Loterijlogica: Een onderzoek naar de relevantie van de loterijparadox voor argumentatielogica's

Naomi Prins
Studentnummer: 3978990
n.v.prins@students.uu.nl

Bachelorscriptie Kunstmatige Intelligentie
7,5 ECTS
Universiteit Utrecht
Begeleider: Henry Prakken
Tweede beoordelaar: Janneke van Lith

18 mei 2016

1 Inleiding

Stel je een eerlijke loterij voor met een miljoen loten, elk lot heeft evenveel kans om getrokken te worden en er is precies één winnend lot. Het lijkt redelijk om te stellen dat "lot nummer j niet zal winnen (voor elke j tussen 1 en 1.000.000)." Vervolgens is het mogelijk om de conjunctie te nemen van al deze proposities. Dit betekent dat "geen enkel lot het winnende lot zal zijn." Maar dit is in tegenspraak met het feit dat "precies één lot zal winnen."

Dit is de formulering zoals Kyburg de loterijparadox voor het eerst publiceerde [7, p. 197]. Sindsdien is er meer onderzoek naar gedaan en hebben veel filosofen en logici hun mening gegeven of oplossingen gezocht. Een aantal voorbeelden van wetenschappers die zich hiermee bezig houden zijn Foley [4], [5], Klein[6], Makinson [9], Nelkin [10], Pollock [11], [12] en Ryan [13]. Doordat er een tegenspraak in de argumentatie voorkomt, lijkt het erop dat er een fout in zit. Daarom wordt vaak de vraag gesteld bij welke stap in het redeneringsproces deze fout zit. Dit kan bij het aannemen van de conjunctie zijn, maar bijvoorbeeld ook al eerder, bij het aannemen van een gerechtvaardigd geloof over de premisse dat "lot nummer j zal verliezen". Een andere oplossing wordt gevonden wanneer inconsistentie geaccepteerd wordt. De loterijparadox vormt dus een klassiek probleem binnen de filosofie en de logica.

Niet alleen binnen de filosofie en de logica wordt nagedacht over de loterijparadox, ook voor de kunstmatige intelligentie vormt het mogelijk een probleem. Dit omdat argumentatielogica's veel gebruikt worden in dit vakgebied. Ze worden gebruikt om argumenten voor en tegen een standpunt te construeren [2]. Hierbij worden acceptabele argumenten geselecteerd en er wordt bepaald of het standpunt aanvaard kan worden en op deze manier kunnen conclusies gerechtvaardigd worden [3]. Argumentatielogica's laten op een abstracte, formele en gestructureerde manier zien hoe wij mensen redeneren. Hierbij is vaak sprake van onzekerheid, onvolledigheid en zelfs tegenstrijdige informatie. Dit wordt binnen de kunstmatige intelligentie gebruikt voor bijvoorbeeld besluitvorming en het modelleren van interacties tussen *agents*.

Een argumentatiesysteem is een vorm van niet-monotone logica. Niet-monotone logica is een formele methode die er voor zorgt dat een intelligent systeem adequaat kan redeneren met incomplete en veranderlijke informatie [1, p. 5]. Hierbij wordt gebruik gemaakt van *defeasible reasoning*, weerlegbaar redeneren. Regels, premissen en conclusies kunnen aangevallen worden door andere argumenten. Daardoor zijn argumenten dus weerlegbaar. Dit is anders dan deductieve logica's waarbij premissen leiden tot een logisch zekere conclusie. Wanneer er weerlegbaar geredeneerd wordt kunnen conclusies weerlegd worden door het toevoegen van nieuwe informatie [11]. Argumentatiesystemen geven één of meerdere extensies terug. Dit zijn verzamelingen van acceptabele argumenten en ze laten zien welke conclusies gerechtvaardigd zijn [3]. Regel-gebaseerde argumentatielogica's maken gebruik van strikte en weerlegbare regels. Het probleem hierbij is dat ze soms tot tegenintuïtieve resultaten leiden. Om dit probleem op te lossen zijn rationaliteitspostulaten gedefinieerd. De drie rationaliteitspostulaten zoals geformuleerd door Caminada en Amgoud [3, p. 294] zijn:

- *Closure* of sluiting is het geval wanneer het antwoord van een argumentatiesysteem gesloten is onder strikte regels. Dus als we het systeem voorzien van de strikte regel $a \to b$ en a komt er uit als gerechtvaardigde conclusie, dan zou b er ook uit moeten komen als gerechtvaardigde conclusie.

- *Direct Consistency* of directe consistentie van een verzameling wordt bereikt dan en slechts dan als er geen twee proposities in de verzameling zitten die elkaar direct tegen spreken, dus proposities die elkaars negatie zijn (bijvoorbeeld ϕ en $\neg\phi$).

- *Indirect Consistency* of indirecte consistentie wordt bereikt als de sluiting onder de verzameling strikte regels van de verzameling van gerechtvaardigde conclusies direct consistent is.

Volgens Caminada en Amgoud [3] zou elk regel-gebaseerd argumentatiesysteem deze postulaten moeten gehoorzamen. Deze rationaliteitspostulaten worden gebruikt om argumentatiesystemen te beoordelen. De loterijparadox werpt mogelijk een ander licht op argumentatielogica's en rationaliteitspostulaten. Dit komt doordat een ongewone situatie zoals eerder genoemde loterij ons laat nadenken over de correctheid van de rationaliteitspostulaten. Er wordt niet voldaan aan alle drie de bovenstaande postulaten in het geval van de loterijparadox, want het leidt tot een tegenspraak.

Het doel van deze scriptie is het, door middel van literatuuronderzoek, inzichtelijker maken van het probleem dat de loterijparadox opwerpt voor de argumentatielogica's en rationaliteitspostulaten. Om dit te bereiken is de volgende onderzoeksvraag opgesteld:

> Wat is de relevantie van de loterijparadox voor argumentatielogica's binnen de kunstmatige intelligentie?

Om deze vraag te beantwoorden zullen de posities van verschillende wetenschappers vergeleken worden in paragraaf 2. Hierbij zal gekeken worden naar kennis en gerechtvaardigd geloof, *modus ponens* en adjunctie, en de consistentie van conclusies. Vervolgens zal in paragraaf 3 de relevantie van deze posities voor argumentatielogica's behandeld worden. Daarna zal ik in paragraaf 4 mijn eigen positie bepalen. Tot slot wordt er in paragraaf 5 een conclusie gegeven en worden er suggesties voor vervolgonderzoek gedaan.

2 Mogelijke oplossingen voor de loterijparadox

Aan de hand van drie vragen worden de posities van verschillende wetenschappers uitgelegd en vergeleken. Ten eerste zal er onderzocht worden of het mogelijk is om kennis of een gerechtvaardigd geloof te hebben over het verliezen van een lot. Hierbij wordt gevraagd of een zeer hoge kans op een gebeurtenis voldoende bewijs is om een overtuiging te rechtvaardigen. Ten tweede zal er gekeken worden naar het gebruik van regels die niet probabilistisch geldig zijn. Moeten dit soort regels verworpen worden? Of kunnen we ze toch gebruiken? Ten derde zullen de standpunten over (in)consistentie van conclusies vergeleken worden. Wanneer een gerechtvaardigd geloof niet mogelijk is, probabilistisch ongeldige regels niet meer gebruikt worden of inconsistentie toegelaten wordt, zou de paradox opgelost kunnen worden.

2.1 Is het mogelijk om kennis of een gerechtvaardigd geloof te hebben over het verliezen van een lot?

Voordat de standpunten over kennis en gerechtvaardigd geloof vergeleken kunnen worden, is het noodzakelijk om te begrijpen wat er wordt verstaan onder kennis, gerechtvaardigd geloof en *rational acceptance*. Om te spreken van kennis worden er drie eisen gesteld. Een persoon S heeft kennis over p dan en slechts dan als p waar is en

S overtuigd is dat p en S gerechtvaardigd is in de overtuiging dat p [14]. Een persoon kan gerechtvaardigd zijn in het geloven van p als hij of zij een goede reden heeft voor die overtuiging. Dit kan bijvoorbeeld door waarneming, introspectie, geheugen, beredenering of bewijs [14]. *Rational acceptance* bestaat uit drie eisen [15]. Het is rationeel om een zeer waarschijnlijke propositie te accepteren. Het is niet rationeel om een propositie te accepteren waarvan je je bewust bent dat deze inconsistent is. Als het rationeel is om een propositie A te accepteren en het is rationeel om een andere propositie B te accepteren, dan is het rationeel om $A \wedge B$ te accepteren. De loterijparadox laat zien dat deze drie eisen gezamenlijk inconsistent zijn [15]. Het verschil tussen gerechtvaardigd geloof en *rational acceptance* is dat als de propositie waar is, dan leidt *rational acceptance* niet per se tot kennis en gerechtvaardigd geloof wel.

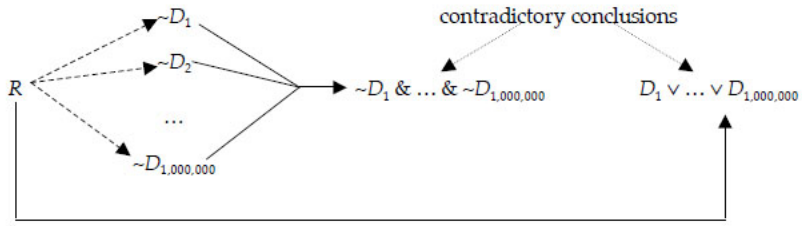
Nelkin beschrijft in haar artikel [10] twee formele versies van de loterijparadox: een kennisversie en een rationaliteitsversie. In beide versies heeft Jim een lot (laten we deze t1 noemen) gekocht voor de in de inleiding genoemde eerlijke loterij met een miljoen loten. De kennisversie [10, pp. 373-374] is als volgt:

1. Jim weet dat zijn lot (t1) zal verliezen.
2. Als Jim weet dat zijn lot (t1) zal verliezen, dan weet hij dat t2 zal verliezen, hij weet dat t3 zal verliezen ... en hij weet dat t1.000.000 zal verliezen.
   Dus,
3. Jim weet dat t1 zal verliezen ... en Jim weet dat t1.000.000 zal verliezen. (1, 2)
4. Jim weet dat ofwel t1 niet zal verliezen of t2 niet zal verliezen ... of t1.000.000 niet zal verliezen.
5. Stellingen van de volgende vorm vormen een inconsistente verzameling: (a) p1 ... (n) pn, (n+1) niet p1 of ... niet pn.
   Dus,
6. Jim heeft kennis van proposities die een inconsistente verzameling vormen. (3, 4, 5)
7. Het is niet mogelijk om kennis te hebben van proposities die een inconsistente verzameling vormen.
   Dus,
8. (1), (2), (4), (5) of (7) is fout.

De rationaliteitsversie vervangt “Jim weet dat” of “Jim heeft kennis van” door “het is rationeel voor Jim om te geloven dat.” Bij de kennisversie geeft Nelkin [10] aan dat (1), (2) of (4) verworpen zouden kunnen worden om de fout op te lossen. (5) kan niet verworpen worden, omdat het een logische waarheid betreft. (7) kan niet verworpen worden, omdat het volgt uit twee volgens Nelkin [10] zeer plausibele assumpties: kennis impliceert waarheid en inconsistente dingen kunnen niet allebei waar zijn. Wat mij hier opvalt is dat ze (3) niet noemt als een van de premissen die fout zouden kunnen zijn. Op het verwerpen van deze premisse kom ik in paragraaf 2.2 terug. Ook kom ik in paragraaf 2.3 terug op het verwerpen van (7).

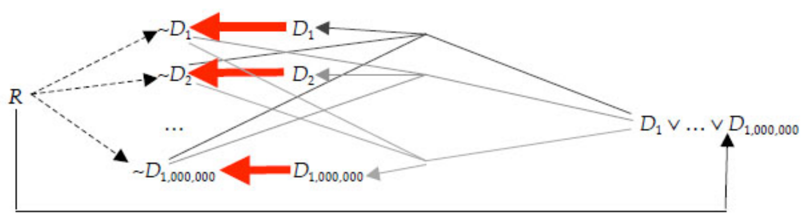
Nelkins [10] intuïtie is dat (1) verworpen zou moeten worden. Jim heeft simpelweg geen kennis over het verliezen van zijn lot. Jims overtuiging dat zijn lot zal verliezen is gebaseerd op kansrekening. Het feit dat zijn lot zal verliezen veroorzaakt niet zijn overtuiging. Er is geen causaal verband tussen zijn geloof en het daadwerkelijk verliezen van de loterij. Jim heeft daardoor volgens Nelkin [10] geen gerechtvaardigd geloof en dus geen kennis over het verliezen van zijn lot. Het is echter intuïtief minder duidelijk dat (1) verworpen zou moeten worden wanneer er gekeken wordt naar *rational acceptance*, want het lijkt er toch op dat het rationeel is voor Jim om te geloven dat zijn lot niet het winnende lot is. Toch beargumenteert Nelkin [10] dat het niet rationeel is. Ook hier vindt ze dat het noodzakelijk is dat er een causaal verband is tussen het feit dat Jim de loterij verliest en zijn geloof daarin. Doordat dit causale verband er niet is, is het niet rationeel voor Jim om te geloven dat hij de loterij zal verliezen. Nelkin [10] is van mening dat een op kans gebaseerd geloof niet voldoende is voor *rational acceptance*. Ze onderbouwt dit door zich voor te stellen dat Jim wel de loterij wint, achteraf kan Jim dan niet zeggen dat zijn geloof fout was. Dit komt doordat zijn geloof nog steeds gebaseerd was op kansen en die kansen zijn volgens Nelkin [10] niet veranderd door Jims winst. Wat hier opvallend is, is dat de kansen achteraf wel veranderd zijn doordat er nieuwe informatie is. Ryan [13] is het met Nelkin [10] eens, zij zegt dat statistisch bewijs in sommige gevallen geen rationeel geloof rechtvaardigt.

Ook Pollock [11] is van mening dat je geen gerechtvaardigd geloof kan hebben over het verliezen van een lot. Het schema dat Pollock [11] gebruikt om zijn argumentatie van de loterijparadox te laten zien staat hieronder. De gewone pijlen zijn strikte regels. De gestippelde pijlen zijn weerlegbare regels. R is de beschrijving van de loterij, die je misschien ergens in de krant gelezen hebt. D_i is het winnen van lot nummer i.



Figuur 1. Loterijparadox volgens Pollock [11, p. 9].

Vervolgens zegt hij: voor elk lot dat je uitkiest heb je een reden om te denken dat het zal verliezen. Maar je hebt ook een reden om te denken dat het lot zal winnen, want je hebt een reden om te denken dat alle andere loten zullen verliezen en je weet dat er precies één lot zal winnen [11]. Hij laat dit zien met behulp van onderstaand schema. Hierbij zijn de dikke rode pijlen aanvalsrelaties.



Figuur 2. Loterijparadox met *collective defeat* volgens Pollock [11, p. 9].

Er is hier sprake van *collective defeat*. Dit is wanneer twee of meer argumenten elkaar verslaan [11]. Hij zegt op deze manier de paradox opgelost te hebben. Je zou van geen enkel lot moeten geloven dat het zal verliezen totdat de uitslag van de loterij bekend is [11]. Natuurlijk is het wel gerechtvaardigd om te geloven dat het zeer onwaarschijnlijk is dat het lot zal winnen. Dit laatste geloof zal niet tot een inconsistentie leiden, waardoor er dus geen sprake meer is van een paradox [11]. Opvallend is dat Pollock [11] wel het statistisch syllogisme aanhoudt. Dit wordt gebruikt om een conclusie te rechtvaardigen totdat er eventueel nieuwe informatie bij komt die de conclusie weerlegt. Voor het statistisch syllogisme gebruikt hij de volgende definitie: X is een A en de kans dat A een B is is hoog, hieruit kan weerlegbaar afgeleid worden dat X een B is [11]. Deze weerlegbare redenering is ook gebaseerd op kansen, dus het is niet zo consequent van Pollock [11] om dat wel te accepteren terwijl je volgens hem een overtuiging niet mag rechtvaardigen met behulp van kansen.

Volgens Foley [5] is het hebben van een overtuiging in het verliezen van je lot wel gerechtvaardigd en rationeel. Je hebt een zeer sterk bewijs voor de propositie dat lot nummer 1 niet zal winnen. Je hebt een even sterk bewijs voor elk ander individueel lot. Bovendien heb je een zeer sterk bewijs voor de propositie dat precies één lot wel het winnende lot zal zijn. Foley [5] is dus van mening dat het wel mogelijk is om overtuigingen te rechtvaardigen met behulp van kansen. Als de kans zeer groot is dat iets gebeurt, dan geldt dat als voldoende bewijs. Volgens hem is het echter niet zo dat je een zeer sterk bewijs hebt voor de conjunctie (3). Je hebt zelfs een zeer sterk bewijs tegen deze conjunctie, omdat je weet dat precies één lot zal winnen. In paragraaf 2.2 wordt verder uitgelegd waarom adjunctie volgens Foley [5] ongeschikt is in de context van de loterijparadox.

2.2 Kunnen *modus ponens* en adjunctie veilig gebruikt worden bij het redeneren met onzekerheden?

Hierboven werd al kort genoemd dat adjunctie volgens Foley [5] niet geschikt is in bepaalde situaties. Dit heeft te maken met het feit dat er geredeneerd wordt met onzekerheden en kansen. Een regel is probabilistisch geldig dan en slechts dan als het volgt uit de kansrekening dat de conclusie minstens zo waarschijnlijk is als de minst waarschijnlijke premisse [11]. Volgens Pollock [12] kunnen deductieve inferentieregels die uitgaan van meerdere premissen niet probabilistisch geldig zijn. Regels die niet probabilistisch geldig zijn, kunnen volgens hem dus niet veilig gebruikt worden bij het redeneren met onzekerheden. De regels die voor de loterijparadox het meest relevant zijn, zijn *modus ponens* ($P \to Q, P \vdash Q$) en adjunctie ($P, Q \vdash P \land Q$), adjunctie is dus de introductie van een conjunctie.

Wanneer regels gebruikt worden die niet probabilistisch geldig zijn, zoals *modus ponens* en adjunctie, treedt het probleem op dat we niet kunnen weten wat de waarschijnlijkheid is die we toekennen aan de conclusie. Er is geen manier om de waarschijnlijkheid uit te rekenen voor $P \land Q$ vanuit P en Q. Je weet alleen dat $P \land Q$ een lagere waarschijnlijkheid moet krijgen dan P en Q afzonderlijk [11]. Dus als we een gerechtvaardigd geloof hebben van P en van Q, dan volgt daaruit niet dat we een gerechtvaardigd geloof hebben van $P \land Q$ [12]. Toegepast op de loterijparadox betekent dit dat het gerechtvaardigd is om de afzonderlijke proposities te geloven, namelijk dat "lot nummer 1 zal verliezen", "lot nummer 2 zal verliezen", ... "lot nummer 1.000.000 zal verliezen." Maar het is niet gerechtvaardigd de conjunctie hiervan te geloven, namelijk dat "lot nummer 1 zal verliezen en lot nummer 2 zal verliezen ... en lot nummer 1.000.000 zal verliezen." De loterijparadox is een van de ongewone gevallen waarin het volgens Foley [4] niet rationeel is om overtuigingen samen te voegen door middel van een conjunctie.

Ook volgens Kyburg [8] is het afleiden van $P \land Q$ uit P en Q een misvatting. Hij noemt dit *conjunctivitis*. Het lijkt redelijk om twee elementen in een *knowledge base* samen te voegen met een conjunctie. Het zou niet veel problemen moeten opleveren. Waar het probleem volgens hem zit, is dat je dan ook oneindig veel elementen kan samenvoegen met conjuncties. Dit voelt intuïtief niet goed aan. Hij zegt dat hij goede redenen heeft om elke propositie die hij gelooft te geloven, maar hij heeft ook goede redenen om te geloven dat sommige van die proposities onwaar zijn. Volgens Kyburg [8] is het dus niet mogelijk om de conjunctie te nemen van alle proposities die je gelooft.

Pollock [12] gaat tegen Kyburg [8] in door te zeggen dat zowel deductief als niet-deductief redeneren op deze manier vrijwel geen rol meer kunnen spelen in het rechtvaardigen van overtuigingen. Dit komt volgens hem doordat de meeste van onze standaard logische regels niet probabilistisch geldig zijn. Regels zoals *modus ponens* en adjunctie zijn misschien niet probabilistisch geldig, maar je wil ze wel graag houden en kunnen gebruiken [11], [12]. Hij laat dit zien met een voorbeeld [12, pp. 10-11]. Stel dat je appels in een vat telt. Het is een feit dat er 100 appels in dit vat zitten. Je neemt steeds een appel uit het vat en bestudeert het om te zien of het echt een appel is en daarna voeg je deze appel toe aan je optelling. Laten we aannemen dat je de tel niet verliest en dat de enige bron van onzekerheid komt uit het beoordelen of het een echte appel is. Bij het tellen maak je gebruik van adjunctie, want je neemt aan dat het eerste object een appel is en dat het tweede object een appel is, etc. Zonder adjunctie zou het dus onmogelijk zijn om objecten te tellen [12].

Volgens Pollock [11] is het niet mogelijk de waarschijnlijkheid uit te rekenen voor $x \wedge y$ vanuit x en y gegeven bewijsmateriaal e. We weten alleen dat deze kans niet hoger kan zijn dan de laagste van de afzonderlijke x en y. Dus als we bijvoorbeeld weten dat $p(x \mid e) = 0,9$ en $p(y \mid e) = 0,9$, dan $p(x \wedge y \mid e) \leq 0,9$.

Voor het bepalen van een ondergrens van de kans op een conjunctie geeft Makinson [9] een eventuele oplossing. Hij zegt dat deze ondergrens bepaald kan worden met behulp van $p(x \wedge y \mid e) \geq p(x \mid e) + p(y \mid e) - 1$. In ons simpele voorbeeld wordt dat:

$p(x \wedge y \mid e) \geq 0,9 + 0,9 - 1$
$p(x \wedge y \mid e) \geq 0,8$
$0,8 \leq p(x \wedge y \mid e) \leq 0,9$

Makinson [9] geeft hierbij aan dat als de kansen van x en y “voldoende hoog” zijn, de kans op de conjunctie $x \wedge y$ “redelijk hoog” zal zijn. Wat hij onder voldoende hoog verstaat wordt niet uitgelegd. We kunnen deze berekening voor de waarschijnlijkheid van een conjunctie nu toepassen op de loterij. Gegeven is bewijsmateriaal e, de beschrijving van de loterij. We weten de kans op het verliezen van lot nummer 1 $p(\neg L_1 \mid e) = 0,999999$, deze kans lijkt mij “voldoende hoog” om te kunnen gebruiken. We weten ook de kans op het verliezen van lot nummer 2 $p(\neg L_2 \mid e) = 0,999999$. Hierna nemen we de conjunctie en rekenen we de ondergrens van de kans daarop uit:

$p(\neg L_1 \wedge \neg L_2 \mid e) \geq p(\neg L_1 \mid e) + p(\neg L_1 \mid e) - 1$
$p(\neg L_1 \wedge \neg L_2 \mid e) \geq 0,999999 + 0,999999 - 1$
$p(\neg L_1 \wedge \neg L_2 \mid e) \geq 0,999998$
...
$p(\neg L_1 \wedge ... \wedge \neg L_{1.000.000} \mid e) \geq 0$

Dit laat zien dat de waarschijnlijkheid steeds lager wordt als er meer informatie gekoppeld wordt met een conjunctie. Bovendien zegt Makinson [9] dat we de conjunctieregel beperkt toe mogen passen. De ondergrens van premissen die samengevoegd worden met een conjunctie moeten boven een bepaalde drempelwaarde zitten, oftewel “voldoende hoog” zijn. Deze drempelwaarde specificeert Makinson [9] niet. Zelf denk ik dat de drempelwaarde minimaal 0,5 moet zijn, maar eventueel hoger zou kunnen liggen. Met deze eis kunnen we niet de conjunctie vormen van het verliezen van de miljoen loten, want eerder gaat het al fout. Wanneer we de helft van alle loten in een conjunctie hebben gezet geldt $p(\neg L_1 \wedge ... \wedge \neg L_{500.000} \mid e) \geq 0,5$. De ondergrens van de kans is dus niet meer “voldoende hoog” waardoor we het volgende lot niet met een conjunctie toe mogen voegen. Op de manier van Makinson [9] is het wel toegestaan om de conjunctieregel te gebruiken, maar dit mag alleen met mate en niet bij te grote verzamelingen. Daardoor wordt in het geval van de loterij de conjunctie van het verliezen van alle loten niet geconcludeerd en is er dus geen tegenspraak met “precies één lot zal winnen.”

2.3 Is het noodzakelijk voor een gerechtvaardigd geloof dat conclusies consistent zijn?

Foley [4], [5] is van mening dat het rationeel kan zijn om inconsistente overtuigingen te hebben en er ook bewust van te zijn. Hij omschrijft een inconsistente verzameling van overtuigingen als een verzameling waarbij het logisch onmogelijk is dat alle elementen waar zijn. Hierbij is het dus mogelijk dat een persoon inconsistente overtuigingen heeft zonder dat zijn of haar overtuigingen elkaar direct tegenspreken [4]. Natuurlijk weten we dat het niet ideaal kan zijn om inconsistente overtuigingen te hebben. Je weet dat er ten minste één onwaar moet zijn. Dit is echter geen reden dat het niet rationeel zou zijn om inconsistente overtuigingen te hebben [5]. Bovendien is het soms gemakkelijker om een kleine inconsistentie in de verzameling van overtuigingen te hebben dan om veel moeite te doen om die ene onware propositie te corrigeren [5]. Het kan rationeel zijn om te geloven dat de loterij eerlijk is en dat precies één lot zal winnen en om ook van elk lot te geloven dat het niet zal winnen. Het is ten slotte een grote loterij en je hebt zeer sterk bewijs voor de propositie dat lot nummer 1 niet zal winnen, omdat de kans heel klein is. Je hebt zelfs zeer sterk bewijs voor ieder afzonderlijk lot dat het niet zal winnen, ook al weet je dat één van deze proposities onwaar is. Voor veel alledaagse situaties kan er een loterij-achtige paradox gevormd worden. Als het onmogelijk is om inconsistente overtuigingen te hebben, zou het vrijwel onmogelijk voor ons worden om gerechtvaardigd te zijn in onze overtuigingen [4].

Klein [6] is ook van mening dat inconsistente verzamelingen van overtuigingen acceptabel kunnen zijn. Hij voegt hieraan toe dat het om een zwakke inconsistente verzameling moet gaan. In deze verzameling moeten minimaal twee conjuncties van proposities genomen zijn. Dit is het geval bij de loterijparadox, omdat er een heel grote conjunctie genomen is van het verliezen van ieder afzonderlijk lot. Hij zegt dat inconsistente verzamelingen acceptabel kunnen zijn, omdat we weten dat we fouten kunnen maken. We weten dat we onware proposities geloven, ook al zijn we nog zo zorgvuldig in het verzamelen en analyseren van deze proposities. Er is niets dat ons tegenhoudt om inconsistente overtuigingen te hebben. Klein [6] zegt zelfs dat de totale verzameling van acceptabele proposities van iedereen zwak inconsistent is.

Als het soms rationeel kan zijn om inconsistente overtuigingen te hebben, wanneer is dit dan toegestaan? Makinson [9] zegt dat inconsistente overtuigingen rationeel kunnen zijn als het gaat om een groot aantal overtuigingen, zoals bij de miljoen loten van onze loterij het geval is. Hierbij mogen al deze proposities rationeel geaccepteerd worden, ondanks hun gezamenlijke inconsistentie. Als de loterij minder loten zou hebben, bijvoorbeeld maar 12, dan willen we inconsistentie niet toestaan [9]. Een ander criterium dat Makinson [9] noemt voor het toestaan van inconsistentie is dat de moeite die nodig is om te corrigeren te hoog is in vergelijking met de schade die een inconsistentie oplevert als deze behouden wordt. Het kan dus zo zijn dat het te veel moeite kost om een inconsistentie te corrigeren. In zulke gevallen is het beter om de inconsistentie te accepteren.

Niet iedereen vindt dat het rationeel kan zijn om inconsistente overtuigingen te hebben. Ryan [13] is van mening dat consistentie noodzakelijk is voor rechtvaardiging. Een overtuiging moet tussen de andere overtuigingen passen. Als je weet dat een deel van de dingen die je gelooft inconsistent is, weet je dat je een fout hebt gemaakt. Zelfs wanneer we niet de conjunctie nemen van ons gerechtvaardigde geloof dat "lot nummer j zal verliezen" (voor elke j tussen 1 en 1.000.000), is er nog steeds sprake van een inconsistente verzameling overtuigingen. Dit komt doordat je weet dat niet al deze afzonderlijke overtuigingen tegelijkertijd waar kunnen zijn, omdat precies één lot wel zal winnen. Twee proposities p en $\neg p$ kunnen niet tegelijkertijd waar zijn. Je kunt dus niet overtuigd zijn van proposities met die vorm. Als je weet dat een propositie onwaar is, kan je er al niet meer van overtuigd zijn [13].

3 Relevantie voor Argumentatielogica's

We hebben drie mogelijke oplossingen gezien voor de loterijparadox. Dit zijn het verwerpen van gerechtvaardigd geloof, het verwerpen van conjunctie en het toestaan van inconsistente overtuigingen. Deze oplossingen kunnen niet zonder problemen gebruikt worden, want ze zijn van invloed op de rationaliteitspostulaten en argumentatielogica's. De drie rationaliteitspostulaten van Caminada en Amgoud [3] zijn geformuleerd om argumentatiesystemen mee te beoordelen. Sluiting gaat over strikte regels, niet over weerlegbare regels. Directe consistentie is een postulaat waar wetenschappers het over eens zijn. Het zou absurd zijn als je twee elkaar direct tegensprekende, gerechtvaardigde overtuigingen hebt, zoals bijvoorbeeld "mijn lot zal verliezen" en "mijn lot zal niet verliezen." Het is niet mogelijk om overtuigend bewijs te hebben voor beide proposities [13]. Indirecte consistentie is een postulaat dat door sommigen in twijfel wordt getrokken. Als een systeem voldoet aan indirecte consistentie, dan wordt ook aan directe consistentie voldaan [3]. Als een systeem voldoet aan sluiting en directe consistentie, dan voldoet het ook aan indirecte consistentie [3]. In deze paragraaf zal uitgelegd worden wat de verschillende oplossingen betekenen voor de rationaliteitspostulaten en argumentatielogica's. Ook zal er gekeken worden of de gevolgen wenselijk zijn of niet.

Nelkin [10], Pollock [11], [12] en Ryan [13] zijn van mening dat we niet gerechtvaardigd zijn in het geloven van "lot nummer 1 zal verliezen." Het gevolg hiervan is dat er aan de postulaten voldaan wordt, maar daarvoor moet wel het gerechtvaardigd geloof beperkt worden. Stel we nemen aan dat we geen gerechtvaardigd geloof hebben over de propositie "lot nummer 1 zal verliezen." De kans op deze gebeurtenis is zeer groot, maar niet groot genoeg om ons geloof te rechtvaardigen. We zijn wél gerechtvaardigd in het geloven van "de kans dat lot nummer 1 zal verliezen is zeer groot." De proposities "de kans dat lot nummer j zal verliezen is zeer groot" (met j tussen 1 en 1.000.000) zijn allemaal tegelijkertijd waar en vormen dus geen inconsistente verzameling [11]. Hiervan is het mogelijk om de conjunctie te nemen, dus "de kans dat lot nummer 1 zal verliezen is zeer groot ... en de kans dat lot nummer 1.000.000 zal verliezen is zeer groot." Hierna is het niet mogelijk om "de kans dat lot nummer 1 t/m 1.000.000 zal verliezen is zeer groot" af te leiden. Dus het enige wat we kunnen concluderen is "precies één lot zal winnen." We hebben te weinig informatie om te geloven dat een specifiek lot wel of niet zal winnen. Op deze manier wordt een directe inconsistentie voorkomen.

Foley [4], [5] en Kyburg [7], [8] vinden dat overtuigingen wel gerechtvaardigd worden door zeer hoge waarschijnlijkheden. Om toch de rationaliteitspostulaten te gehoorzamen vinden zij dat de conjunctieregel opgegeven zou moeten worden. Wanneer de conjunctieregel en andere probabilistisch ongeldige regels verworpen worden, wordt bij de loterij de directe inconsistentie van conclusies vermeden. Dit komt doordat er geen propositie geconstrueerd wordt voor "lot nummer 1 t/m 1.000.000 zal verliezen" en deze spreekt dus niet "precies één lot zal winnen" tegen. Op deze manier wordt er voldaan aan directe consistentie. Het is ook mogelijk dat er voldaan wordt aan het postulaat voor indirecte consistentie. Dit komt doordat we de (strikte) conjunctieregel niet meer kunnen toepassen. Zonder deze regel is de sluiting onder de strikte regels van de verzameling conclusies direct consistent. Er zijn een aantal nadelen aan deze oplossing. Volgens Foley [4] is de loterij een van de ongewone gevallen waarin het niet rationeel is om de conjunctie te nemen. In welke gevallen mag de regel dan wel gebruikt worden? Op deze vraag wordt geen duidelijk antwoord gegeven. Een ander probleem is dat je alleen nog een miljoen proposities hebt voor het geloof dat "lot nummer j zal verliezen" en je hebt één propositie dat "precies één lot zal winnen." Hieruit kan je verder niets concluderen. Je kan niets meer zeggen over het geheel, alleen over de individuele proposities. Het is ook een nadeel dat deductieve inferenties opgegeven zullen moeten worden wanneer deze oplossing gebruikt wordt. Het is volgens Pollock [11], [12] wenselijk om regels zoals de conjunctie wel te kunnen gebruiken, omdat anders bijna geen enkele overtuiging nog gerechtvaardigd kan worden. Een mogelijke oplossing om de conjunctie met mate toe te kunnen passen wordt gegeven door Makinson [9]. Hij laat zien dat de kans op een gebeurtenis boven een bepaalde drempelwaarde moet zitten om gebruikt te mogen worden in een conjunctie.

Een andere mogelijke oplossing voor de loterijparadox is het accepteren van indirect inconsistente overtuigingen. Foley [4], [5] en Klein [6] zijn van mening dat het soms rationeel kan zijn om inconsistente overtuigingen te hebben. Zij gaan beiden uit van klassieke logica en gebruiken de standaard semantische definitie van consistentie. Een verzameling proposities is consistent dan en slechts dan als alle elementen in de verzameling tegelijkertijd waar kunnen zijn. Deze definitie komt bij klassieke logica overeen met het postulaat voor indirecte consistentie. Dit komt door de correctheid en volledigheid van klassieke logica. Foley [4] en Klein [6] gebruiken de term "indirect inconsistent" niet en ze maken ook geen onderscheid tussen direct en indirect consistent. Foley [4] en Klein [6] zeggen dat inconsistenties volgens hun definitie rationeel zijn in het geval van de loterijparadox. Toch zou het niet zo moeten zijn dat indirecte inconsistenties leiden tot directe consistenties. Dit gebeurt wel wanneer het postulaat voor sluiting geaccepteerd wordt. Caminada en Amgoud [3] nemen niet aan dat er met klassieke logica gewerkt wordt. Zij definiëren een verzameling als direct consistent dan en slechts dan als er geen twee proposities in de verzameling zitten die elkaar direct tegen spreken, dus proposities die elkaars negatie zijn (bijvoorbeeld ϕ en $\neg\phi$). Het postulaat voor directe consistentie zorgt er voor dat er geen twee elkaar direct tegensprekende conclusies geaccepteerd kunnen worden. In de argumentatie van de loterijparadox komen, afhankelijk van het gekozen model, twee elkaar direct tegensprekende proposities voor. Ook als we de conjunctieregel en indirecte inconsistenties accepteren. Dit komt doordat sluiting ons toestaat om de conjunctie te nemen van "lot nummer j zal verliezen" (voor elke j tussen 1 en 1.000.000), dus "lot nummer 1 zal verliezen en lot nummer 2 zal verliezen en ... en lot nummer 1.000.000 zal verliezen". Bovendien weten we dat er een winnend lot zal zijn dus "lot nummer 1 zal winnen of lot nummer 2 zal winnen of ... of lot nummer 1.000.000 zal winnen."

Met behulp van een van de wetten van Morgan ($\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$) kunnen we dit omschrijven naar "het is niet zo dat lot nummer 1 zal winnen en lot nummer 2 zal winnen en ... en lot nummer 1.000.000 zal winnen." Dit is de negatie van onze eerdere conjunctie van verliezende loten, ze zijn dus van de vorm ϕ en $\neg\phi$. Het postulaat voor directe consistentie kan op deze manier geschonden worden. Volgens Caminada en Amgoud [3] is dit problematisch omdat het kan leiden tot absurditeiten. Zoals wanneer twee proposities die elkaars negatie zijn (ϕ en $\neg\phi$) tegelijkertijd gerechtvaardigd zijn. Het schenden van het postulaat voor indirecte consistentie leidt ertoe dat een gebruiker niet verder zou mogen redeneren met de uitkomsten van het systeem. Dit komt doordat er directe inconsistenties kunnen ontstaan wanneer sluiting toegepast wordt. Ook is bij het accepteren van inconsistenties onduidelijkheid over de situaties waarin inconsistentie toegestaan kan worden. Makinson [9] gebruikt de term "indirect consistent" niet, maar ook zijn definitie komt overeen met het postulaat voor indirecte consistentie. Volgens zijn definitie is een verzameling inconsistent als deze tegenstrijdigheden bevat, of als deze er uit afgeleid kunnen worden [9]. Hij zegt dat deze inconsistenties rationeel zijn wanneer er sprake is van een zeer grote verzameling overtuigingen. Waar de grens van "zeer grote verzameling" ligt is niet duidelijk.

Tabel 1. Voor- en nadelen van de verschillende oplossingen.

	Voordelen	Nadelen
Oplossing 1: Verwerpen van gerechtvaardigd geloof dat gebaseerd is op kansen en het gebruiken van de conjunctie	Directe en indirecte inconsistenties worden voorkomen Postulaten worden gehoorzaamd Meer zekerheid	Gerechtvaardigd geloof wordt beperkt Minder kunnen afleiden
Oplossing 2: Verwerpen van de probabilistisch ongeldige deductieve regels	Directe en indirecte inconsistenties worden voorkomen Postulaten kunnen gehoorzaamd worden	Geen conjunctieregel meer kunnen gebruiken Onduidelijk wanneer de conjunctie wel en niet toegepast mag worden Deductieve inferenties zijn niet meer mogelijk Moeilijker om overtuigingen te rechtvaardigen Geen conclusie kunnen trekken over het geheel
Oplossing 3: Accepteren van indirect inconsistente overtuigingen	Er kunnen meer overtuigingen gerechtvaardigd worden	Postulaat voor indirecte consistentie wordt niet gehoorzaamd Indirecte inconsistenties leiden samen met sluiting tot directe inconsistenties Onduidelijkheid wanneer inconsistentie toegestaan is

De loterijparadox is natuurlijk niet het enige waarvoor we argumentatielogica's gebruiken. De paradox laat ons nadenken over onze formele systemen en de regels die we gebruiken. Doordat de loterijparadox uit komt op een tegenspraak is er waarschijnlijk iets mis in onze argumentatie. Argumentatielogica's die voldoen aan de rationaliteitspostulaten zullen volgens Caminada en Amgoud [3] geen ongewenste resultaten geven. Het probleem is echter dat argumentatielogica's die wel voldoen aan de rationaliteitspostulaten soms niet goed om kunnen gaan met de loterijparadox. Dit is afhankelijk van hoe er naar het probleem gekeken wordt. Pollock [11], [12] laat zien dat er op zijn manier geen sprake is van een probleem. De andere oplossingen hebben wel problemen met de rationaliteitspostulaten. De loterijparadox laat ons zien dat er aanpassingen nodig zijn. Meer algemeen zijn er drie mogelijkheden. In Tabel 1 is een overzicht gegeven van de voor- en nadelen van de drie verschillende oplossingen. De eerste oplossing is dat we ons geloof niet kunnen rechtvaardigen op basis van kansen. Een andere oplossing is om probabilistisch ongeldige regels te verwerpen of met mate toe te passen. De laatste oplossing zou het toestaan van inconsistenties zijn, maar deze gehoorzaamt niet aan alle drie de rationaliteitspostulaten waardoor het postulaat voor indirecte consistentie verworpen zou moeten worden. Het verwerpen van dit postulaat is in Tabel 1 aangegeven als nadeel, maar het zou ook een voordeel kunnen zijn. Dit is afhankelijk van uw mening over de rationaliteitspostulaten. Deze mogelijke oplossingen laten ons zien dat het niet altijd mogelijk is om verder te redeneren en tot een gerechtvaardigde conclusie te komen zonder daarbij rationaliteitspostulaten te schenden.

4 Eigen positie

In paragraaf 3 zijn de gevolgen voor argumentatielogica's van de drie verschillende oplossingen uitgelegd. Het verwerpen van gerechtvaardigd geloof dat gebaseerd is op waarschijnlijkheden zorgt ervoor dat de rationaliteitspostulaten gehoorzaamd worden. Het verwerpen van de conjunctieregel voorkomt directe inconsistentie. Het accepteren van inconsistenties zorgt ervoor dat de postulaten in twijfel getrokken worden. In deze paragraaf zal ik eerst mijn mening geven over de verschillende oplossingen en vervolgens beargumenteren welke oplossing mij het beste lijkt.

Het verwerpen van gerechtvaardigd geloof dat gebaseerd is op kansen lijkt mij een geschikte oplossing. Hierbij worden de rationaliteitspostulaten gehoorzaamd. Om daarvoor te zorgen wordt echter wel het gerechtvaardigde geloof beperkt. Een overtuiging kan niet meer gerechtvaardigd worden doordat de kans op de gebeurtenis zeer hoog is, waardoor we dus minder kunnen afleiden.

De conjunctieregel verwerpen voelt voor mij als een lastige oplossing. De loterijparadox zou ermee opgelost kunnen worden, omdat er geen sprake meer is van directe en indirecte inconsistentie. Ik ben het met Pollock [11], [12] eens dat we deze probabilistisch ongeldige regels wel graag willen gebruiken. Als we de regels zouden verwerpen, zorgt dat ervoor dat we zeer weinig overtuigingen kunnen rechtvaardigen [11], [12]. Bovendien is er veel onduidelijkheid en onenigheid over wanneer we wel of niet deze regels mogen gebruiken. Makinson [9] biedt een tussenweg door de conjunctieregel met mate toe te passen, afhankelijk van de kans op een bepaalde gebeurtenis.

Het accepteren van inconsistenties vind ik eruit zien als een oplossing met veel gevolgen. Deze oplossing zorgt ervoor dat de rationaliteitspostulaten geschonden worden. Ook hier is veel onduidelijkheid en onenigheid over de situaties waarin inconsistenties acceptabel zijn. Doordat het postulaat voor indirecte consistentie verworpen wordt, kunnen we ons afvragen of Caminada en Amgoud [3] wel gelijk hebben. Moeten hun postulaten wel gehoorzaamd worden? Of zijn er ook andere manieren waarop een argumentatiesysteem goed om kan gaan met de loterijparadox?

Tijdens het schrijven van paragraaf 2 had ik niet het idee dat de ene oplossing voor meer problemen zou zorgen dan de andere. Voor mijn gevoel waren de drie oplossingen even geschikt. Voor paragraaf 3 heb ik de relevantie voor argumentatielogica's van de verschillende oplossingen verwoord. Bij het schrijven van die paragraaf werd mij steeds meer duidelijk dat de verschillende oplossingen zeer verschillende gevolgen hebben. De voor- en nadelen van de verschillende oplossingen staan in Tabel 1. Het verwerpen van gerechtvaardigd geloof dat gebaseerd is op waarschijnlijkheid is volgens mij de minst problematische oplossing. In Tabel 1 is te zien dat deze oplossing de meeste voordelen heeft en de minste nadelen. De manier waarop Pollock [11], [12] redeneert gaat wel goed met andere voorbeelden. De loterijparadox is een atypisch geval. Er heerst een algemeen idee dat de loterijparadox het resultaat is van onenigheid over gerechtvaardigd geloof en *rational acceptance*, maar er is weinig overeenstemming over de juiste oplossing [15]. Er is in deze scriptie uitgegaan van *full acceptance*, daarbij accepteer je een overtuiging of niet, maar je kan niet een beetje overtuigd zijn. Misschien zijn *degrees of belief* of *degrees of justification* toch wel nodig. Deze zorgen ervoor dat je wel een beetje overtuigd kan zijn. Als we *full acceptance* aannemen, dan is er misschien geen perfecte oplossing. Wij mensen redeneren heel vaak weerlegbaar [1]. We kunnen conclusies trekken zonder volledig zeker te zijn van onze overtuigingen. Ook weten we dat conclusies soms later weer ingetrokken moeten worden [11]. Ik denk dat de manier waarop wij mensen redeneren overeenkomt met de situatie van de loterij waarin we geen gerechtvaardigd geloof hebben over "lot nummer j zal verliezen." Er is sprake van onzekerheid en weerlegbaarheid. Ook weten we dat er een kans is dat we wél winnen. We kunnen ons geloof over de situatie aanpassen wanneer er nieuwe informatie toegevoegd wordt en we kunnen conclusies trekken zonder zeker te zijn van de premissen. Ik denk dat de manier waarop wij mensen redeneren het beste geformaliseerd kan worden door onze rechtvaardiging van geloof te beperken en de rationaliteitspostulaten te gehoorzamen.

5 Conclusie

In deze scriptie zijn de oplossingen voor de loterijparadox van verschillende wetenschappers vergeleken. Vervolgens is onderzocht wat de gevolgen van deze oplossingen zijn voor argumentatielogica's. In deze scriptie is geprobeerd het probleem dat de loterijparadox opwerpt voor de argumentatielogica's en rationaliteitspostulaten inzichtelijker te maken. Dit is gebeurd aan de hand van de volgende onderzoeksvraag: wat is de relevantie van de loterijparadox voor argumentatielogica's binnen de kunstmatige intelligentie? Het antwoord op deze vraag is dat de loterijparadox ons laat zien dat een argumentatielogica niet altijd goed om kan gaan met bijzondere gevallen. We gebruiken de rationaliteitspostulaten om het argumentatiesysteem te beoordelen. Hierdoor kunnen problemen in het systeem geïdentificeerd worden en er kan een oplossing voor gevonden worden. De drie voorgestelde oplossingen zorgen voor verschillende uitkomsten, verschillende gerechtvaardigde conclusies. Bovendien kunnen de oplossingen zelf ook weer voor problemen zorgen wanneer ze de rationaliteitspostulaten niet gehoorzamen.

Argumentatielogica's worden gebruikt om argumenten voor en tegen een standpunt te construeren. Deze systemen maken het mogelijk om te redeneren met onzekere, onvolledige of tegenstrijdige informatie. Binnen de kunstmatige intelligentie kunnen argumentatielogica's gebruikt worden voor bijvoorbeeld besluitvorming en het modelleren van interacties tussen *agents*. Het is van belang dat deze goed kunnen redeneren over hun omgeving, ook in bijzondere gevallen. Voor de kunstmatige intelligentie betekent het antwoord op de onderzoeksvraag van deze scriptie dus dat de manier waarop de gebruikte argumentatielogica toegepast wordt van invloed is op hoe deze toepassing zal omgaan met zijn omgeving.

In deze scriptie zijn een aantal vragen naar boven gekomen en onbeantwoord gebleven. Foley [4], [5] zegt dat de loterijparadox een ongewoon geval is waarbij we geen conjunctie mogen gebruiken. Wanneer is een geval ongewoon? Wanneer mag de conjunctieregel dan wel gebruikt worden? Makinson [9] wil de conjunctieregel met mate toepassen. De kans op een bepaalde gebeurtenis moet "voldoende hoog" zijn. Wat is deze drempelwaarde? In welke gevallen zijn inconsistente overtuigingen rationeel? Wanneer is een verzameling "zeer groot"? Wanneer zijn de kosten om te corrigeren "te hoog"? Is het wenselijk om de rationaliteitspostulaten te gehoorzamen? Hebben Caminada en Amgoud [3] wel gelijk dat deze noodzakelijk zijn voor een goed argumentatiesysteem? Moeten we uitgaan van *full acceptance* of hebben we *degrees of belief* of *degrees of justification* nodig om een perfecte oplossing te vinden voor de loterijparadox? Naar deze vragen zou meer onderzoek gedaan kunnen worden zodat er een duidelijker beeld gevormd kan worden over de loterijparadox en argumentatielogica's.

6 Referenties

[1] Antoniou, G. (1997). *Nonmonotonic Reasoning.* Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

[2] Besnard, P., Garcia, A., Hunter, A., Modgil, S., Prakken, H., Simari, G. & Toni, F. (2014). Introduction to structured argumentation. *Argument & Computation, 5*(1), pp. 1-4.

[3] Caminada, M. & Amgoud, L. (2007). On the evaluaton of argumentation formalisms. *Artificial Intelligence, 171*, pp. 286-310.

[4] Foley, R. (1979). Justified Inconsistent Beliefs. *American Philosophical Quarterly, 16*(4), pp. 247-257.

[5] Foley, R. (1993). The epistemology of beliefs. In *Working without a Net: a Study of Egocentric Epistemology.* Oxford: Oxford University Press.

[6] Klein, P. (1985). The virtues of inconsistency. *Monist, 68*, pp. 105-135.

[7] Kyburg, H.E. (1961). *Probability and the Logic of Rational Belief.* Middletown, Connecticut: Wesleyan University Press.

[8] Kyburg, H.E. (1983). Conjunctivitis. In *Epistemology and Inference* (pp. 232-253). Minneapolis: University of Minnesota Press.

[9] Makinson, D.C. (2012). Logical questions behind the lottery and preface paradoxes: lossy rules for uncertain inference. *Synthese, 186*(2), pp. 551-529.

[10] Nelkin, D.K. (2000). The Lottery Paradox, Knowledge, and Rationality. *The Philosophical Review, 109*(3), pp. 373-409.

[11] Pollock, J.L. (2007). Defeasible Reasoning. In J. Adler and L. Rips (eds.), *Reasoning: Studies of Human Inference and its Foundations* (pp. 541-470). Cambridge: Cambridge University Press.

[12] Pollock, J.L. (2009). *Problems for Bayesian Epistemology.* Department of Philosophy, University of Arizona.

[13] Ryan, S. (1996). The Epistemic Virtues of Consistency. *Synthese, 109*, pp. 121-141.

[14] Steup, M. (2014). Epistemology. In E.N. Zalta (eds.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2014 Edition). Geraadpleegd op 17-03-2016 van `http://plato.stanford.edu/archives/spr2014/entries/epistemology/`

[15] Wheeler, G. (2007). A review of the lottery paradox. *Probability and inference: Essays in honour of Henry E. Kyburg, Jr*, pp. 1-31.