \tag{158}$$

Voor het in serie of in parallel koppelen van twee systemen hadden we dat de strain respectievelijk de stress optelde, terwijl de andere in beide systemen hetzelfde is. In termen van de reactiefuncties J en G betekent dit dat bij in parallel schakelen de relaxation moduli G optellen, en in het geval van in serie schakelen de creep compliances J optellen.

Voorbeeld 5.10. We bekijken weer een ideale vloeistof en een ideale vaste stof die in serie aan elkaar gekoppeld zijn. De creep compliances van de twee systemen tellen op, dit levert

$$J_{totaal}(t) = J_{vastestof}(t) + J_{vloeistof}(t) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}t \qquad (t > 0). \tag{159}$$

Om nu G te vinden, zoeken we een functie of distributie die 0 is voor $t < 0$ zodat

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} J(\tau)G(t-\tau)\mathrm{d}\tau = t \qquad (t > 0), \\ \int_{0}^{t} (\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\tau)G(t-\tau)\mathrm{d}\tau = t \qquad (t > 0). \end{aligned} \tag{160}$$

Als we ervan uitgaan dat G een differentieerbare functie is, geldt dan door links en rechts de afgeleide naar t te nemen dat

$$\begin{aligned} (\frac{1}{a} + \frac{1}{b}t)G(0) + \int_{0}^{t} (\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\tau)\dot{G}(t-\tau)\mathrm{d}\tau = 1, \\ (\frac{1}{a} + \frac{1}{b}t)G(0) + \frac{1}{a}(G(t) - G(0)) + \frac{1}{b}\int_{0}^{t} \tau\dot{G}(t-\tau)\mathrm{d}\tau = 1. \end{aligned} \tag{161}$$

Door middel van partieel integreren krijgen we dan

$$\begin{aligned} (\frac{1}{a} + \frac{1}{b}t)G(0) + \frac{1}{a}(G(t) - G(0)) + \frac{1}{b}(-tG(0) + \int_{0}^{t} G(t-\tau)\mathrm{d}\tau) = 1, \\ \frac{1}{a}G(t) + \frac{1}{b}\int_{0}^{t} G(t-\tau)\mathrm{d}\tau = 1. \end{aligned} \tag{162}$$

Als we weer de afgeleide nemen, krijgen we

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}\dot{G}(t) + \frac{1}{b}G(0) + \frac{1}{b}\int_{0}^{t} \dot{G}(t-\tau)\mathrm{d}\tau = 0, \\ \frac{1}{a}\dot{G}(t) + \frac{1}{b}G(0) + \frac{1}{b}(G(t) - G(0)) = 0, \\ \frac{1}{a}\dot{G}(t) + \frac{1}{b}G(t) = 0. \end{aligned} \tag{163}$$

De oplossing hiervan is

$$G(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{a}{b}t} \tag{164}$$

voor een constante C. Als we dit invullen in (162), krijgen we

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{C}{a}\mathrm{e}^{-\frac{a}{b}t} + \frac{C}{b}\int_{0}^{t} \mathrm{e}^{-\frac{a}{b}(t-\tau)}\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{C}{a}\mathrm{e}^{-\frac{a}{b}t} + \frac{C}{b}\frac{b}{a}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{b}t}) \\ &= \frac{C}{a}, \end{aligned} \tag{165}$$

dus $C = a$, en we vinden dat $G(t) = a\mathrm{e}^{-\frac{a}{b}t}$ als hij differentieerbaar is. We hebben nu C dusdanig gekozen dat aan de afgeleide van (160) naar t is voldaan, dus de vergelijking klopt op een willekeurige additieve constante na. Om te laten zien dat deze constante 0 is, laten we zien dat de limiet van t naar 0 van de linkerkant met deze functie G ingevuld inderdaad 0 is. Omdat $|G(t)| \leq a$ voor alle $t > 0$, kunnen we de linkerkant afschatten op

$$\begin{aligned} |\int_0^t (\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\tau)G(t-\tau)\mathrm{d}\tau| &\leq \int_0^t (\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\tau)|G(t-\tau)|\mathrm{d}\tau \\ &\leq \int_0^t (1 + \frac{a}{b}\tau)\mathrm{d}\tau = t + \frac{a}{2b}t^2, \end{aligned} \tag{166}$$

en dit gaat inderdaad naar 0 als we t naar 0 laten gaan. Deze functie G voldoet dus inderdaad aan de oorspronkelijke vergelijking. Het verband tussen σ en ϵ dat uit G volgt, is dan volgens vergelijking (149) gegeven door

$$\sigma(t) = \int_0^t a\mathrm{e}^{-\frac{a}{b}(t-\tau)}\dot{\epsilon}(\tau)\mathrm{d}\tau + \epsilon(0)a\mathrm{e}^{-\frac{a}{b}t}. \tag{167}$$

Als we dit vergelijken met vergelijking (142) zien we dat inderdaad

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{b}\sigma(t) &= \frac{1}{a}(a\dot{\epsilon}(t) - \int_0^t \frac{a^2}{b}\mathrm{e}^{-\frac{a}{b}(t-\tau)}\dot{\epsilon}(\tau)\mathrm{d}\tau - \epsilon(0)\frac{a^2}{b}\mathrm{e}^{-\frac{a}{b}t}) \\ &\quad + \frac{1}{b}(\int_0^t a\mathrm{e}^{-\frac{a}{b}(t-\tau)}\dot{\epsilon}(\tau)\mathrm{d}\tau + \epsilon(0)a\mathrm{e}^{-\frac{a}{b}t}) \\ &= \dot{\epsilon}(t). \end{aligned} \tag{168}$$

We bekijken nu het geval waarin $J(t)$ de vorm van een machtsfunctie heeft, met een exponent tussen de 0 en de 1:

$$J(t) = a\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \qquad (a > 0, 0 < \alpha < 1, t > 0). \tag{169}$$

Hier hebben we de evenredigheidsconstante opgesplitst in a en $\Gamma(1+\alpha)$ om de latere resultaten beter uit te laten komen. Deze vorm van de creep compliance is voor praktische toepassingen interessant, omdat veel andere functies benaderd kunnen worden door machtsfuncties voor korte tijden na de verstoring.

Om de relaxation modulus te vinden, gebruiken we de volgende identiteit met behulp van de Beta-functie:

$$\begin{aligned} t &= t\frac{\mathrm{B}(1+\alpha, 1-\alpha)\Gamma(2)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)} = t\frac{\mathrm{B}(1+\alpha, 1-\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \\ &= t\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 x^\alpha(1-x)^{-\alpha}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{170}$$

Door hierin $\tau = tx$ te substitueren, krijgen we

$$\begin{aligned} t &= t\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 (tx)^\alpha (t-tx)^{-\alpha}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (\tau)^\alpha (t-\tau)^{-\alpha}\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{171}$$

Uit deze identiteit kunnen we nu halen dat, om aan vergelijking (160) te voldoen, de functie G gegeven moet worden door

$$G(t) = \frac{1}{a}\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \tag{172}$$

Als we uitgaan van overal differentieerbare functies σ en ϵ, met dus $\sigma(0) = \epsilon(0) = 0$, krijgen we als we de reactiefuncties invullen in (149) en (148), dat

$$\epsilon(t) = \int_0^t a\frac{(t-\tau)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\dot{\sigma}(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{173}$$

$$\sigma(t) = \int_0^t \frac{1}{a}\frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\dot{\epsilon}(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{174}$$

Omdat de integranden beide 0 zijn voor $\tau < 0$, kunnen we de integratiegrenzen uitbreiden om bij $-\infty$ te beginnen. Met partieel integreren vinden we dan:

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= \int_{-\infty}^t a\frac{(t-\tau)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\dot{\sigma}(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^t a\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\sigma(\tau)\mathrm{d}\tau = a\,{}_{-\infty}\mathbf{D}_t^{-\alpha}\sigma(t) \end{aligned} \tag{175}$$

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \int_{-\infty}^t \frac{1}{a}\frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\dot{\epsilon}(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{a}\,{}_{-\infty}^{\;\;C}\mathrm{D}_t^\alpha\epsilon(t) \\ &= \frac{1}{a}\,{}_{-\infty}\mathbf{D}_t^\alpha\epsilon(t), \end{aligned} \tag{176}$$

waarbij voor de laatste gelijkheid gebruik is gemaakt van Stelling 3.22, waar aan de eisen is voldaan omdat $\epsilon(t) = 0$ voor $t < 0$. We zien dus dat voor deze gevallen van J en G het verband tussen σ en ϵ gegeven wordt door de fractionele afgeleide- en integraaloperatoren, in het bijzonder de Riemann-Liouville of Caputo fractionele afgeleiden en integralen. De theorie die we in de eerdere hoofdstukken behandeld hebben kan dus gebruikt worden om voor dit soort stoffen het verband tussen stress en strain te bekijken. De voorbeelden die we behandeld hebben geven dus meteen ook voorbeelden voor het verband tussen stress en strain.

Voorbeeld 5.11. Als de stress σ gegeven wordt door $\sigma(t) = t^q$ voor een $q \geq 0$ voor $t > 0$, dan volgt uit Voorbeeld 3.8 dat de strain gegeven wordt door

$$\epsilon(t) = \frac{a\Gamma(q+1)}{\Gamma(\alpha+q+1)} x^{q+\alpha}. \tag{177}$$

De reactie op een machtsfunctie is dus ook weer een machtsfunctie, die iets sneller stijgt.

6 Conclusie

We hebben drie verschillende definities voor fractionele afgeleiden gezien, en twee voor fractionele integralen. Elk van deze definities is op zijn eigen manier een uitbreiding van de afgeleiden en integralen van gehele orde. Bij het onderling vergelijken van deze definities is gebleken dat onder bepaalde voorwaarden de definities hetzelfde zijn. Voor de Fourier fractionele afgeleide geldt zelfs op de hele ruimte van de Schwartzfuncties dat de uitkomst van de Fourier fractionele afgeleide hetzelfde is als de andere twee afgeleiden. We kunnen de Fourier fractionele afgeleide voor Schwartzfuncties dus in plaats van een definitie van fractionele afgeleiden ook zien als een formule die volgt uit de Riemann-Liouville of Caputo fractionele afgeleide. Echter, de definitie voor getemperde distributies levert ook soms resultaten op, die niet altijd met de andere definities gereproduceerd kunnen worden. Het behandelen van de Fourier fractionele afgeleide als losse definitie heeft dus daarvoor zin.

Het feit dat op sommige gebieden van overlap de verschillende definities van fractionele afgeleiden en integralen dezelfde resultaten opleveren, zou een aanwijzing kunnen zijn dat er een algemenere definitie van fractionele afgeleiden en integralen is, waarvan de formules die we nu als definities gebruiken speciale gevallen zouden zijn. Echter, aangezien de Caputo en de Riemann-Liouville definities ook regelmatig van elkaar afwijken, zou het ook kunnen dat slechts een van deze twee opgenomen kan worden in een algemenere definitie, of dat er nog een extra parameter nodig gaat zijn in de algemenere definitie, waarvan twee bepaalde waarden dan deze twee definities op zouden leveren.

In de behandeling van visco-elastische stoffen hebben we gezien dat de definities, in ieder geval de Caputo of Riemann-Liouville fractionele afgeleiden, daadwerkelijk in de praktijk toepasbaar zijn.

Als antwoord op de onderzoeksvraag “Hoe kunnen de definities van afgeleiden en integralen uitgebreid worden tot willekeurige reële orde, op een praktisch toepasbare manier?” kunnen we nu niet een eenduidig antwoord geven. De Riemann-Liouville fractionele integralen kunnen namelijk op twee verschillende manieren uitgebreid worden tot fractionele afgeleiden, en we hebben geen reden gevonden om een van beide definities slechter of beter te vinden dan de andere. Verder is de Fourier fractionele afgeleide een onafhankelijke definitie, die soms overeenkomt met de andere twee, maar soms ook niet. Al deze definities zijn dus geldige definities die de definities van afgeleiden en integralen uitbreiden tot een deel van de reële getallen, maar er moet een deel toegevoegd worden aan de definitie, of twee definities moeten samengenomen worden, om alle reële getallen als orde te kunnen nemen. Wat betreft praktische toepasbaarheid hebben we nu alleen een toepassing van de Caputo en Riemann-Liouville fractionele afgeleiden behandeld, maar een variant op de Fourier fractionele afgeleide kan ook in toepassingen gebruikt worden, met name in de fractionele Schrödinger-vergelijking, zie [3]. Elk van de definities die we behandeld hebben kan dus als antwoord op de onderzoeksvraag gezien worden, maar er zou een algemener antwoord kunnen zijn, waarvan deze definities dan speciale gevallen blijken te zijn.

Referenties

[1] J.J. Duistermaat and J.A.C. Kolk. *Distributions: Theory and Applications.* Cornerstones. Birkhäuser Boston, 2010.

[2] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I.* Classics in Mathematics. Springer, 2003.

[3] N. Laskin. Principles of fractional quantum mechanics. *arXiv preprint arXiv: 1009.5533*, 2010.

[4] G.W. Leibniz. Letter from Hannover, Germany to G.F.A. L'Hôpital, September 30, 1695. *Leibniz Mathematische Schriften. Olms-Verlag, Hildesheim, Germany*, pages 301–302, 1962.

[5] J. Liouville. Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions. *Journal de l'École Polytechnique, Paris 13 (21 cah.)*, pages 1–69, 1832.

[6] F. Mainardi. Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics. In *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics (Udine, 1996)*, volume 378 of *CISM Courses and Lectures*, pages 291–348. Springer, Vienna, 1997.

[7] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications.* Mathematics in science and engineering. Academic Press, 1999.