Formalisering van Gettier-voorbeelden door Rechtvaardigingslogica

Jop Brandenburg

3963772

Kunstmatige Intelligentie

3 juli 2016

7.5 ECTS

Begeleider
Rosalie Iemhoff

Tweede beoordelaar
Michael Moortgat

Samenvatting

Plato had het in zijn tijd al over een model van kennis: gerechtvaardigd, waar geloof. Eeuwenlang is dit model voor waar gehouden, totdat Edmund Gettier commentaar leverde op het model.
In deze scriptie zullen we de voorbeelden die Gettier introduceerde bestuderen. Vervolgens zullen we de rechtvaardigingslogica van Artemov bestuderen om de logica beter te kunnen begrijpen. Tot slot zullen we de voorbeelden die Gettier introduceerde analyseren met behulp van de rechtvaardigdheidslogica van Sergei Artemov. Door de voorbeelden van Gettier te formaliseren en uit te werken in de rechtvaardigingslogica zullen we de argumenten die Gettier geeft tegen het model van Plato onderbouwen.

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Al sinds de tijd van de grote filosoof Plato denkt men na over Kennis. Kennis is erg belangrijk in ons bestaan. Mensen handelen naargelang ze bepaalde kennis hebben, en handelen anders als desbetreffende kennis verandert. Nadenken over kennis is daarom ook erg belangrijk. Mensen zijn van nature nieuwsgierige wezens, en we zouden onszelf verraden als we zoiets belangrijks als kennis niet zouden willen bestuderen. Het definiëren en bovenal het modelleren van kennis is echter extreem moeilijk gebleken.

Toch is er al meer dan tweeduizend jaar geleden door Plato een oplossing bedacht om kennis te kunnen modelleren: het Justified, True Belief-model (JTB-model). Dit model suggereert dat kennis precies het bestaan is van een geloof, dat gerechtvaardigd en ook nog eens waar is. Kortom, een gerechtvaardigd, waar geloof. Als ik achter mijn bureau zit, en mijn laptop voor mij zie, dan geloof ik dat mijn laptop voor mij staat. Dit geloof is gerechtvaardigd, aangezien ik met mijn eigen ogen een laptop voor mij waarneem, en ik weet hoe mijn laptop eruit ziet. Het geloof is ook waar, want het is daadwerkelijk mijn laptop, en hij staat voor mij. Hieruit kunnen we volgens het JTB-model concluderen dat ik de kennis bezit dat mijn laptop voor mij staat.
Nadat het JTB-model het meer dan twee millennia had volgehouden, heeft de Amerikaanse filosoof Edmund Gettier[2] in een artikel van slechts twee en een halve pagina lang de eeuwenoude traditie aan de kaak gesteld. Gewapend met niets meer dan twee hedendaagse voorbeeldjes en een typemachine ontkrachtte hij het oeroude JTB-model. Er was echter ook kritiek op Gettier. Gedachtenexperimenten zijn mentaal en kunnen daarom slechts tot op zekere hoogte bewijzen leveren. Gettiers ideeën zouden formeel getest moeten worden. Het is daarom interessant om te kijken naar de vraag of we de voorbeelden in een formeel model kunnen weergeven.

In deze scriptie zullen we kijken naar de rechtvaardigingslogica (Justification Logic) van Sergei Artemov[1][3]. Artemov ondersteunt Gettier met zijn logica door te laten zien dat een formalisering van een van de voorbeelden van Gettier leidt tot een model waarin waar, gerechtvaardigd geloof geen kennis is.

Hiertoe zullen we de logica grondig bestuderen en soundness en volledigheid van de logica bewijzen.
We zullen ons hierbij afvragen: *Hoe geschikt is rechtvaardigingslogica om Gettiers argumenten te onderbouwen?*
Vervolgens zullen we de voorbeelden van Gettier, die hij in zijn korte artikel poneert, bekijken. We zullen bespreken hoe het artikel werd ontvangen en ook zullen we kijken naar kritiek die Gettier heeft ontvangen op zijn artikel.
Hierna zullen we de formalisering die Artemov geeft van het eerste voorbeeld van Gettier uitwerken. We zullen vervolgens zelf het tweede voorbeeld van Gettier formaliseren. Tot slot zullen we concluderen waarom de formaliseringen geschikt zijn om de problemen die Gettier aankaartte te onderbouwen.

Hoewel deze scriptie duidelijk de theoretische kant van Kunstmatige Intelligentie benadrukt, zijn er vele KI-gerelateerde toepassingen waarbij rechtvaardigingslogica, maar ook kennis in het algemeen gebruikt worden. Agenten redeneren bijvoorbeeld altijd op basis van kennis, dat in veel gevallen wordt gemodelleerd door logica. Elk intelligent systeem is dus direct afhankelijk van kennis-representerende logica om te kunnen werken. Om deze systemen goed te laten werken is het dus van groot belang dat men kennis goed kan modelleren. Het formeel kunnen onderbouwen van de argumenten die Gettier aankaartte brengt ons dichterbij een mogelijke oplossing voor het eeuwenoude probleem van het modelleren van kennis.

2 Rechtvaardigheidslogica

Geschiedenis

Al in de tijd van Plato werd een model van kennis geponeerd, namelijk het "Justified, True Belief-model". Kennis werd gedefiniëerd als gerechtvaardigd, waar geloof. Deze definitie werd in de wereld van de epistemologie algemeen geaccepteerd door filosofen en andere wetenschappers, tot 1963, toen Edmund Gettier een artikel publiceerde waarin hij de discussie over wat het hebben van kennis nou precies inhoudt weer aanwakkerde. Het epistemologische wetenschapsveld bloeide op en was zeer succesvol in het overbruggen van het gat tussen de filosofie en de wiskundige logica.
Bijna elke epistemiloog en wiskundige had wel een idee over wat er gedaan moest worden om de problemen van Gettier te verhelpen. Zo ook Sergei Artemov. In zijn artikel uit 2008 introduceert hij zijn rechtvaardigingslogica, Justification Logic. Artemov heeft zijn logica gemaakt met als doel om te kunnen redeneren over epistemische rechtvaardiging. Het resultaat van het artikel van Artemov was een logica die op een formele wiskundige manier rechtvaardiging modelleert.

Syntax van de basislogica J_0

De rechtvaardigingslogica van Artemov is opgebouwd uit propositionele logica, versterkt met uitdrukkingen van rechtvaardiging:

$$t : F$$

Deze uitdrukking wordt geacht gelezen te worden als "t is een rechtvaardiging voor F".
Deze rechtvaardigingsvariabelen voldoen aan bepaalde principes, namelijk Het applicatie- en het somprincipe:

$$\text{Applicatieprincipe: } s : (F \to G) \to (t : F \to (s \cdot t) : G)$$

Dit principe houdt in dat als er een rechtvaardiging is voor $F \to G$, en een andere rechtvaardiging voor F, dat de rechtvaardigingen samengevoegd een rechtvaardiging zijn voor G.

$$\text{Somprincipe: } s : F \to (s + t) : F \text{ en } s : F \to (t + s) : F$$

Dit principe houdt in dat als er een rechtvaardiging s is voor F, dat elke rechtvaardiging daaraan toegevoegd kan worden, zonder dat de rechtvaardiging voor F daardoor wordt aangetast. s blijft een rechtvaardiging voor F, ongeacht verdere toegevoegde rechtvaardigingen.
J_0 als gehele logica is de basis voor uitbreidingen, waar we later op terug zullen komen. J_0 bestaat uit rechtvaardigingstermen en axioma's. Rechtvaardigingstermen zijn termen die zijn opgebouwd uit rechtvaardigingsvariabelen, zoals t of s, en uit rechtvaardigingsconstanten, $a, b, c, ...$ Deze constanten zijn rechtvaardigingen voor formules die aangenomen worden en niet meer geanalyseerd hoeven te worden. We zullen hier later op terugkomen.

De axioma's waaruit J_0 bestaat zijn de volgende:

A1 Alle axioma's van de propositionele logica, en de regel Modus Ponens.

A2 Het applicatie-axioma: $s : (F \rightarrow G) \rightarrow (t : F \rightarrow (s \cdot t) : G)$

A3 Het som-axioma: $s : F \rightarrow (s + t) : F$ en $s : F \rightarrow (t + s) : F$

Constanten

Rechtvaardigingsconstanten worden gebruikt om aannames die verder geen analyse behoeven gerechtvaardigd te maken. Stel dat we een axioma X poneren, die a priori gerechtvaardigd is. Dan kunnen we in rechtvaardigingslogica het volgende zeggen:

$$c_1 : X$$

voor een zekere rechtvaardigingsconstante c_1.
Op dezelfde manier kan een rechtvaardiginsconstante een rechtvaardiging zijn voor een andere rechtvaardiging. Dit zou als volgt genoteerd worden:

$$c_2 : c_1 : X$$

Een rechtvaardigingslogica J kan een verzameling constanten gebruiken. In J_0 is deze verzameling leeg, wat ook de reden is van de 0 in de naam van de logica. In J_{CS} wordt een bepaalde verzameling constanten gebruikt, namelijk de verzameling formules:

$$c_n : c_{n-1} : ... : A, (n \geq 1)$$

waar A een axioma is en c_n een bepaalde rechtvaardigingsconstante is. In de verzameling CS zitten ook alle subformules van rechtvaardiging, bijvoorbeeld

$$c_3 : c_2 : c_1 : A$$

We definiëren J_{CS} als volgt:

$$J_{CS} = J_0 + CS$$

Semantiek

De semantiek voor rechtvaardigingslogica wordt gegeven door standaard Kripke-modellen met kleine aanpassingen. Een dergelijk aangepast Kripke-model wordt een zogenaamd Kripke-Fitting-J-model genoemd. Laten we een voorbeeld van dit model M noemen. M is een regulier Kripke-model, verrijkt met een extra functie, de zogenaamde rechtvaardigingsfunctie ($\mathcal{E}$). Formeel is M als volgt te definiëren:

Lemma 2.1.

$$M = (W, R, \mathcal{E}, \Vdash)$$

waarin W de verzameling werelden is en R de relatiefunctie tussen de werelden in het model M.
De rechtvaardigingsfunctie $\mathcal{E}(t : F)$ beeldt elke rechtvaardigingsvariabele t en elke formule F af op een deelverzameling $\mathcal{E}(t, F)$ van W.

Een zekere wereld u zit in $\mathcal{E}(t : F)$, mits t een rechtvaardiging voor F is in wereld u.
De $\Vdash$-operator op een zekere volledige formule F, met een zekere rechtvaardigingsvariabele t in een zekere wereld u is als volgt gedefiniëerd:
$u \Vdash t : F$ geldt, mits:

1 Voor alle v, zodanig dat uRv, geldt $v \Vdash F$. Dit houdt in dat alle voor mogelijk gehouden situaties vanuit wereld u, F geldt.

2 t is gerechtvaardigd bewijs voor F in u. Dat wil zeggen dat $u \in \mathcal{E}(t, F)$

3 $\Vdash$ houdt zich in alle werelden aan propositionele logica. Dat wil zeggen dat als $u \Vdash \neg F$ waar is, dan is $u \nVdash F$ ook waar en als $u \Vdash (F \wedge G)$ waar is, dan zijn zowel $u \Vdash F$ als $u \Vdash G$ waar.

Zoals het er nu uit ziet kan hier nog vrij weinig worden afgeleid. De reden hiervoor is dat de rechtvaardigingssfunctie nog niet aan banden is gelegd. Onze semantiek is dus nog niet sterk. We lossen dit op door enkele regels voor $\mathcal{E}(t, F)$ erbij te halen. Deze regels gaan ongeveer dezelfde zijn als we eerder al hebben opgelegd aan J_0:

1 Applicatie-regel: $\mathcal{E}(t, F \to G) \cap \mathcal{E}(s, F) \subseteq \mathcal{E}(s \cdot tG)$. Deze regel impliceert dat wanneer t gerechtvaardigd bewijs is voor een zekere formule $F \to G$, en s gerechtvaardigd bewijs is voor een zekere formule F, dat $(s \cdot t)$ dan gerechtvaardigd bewijs is voor formule G.

2 Som-regel: $\mathcal{E}(t, F) \cup \mathcal{E}(t, F) \subseteq \mathcal{E}(s + t, F)$. Deze regel impliceert dat als t gerechtvaardigd bewijs is voor een zekere formule F, $(s + t)$ dan ook gerechtvaardigd bewijs is voor F, voor elke willekeurige rechtvaardigingsvariabele t. Ook impliceert het dat als s gerechtvaardigd bewijs is voor een zekere formule F, $(s + t)$ dan ook gerechtvaardigd bewijs is voor F, voor elke willekeurige rechtvaardigingsvariabele s.

Het bestaan van deze regels voor de rechtvaardigingsfunctie is belangrijk om ervoor te zorgen dat de functie betekenis heeft. Als de functie geen regels had gehad, was het een betekenisloze functie geweest. Hij zou geen nut hebben gehad voor de logica, omdat de rechtvaardigingslogica dan niet sound en volledig zou zijn ten opzichte van de semantiek. Met behulp van de regels is de rechtvaardigingssfunctie een functie geworden die aangeeft of een rechtvaardigingsvariabele daadwerkelijk gerechtvaardigd bewijs is voor de formule die meegegeven wordt aan de functie.

Soundness en volledigheid

Voor extra begrip van de logica en volledigheid van de uitleg over de logica zullen we in de volgende sectie soundness en volledigheid van de rechtvaardigheidslogica van Artemov bewijzen en zullen deze bewijzen volledig worden uitgewerkt.

Soudness

Een logica is sound als elke willekeurige formule die waar is in de logica, ook waar is in alle Kripke-modellen.

Lemma 2.2.

Soundness: $\vdash_{J_{CS}} F \Rightarrow\ \Vdash F$

Dus om te bewijzen dat J_{CS} Sound is, moeten we bewijzen dat elke willekeurige formule die waar is in J_0, ook waar is in elk Kripke-model waarin CS geldt.

Theorem 2.3.

$$\vdash_{J_{CS}} F \Rightarrow \forall K(K \Vdash CS \rightarrow K \Vdash F)$$

We willen door inductie bewijzen dat J_{CS} Sound is. Er zijn twee gevallen die we zullen moeten bewijzen: de basisstap en de inductiestap.
Ons bewijs zal uit de volgende stappen bestaan:

- De lengte van het bewijs van F is 1 (*de basisstap*)
- De lengte van het bewijs van F is groter dan 1 (*de inductiestap*)

Stel het eerste geval, de basisstap: de lengte van het bewijs van F is 1. Dit betekent dat F een axioma is, dus een van de volgende vier gevallen geldt:

A1 F is een tautologie

A2 $F = s : (H \rightarrow G) \rightarrow (t : H \rightarrow (s \cdot t) : G)$

A3 $F = s : H \rightarrow (s + t) : H$

CS $F = (c : A)$

We zullen deze vier gevallen allemaal los behandelen in de volgende sectie.

Stel F is een tautologie

F is een propositionele tautologie. Aangezien elke knoop in het Kripke-model zich naar klassieke propositionele logica gedraagt, gelden alle propositionele tautologieën in elke knoop, dus in elk model.

Stel $F = s : (F \to G) \to (t : F \to (s \cdot t) : G)$

We moeten nu bewijzen dat dit axioma in elk Kripke-model geldt.
Neem een willekeurig Kripke-model K, zodanig dat $K \Vdash CS$.
Neem een willekeurige wereld u in K en stel $u \Vdash s : (F \to G)$ en $u \Vdash (t : F)$
Te bewijzen: $u \Vdash s \cdot t : G$

Er geldt $u \in \mathcal{E}(s, F \to G)$ alsook $u \in \mathcal{E}(t, F)$, volgens de definitie van $\Vdash$.
Er geldt dus ook $u \in \mathcal{E}(s \cdot t : G)$, volgens application van $\mathcal{E}$
Voor elke v waarvoor geldt uRv, geldt nu ook $v \Vdash F \to G$ en $v \Vdash F$, volgens de definitie van $\Vdash$.
Dus geldt ook $v \Vdash G$, volgens application.
Nu weten we dus dat: $u \Vdash (s \cdot t : G)$
Dus $u \Vdash s : (F \to G) \to (t : F \to (s \cdot t) : G)$

Hiermee is soundness bewezen voor A2.

Stel $F = s : F \to (s + t) : F$

We moeten nu bewijzen dat dit axioma in elk Kripke-model geldt.
Neem een willekeurig Kripke-model K, zodanig dat $K \Vdash CS$.
Neem een willekeurige wereld u in K en stel dat $u \Vdash s : F$.
Te bewijzen: $u \Vdash (s + t) : F$.

Er geldt nu $u \in \mathcal{E}(s, F)$, volgens de definitie van $\Vdash$.
Hieruit volgt volgens de Sum-voorwaarde van $\mathcal{E}$: $u \in \mathcal{E}(s + t, F)$
Voor elke v waarvoor uRv geldt, geldt nu ook $v \Vdash F$. Hieruit volgt $u \Vdash (s + t) : F$.

Hiermee is soundness bewezen voor A3.

Stel dat CS

Alle Kripke-modellen die CS waar maken, maken CS waar.
Er geldt dus ook het volgende, voor een willekeurige wereld u in een willekeurig Kripke-model: $u \in \mathcal{E}(c, A)$

Hiermee is soundness bewezen voor CS.

Inductiestap

We hebben nu alle casussen nagelopen die horen bij de basisstap van onze inductie. We gaan nu via de inductiestap kijken naar alle opties voor F waarbij de lengte van het bewijs meer dan 1 is. F kan dus geen axioma zijn. We gaan er bij het maken van de inductiestap vanuit dat alle bewijzen gelden die in de basisstap gedaan zijn.
De enige regel die er is, is Modus Ponens. Elke laatste stap van een afleiding gaat dus volgens de volgende vorm zijn:

$$\frac{\mathrm{H} \to \mathrm{F} \qquad \mathrm{H}}{\mathrm{F}}$$

We hebben vervolgens de volgende inductie-hypothese:

$$\forall K, K \Vdash CS \Rightarrow K \Vdash H \text{ én } K \Vdash H \to F$$

Aangezien Modus-Ponens geldt in elk Kripke model, volgt dat in elk Kripke model K geldt:
Als H en $H \to F$ er gelden, dan geldt F er ook. De inductiehypothese is hiermee bewezen.
Hiermee soundness bewezen voor J_{CS} $\square$.

Volledigheid

We zullen bewijzen dat J_{CS} volledig is. Dit zullen we doen door middel van contrapositie:

Theorem 2.4.

$$\nvdash F \to \nVdash F$$

We hebben het waarheidslemma (TL) uiteindelijk nodig om volledigheid van J_{CS} te bewijzen. Daarom beginnen we met het bewijzen van TL en zullen daarna volledigheid bewijzen met behulp van TL.

Waarheidslemma

We zullen bewijzen dat TL geldt voor een canoniek model. Een canoniek model bestaat uit werelden, net zoals een regulier Kripke-model. Het verschil is dat in een canoniek model de notie van 'werelden' verwijst naar collecties van formules. Zulke collecties van formules zullen we aanduiden als Γ en Δ. Deze collecties zijn maximaal consistente verzamelingen. Dit houdt twee verschillende dingen in.

> Maximaal: De verzameling bevat alle formules die hij kan bevatten zonder inconsistent te worden: Voor elke formule A in de taal, bevat de maximaal consistente verzameling A of $\neg A$.
>
> Consistent: De verzameling bevat alleen formules die geen inconsistenties veroorzaken: Als de verzameling A bevat, kan hij niet $\neg A$ bevatten.

Formeel gezegd: een canoniek model $\mathcal{M}$ bestaat uit:

- W, de verzameling werelden: Alle maximaal consistente verzamelingen in J_{CS}
- $\Gamma R \Delta$ iff $\Gamma^{\#} \subseteq \Delta$, met $\Gamma^{\#} = \{G|t : G \in \Gamma\}$, De relatiefunctie tussen de werelden.
- $\mathcal{E}(s, F) = \{\Gamma \in W | s : F \in \Gamma\}$
- $\Gamma \Vdash p \Leftrightarrow p \in \Gamma$

Lemma 2.5.

$$\textit{Waarheidslemma: } \Gamma \Vdash F \leftrightarrow F \in \Gamma$$

We zullen nu TL bewijzen, door middel van inductie. Ons bewijs zal uit een basisstap en een inductiestap bestaan. De inductiestap bestaat uit vier onderdelen. Als stap 1 (basisstap) en stap 2 (inductiestap) gedaan zijn, is er een bewijs met inductie gegeven en daarmee zal TL bewezen zijn.
Ons bewijs zal als volgt gestructureerd zijn:

1 $p \in \Gamma \Leftrightarrow \Gamma \Vdash p$

2 Als voor A, B het volgende geldt:

  p1 $\Gamma \Vdash A \Leftrightarrow A \in \Gamma$

  p2 $\Gamma \Vdash B \Leftrightarrow B \in \Gamma$

  Dan geldt ook:

  a $\Gamma \Vdash (A \wedge B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \in \Gamma$

  b $\Gamma \Vdash (A \vee B) \Leftrightarrow (A \vee B) \in \Gamma$

  c $\Gamma \Vdash \neg A \Leftrightarrow \neg A \in \Gamma$

  d $\Gamma \Vdash t : A \Leftrightarrow t : A \in \Gamma$

We zullen nu langs deze gevallen gaan, en TL bewijzen voor elk van die gevallen.

1 Het propositionele geval staat in de definitie van het canonieke model en is daarmee aangenomen.

2a $\Gamma \Vdash (A \wedge B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \in \Gamma$

  "$\Rightarrow$"
  Stel $\Gamma \Vdash (A \wedge B)$ en zowel p1 als p2.
  Te bewijzen: $(A \wedge B) \in \Gamma$
  Het volgende geldt: $\Gamma \Vdash A$ en $\Gamma \Vdash B$, dus, gezien inductiehypotheses p1 en p2, geldt $A \in \Gamma$ en $B \in \Gamma$ ook.
  Omdat Γ een maximaal consistente verzameling is, kunnen we concluderen dat $(A \wedge B) \in \Gamma$ óf $\neg(A \wedge B) \in \Gamma$ geldt.
  Aangezien $A \in \Gamma$ en $B \in \Gamma$, zou $\neg(A \wedge B \in \Gamma$ een inconsistentie in Γ teweeg brengen. Aangezien Γ een maximaal consistente verzameling is, is dit onmogelijk. We kunnen nu concluderen dat $(A \wedge B) \in \Gamma$

"$\Leftarrow$"
Stel $(A \wedge B) \in \Gamma$ en zowel p1 als p2.
Te bewijzen: $\Gamma \Vdash (A \wedge B)$
Γ is een maximaal consistente verzameling. Als $\neg A \in \Gamma$ zou gelden, zou zowel $(A \wedge B) \in \Gamma$ gelden als $\neg A \in \Gamma$. Dit is inconsistent. Aangezien de verzameling ook maximaal is moet $A \in \Gamma$ óf $\neg A \in \Gamma$ gelden, dus geldt, volgens de inductiehypothese $A \in \Gamma$, en $B \in \Gamma$.
Dus geldt: $\Gamma \Vdash A$, $\Gamma \Vdash B$.
Nu geldt uiteraard ook: $\Gamma \Vdash (A \wedge B)$.

TL is nu bewezen voor de $\wedge$-operator.

2b $\Gamma \Vdash (A \vee B) \Leftrightarrow (A \vee B) \in \Gamma$

"$\Rightarrow$"
Stel $\Gamma \Vdash (A \vee B)$ en zowel p1 als p2.
Te bewijzen: $(A \vee B) \in \Gamma$
Het volgende geldt: $\Gamma \Vdash A$ óf $\Gamma \Vdash B$. Hieruit volgt: $A \in \Gamma$ óf $B \in \Gamma$
Aangezien Γ een maximaal consistente verzameling is, geldt $(A \vee B) \in \Gamma$ óf $\neg(A \vee B) \in \Gamma$. De verzameling moet namelijk een van beiden bevatten om maximaal te zijn.
Stel dat $\neg(A \vee B) \in \Gamma$. Nu geldt: $A \notin \Gamma$ en $B \notin \Gamma$
Dit is tegenstrijdig met wat er eerder werd gezegd, dus $(A \vee B) \in \Gamma$

"$\Leftarrow$"
Stel $(A \vee B) \in \Gamma$ en zowel p1 als p2.
Te bewijzen: $\Gamma \Vdash (A \vee B)$
Het volgende geldt: $A \in \Gamma$ óf $B \in \Gamma$ óf $(A \wedge B) \in \Gamma$. Hieruit volgt: $\Gamma \Vdash A$ óf $\Gamma \Vdash B$ óf $\Gamma \Vdash (A \wedge B)$
Volgens propositionele logica volgt hieruit $\Gamma \Vdash (A \vee B)$.

Hiermee is het TL bewezen voor de $\vee$-operator.

2c $\Gamma \Vdash \neg A \Leftrightarrow \neg A \in \Gamma$

"$\Rightarrow$"
Stel $\Gamma \Vdash \neg A$ en zowel p1 als p2.
Te bewijzen: $\neg A \in \Gamma$
Er geldt $A \in \Gamma$ óf $\neg A \in \Gamma$. Omdat Γ maximaal is, alsook consistent, moet minimaal en maximaal één van deze formules in de verzameling zitten.
Stel dat $A \in \Gamma$. Nu geldt $\Gamma \Vdash A$. Dit vormt een tegenspraak met de aanname. Hieruit volgt:
$\neg A \in \Gamma$

"$\Leftarrow$"
Stel $\neg A \in \Gamma$ en zowel p1 als p2.
Te bewijzen: $\Gamma \Vdash \neg A$
Gezien onze aanname geldt $A \notin \Gamma$. Hieruit volgt $\Gamma \nVdash A$.
Hieruit kunnen we concluderen dat $\Gamma \Vdash \neg A$

Hiermee is het TL bewezen voor de $\neg$-operator.

2d $\Gamma \Vdash t : G \Leftrightarrow t : G \in \Gamma$

"$\Leftarrow$"
Stel $t : G \in \Gamma$ en zowel p1 als p2.
Te bewijzen: $\Gamma \Vdash t : G$
Er zijn twee voorwaarden voor $\Gamma \Vdash t : G$:

- $\Gamma \in \mathcal{E}(t, G)$
- $\forall \Delta \quad \Gamma R \Delta \rightarrow \Delta \Vdash G$

Deze twee voorwaarden gaan wij een voor een bewijzen.

Voor de eerste voorwaarde zullen we kijken naar de $\mathcal{E}$-functie.
De definitie van $\mathcal{E}$: $\mathcal{E}(s, F) = \{\Pi | s : F \in \Pi\}$
Hieruit volgt triviaal: $\Gamma \in \mathcal{E}(t, G)$, gezien onze eerste aanname. Dit is de eerste voorwaarde voor $\Gamma \Vdash t : G$.

Voor de tweede voorwaarde stellen wij een canoniek model met meerdere werelden: Γ en Δ.
Stel $\Gamma R \Delta$ voor een willekeurige Δ.
Volgens de definitie geldt nu $\Gamma^{\#} \subseteq \Delta$, met $\Gamma^{\#} = \{G | t : G \in \Gamma\}$
Omdat $t : G \in \Gamma$, geldt $G \in \Gamma^{\#}$ en dus $G \in \Delta$. Dit is de tweede voorwaarde voor $\Gamma \Vdash t : G$.
Hieruit volgt: $\Delta \Vdash G$

"$\Rightarrow$"
We lossen deze kant op door een bewijs met contrapositie: $t : G \notin \Gamma \Rightarrow \Gamma \nVdash t : G$
Stel $t : G \notin \Gamma$
Te bewijzen: $\Gamma \nVdash t : G$
De definitie van $\mathcal{E}$ $\mathcal{E}(s, F) = \{\Pi \in W | s : F \in \Pi\}$
Er zijn twee voorwaarden voor $\Gamma \Vdash t : G$:

- $\Gamma \in \mathcal{E}(t, G)$
- $\forall \Delta \quad \Gamma R \Delta \rightarrow \Delta \Vdash G$

Volgens onze aanname geldt: $t : G \notin \Gamma$, dus geldt $\Gamma \notin \mathcal{E}(t, G)$. Eén van de twee voorwaarden voor $\Vdash$ geldt niet, waardoor we de volgende conclusie kunnen trekken:$\Gamma \nVdash t : G$

Hiermee is TL bewezen voor $t : G$, voor elke willekeurige t en G.

Hiermee is onze inductiehypotese bewezen, dus is TL algemeen bewezen $\square$

Volledigheid

TL gaan we gebruiken voor ons volledigheid-bewijs. Volledigheid van J_{CS} gaan we bewijzen met behulp van contrapositie:

Theorem 2.6.

$$\nvdash_{J_{CS}} F \Rightarrow \Gamma \nVdash F \quad \textit{voor een of andere } \Gamma \in C (C = \textit{canoniek model})$$

In dit specifieke geval geldt $\nvdash_{J_{CS}} F \Rightarrow \neg F \nvdash_{J_{CS}} \bot$
Dit houdt in dat $\neg F$ in een maximaal consistente verzameling kan zitten.
In dit bewijs gaan we Γ opbouwen: een maximaal consistente verzameling, beginnende bij $X_0 = \{\neg F\}$.

$$X_{i+1} = \begin{cases} X_i \cup \{A_i\} & \text{als } X_i \cup \{A_i\} \nvdash_{J_{CS}} \bot \\ X_i \cup \{\neg A_i\} & \text{anders} \end{cases}$$

Waarbij $A = \{A_0, A_1, A_2, ..., A_n\}$ een opsomming van alle formules is. A is dus een oneindige verzameling.
Γ wordt gedefinieerd als de vereniging van de oneindig vele verzamelingen X_i.
Nu geldt: $\neg F \in \Gamma$, de maximaal consistente verzameling, dus $F \notin \Gamma$.
Aangezien TL bewezen is, kunnen we nu concluderen dat $\Gamma \nVdash F$.
Hiermee is volledigheid bewezen voor J_{CS}. □

3 Gettier

Edmund Gettier is een Amerikaanse filosoof die in 1963 als een van de eerste het algemeen geaccepteerde model van kennis in twijfel trok.
Al ruim tweeduizend jaar werd er gedacht over kennis als "Justified, true belief", ofwel gerechtvaardigd, waar geloof. Eeuwenlang was dit model een door vele epistemilogen algemeen geaccepteerde definitie van kennis. In 1948 keek de Engelse filosoof Bertrand Russell al kritisch naar dit model, en in 1963 kwam Gettier met een baanbrekend artikel van slechts twee en halve pagina's lang die de hele epistemologische wereld op zijn kop zou zetten.
Door het gebruik van twee simpele voorbeelden trok Gettier het JTB-model overtuigend in twijfel. Hij stelde dat er situaties mogelijk zijn waarin er sprake is van gerechtvaardigd, waar geloof, maar waar kennis afwezig lijkt te zijn.

Gettiers voorbeelden

Voorbeeld 1

Het eerste voorbeeld dat Gettier noemt gaat uit van twee personen, Smith en Jones. Deze twee personen solliciteren beiden voor een bepaalde baan. Smith heeft goede redenen om het volgende te geloven:

(d) Jones krijgt de baan en Jones heeft tien muntjes in zijn broekzak.

De goede redenen kunnen van alles zijn. De baas van het bedrijf waar ze beiden hebben gesolliciteerd zou wellicht tegen Smith gezegd kunnen hebben dat Jones de baan krijgt. Vervolgens heeft Smith op een of andere manier de inhoud van Jones' zakken gezien en de muntjes erin geteld. De manier waarop de rechtvaardiging tot stand is gekomen is echter niet van belang in dit voorbeeld.
Uit (d) volgt de volgende propositie:

(e) De persoon die de baan krijgt heeft tien muntjes in zijn broekzak.

We nemen aan dat Smith de implicatie van (d) naar (e) ziet, en (e) aanneemt op basis van (d), waar hij rechtvaardiging voor heeft. Smith is nu duidelijk gerechtvaardigd om (e) te geloven.
Stel nu dat, in tegenstelling tot propositie (d), niet Jones, maar Smith de baan krijgt. Tegen zijn weten in heeft de partner van Smith die ochtend tien muntjes als lunchgeld in de broekzak van Smith gestopt. Nu is het zo dat Smith de baan krijgt, alsook dat Smith tien muntjes in zijn broekzak heeft zitten.
Propositie (e) is dus waar. Het is een gerechtvaardigd, waar geloof, omdat de persoon die de baan krijgt, namelijk Smith, ook daadwerkelijk tien muntjes in zijn broekzak heeft. Het is ook duidelijk dat (e) geen kennis is van Smith, omdat hij gelooft dat Jones de baan krijgt, terwijl in werkelijkheid hijzelf de baan krijgt.
Hieruit kunnen we concluderen dat het JTB-model niet voldoende is om kennis te definiëren, aangezien het JTB-model het gerechtvaardigd geloof dat Smith heeft zou classificeren als kennis, terwijl duidelijk is dat Smith geen kennis heeft.

Voorbeeld 2

Het tweede voorbeeld dat Gettier noemt gaat uit van dezelfde twee personen, Smith en Jones, alsook een derde persoon, Brown. We nemen de volgende propositie aan:

(f) Jones bezit een Ford.

We nemen aan dat Smith gerechtvaardigd is om dit geloof te hebben, bijvoorbeeld dat Jones zojuist is langsgereden in een Ford en er de afgelopen twee weken een Ford voor het huis van Jones geparkeerd staat.
Smith heeft geen idee waar Brown op dit moment is, dus kan Smith geen gerechtvaardigd geloof hebben over de huidige verblijfplaats van Brown. Daarom neemt Smith drie willekeurige plaatsnamen in zijn hoofd en produceert de volgende drie proposities:

(g) Jones bezit een Ford, óf Brown bevindt zich in Boston.

(h) Jones bezit een Ford, óf Brown bevindt zich in Barcelona.

(i) Jones bezit een Ford, óf Brown bevindt zich in Brest-Litovsk.

Deze proposities worden allen geïmpliceerd door (f) en Smith weet dit. Aangezien Smith gerechtvaardigd was om (f) te geloven, is hij ook gerechtvaardigd om (g), (h) en (i) te geloven, zelfs al weet hij niet wat de verblijfplaats van Brown is.
Stel nu dat Jones helemaal geen Ford bezit. Hij heeft voor een maandje een auto gehuurd, dus de Ford waarin Jones langs Smith is gereden en die voor zijn huis geparkeerd staat is niet het eigendom van Jones. Stel verder dat het, door puur toeval, het geval is dat Brown zich daadwerkelijk in Barcelona bevindt.
Nu geldt dat (h) waar is, alsook gerechtvaardigd geloof van Smith. Het is duidelijk dat (h) geen kennis is van Smith. Hieruit kunnen we concluderen dat het JTB-model niet voldoende is om kennis te definiëren.

Ontvangst en kritiek op Gettier

De voorbeelden van Gettier brachten vele reacties teweeg in de wereld van de epistemologie. Velen reageerden in hun eigen artikelen op de bevindingen van Gettier, zoals Fred Dretske, Alvin Goldman en Richard Kirkham. De reacties waren voornamelijk positief en moedigden nieuw onderzoek aan. Blijkbaar was het oude JTB-model niet genoeg om kennis goed te modelleren. Er moest worden gezocht naar een betere manier om kennis te kunnen modelleren. Sommigen stelden voor om naar een mogelijke vierde pijler in het JTB(+?)-model te zoeken. Anderen zouden graag een versterking van de gerechtvaardigdheids-pijler zien: als de definitie voor gerechtvaardigdheid sterker zou worden, zou het misschien mogelijk zijn om de Gettier-voorbeelden te elimineren en het JTB-model te behouden. Hiermee zou kennis alsnog met behulp van het JTB-model gemodelleerd kunnen worden.

Er kwam echter ook sceptische respons, bijvoorbeeld van Richard Kirkham, in 1984[4]. Hij dacht dat de problemen die Gettier noemt niet kunnen worden vermeden. Volgens Kirkham zal er vrijwel altijd een mogelijkheid tot tegenvoorbeelden, zoals de voorbeelden die Gettier noemt, blijven. Kirkham dacht dat het zoeken naar een vierde pijler in het JTB-model, of het proberen te versterken van de gerechtvaardigdheids-pijler beiden tot niets zouden leiden. Hij dacht dat de problemen die Gettier aanhaalde te hardnekkig zijn om ooit te kunnen verdrijven en dat kennis niet snel bereikt kan worden. Kirkham noemt het voorbeeld van een blauwe typemachine: Ik kan geen kennis hebben over het feit dat er een blauwe typemachine voor mij staat, maar wel gerechtvaardig geloof. Als de enige reden dat ik er geen kennis over kan hebben, het feit is dat mijn rechtvaardiging niet sterk genoeg is, dan is dat helemaal niet zo erg, volgens Kirkham. Een propositie of een geloof wordt niet minder waardevol op het moment dat we er het label "kennis"niet meer aan kunnen hangen. Het is nog steeds even praktisch en nuttig als wanneer het wel met "kennis"bestempeld kon worden. We moeten met z'n allen van het paradigma af dat volledige kennis iets is wat de mens heeft, of nodig heeft.

Ik vind zelf het artikel van Gettier uit 1963 een fantastisch paper. Het is extreem kort en bondig, maar vertelt precies wat het moet vertellen. Als zo'n kort artikel dan ook nog zo'n grote invloed heeft op de wetenschap, is het volgens mij een goed artikel. Ik heb echter wel één punt van kritiek op Gettier. De notie van "kennis"vind ik nogal vaag in de voorbeelden van Gettier. Gettier neemt aan dat Smith "duidelijk geen kennis heeft". Hierbij maakt hij aanspraak op een onderbuikgevoel dat de lezers van zijn artikel hebben over de definitie van kennis.

4 Formaliseringen

Verwijzingsoperatoren

We zullen het eerste voorbeeld van Gettier formaliseren door middel van zogenaamde verwijzingsoperatoren. Dit zijn operatoren die verwijzingen op een formele manier uitdrukken. Een verwijzingsoperator werkt op zo'n manier dat wanneer P een predicaat is die voor precies één uniek object geldt, de operator naar dat object verwijst. We zullen een semantiek gebruiken die lijkt op Kripke-semantiek, maar ook met verwijzingsoperatoren om kan gaan. Laten we deze S_{dd} noemen.
In (d) en (e) van Gettier is er een verwijzing aanwezig:

De persoon die de baan krijgt

We zullen nu de verwijzingsoperator $\iota x P(x)$ gebruiken om deze verwijzing te verwerken. Laat $\iota x P(x)$ 'De x, zo dat $P(x)$' betekenen.
Als in een model een unieke a bestaat, zodanig dat $P(a)$ geldt, dan interpreteren we $\iota x P(x)$ als a.
Voor een definitie van de semantiek en de verwijzingsoperatoren verwijs ik naar Artemov, 2008.

Formalisering van Gettiers eerste voorbeeld

De formalisering verdelen we in drie stappen:

- Het definiëren van enkele begrippen
- Het construeren van een werkbaar model
- Het formeel onderbouwen van Gettiers redenatie

Definities

Om de formalisering duidelijker te maken definiëren we de volgende begrippen:

- $J(x)$ is het predicaat dat in natuurlijke taal "x krijgt de baan" betekent.
- $C(x)$ is het predicaat dat in natuurlijke taal "x heeft tien muntjes in zijn zak" betekent.
- Laat `Jones` en `Smith` respectievelijk de entiteiten Jones en Smith zijn.
- laat u een onderbouwings-variabele zijn.

Construeren van een model

Laat M een model zijn, dat voorbeeld 1 exact representeert. Er zijn twee werelden, wereld 0 en wereld 1 waarvan wereld 0 de echte wereld is en wereld 1 het gerechtvaardigd geloof uit de echte wereld representeert. Er is dus een relatie van wereld 0 naar wereld 1.
Laat volgens Gettiers eerste voorbeeld een aantal dingen waar zijn:

1 In wereld 0: Laat $J(\texttt{Smith}), C(\texttt{Smith})$ en $C(\texttt{Jones})$ gelden. Laat $J(\texttt{Jones})$ onwaar zijn.

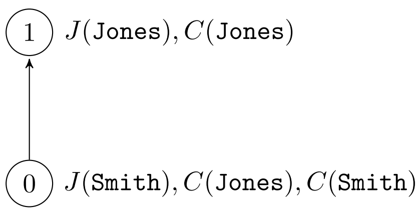
2 Smith heeft een geloof in wereld 0, dat moet worden gerepresenteerd. Dit gebeurt in wereld 1. Laat hier $J(\texttt{Jones})$ en $\neg J(\texttt{Smith})$ gelden.

3 Aangezien Smith geen kennis heeft over de muntjes in zijn eigen zak, moet er een bereikbare wereld vanuit wereld 0 zijn, waarin $C(\texttt{Smith})$ waar is. Laat dit wereld 1 zijn.

4 Smith heeft in het voorbeeld van Gettier bewijs voor (d). Dit wordt in het model gerepresenteerd door de rechtvaardigingsvariabele u, zodanig dat

$$u : [(\texttt{Jones} = \iota x J(x)) \wedge C(\texttt{Jones})]$$

Dit levert het volgende model op:



Laten we deze aannames vergelijken met alle expliciete aannames die Gettier doet in zijn eerste voorbeeld. Laten we deze verzameling formules Γ noemen:

- $J(\texttt{Smith})$
- $C(\texttt{Smith})$
- $C(\texttt{Jones})$
- $\neg J(\texttt{Jones})$
- $u : [(\texttt{Jones} = \iota x J(x)) \wedge C(\texttt{Jones})]$

Deze aannames vormen een correcte (maar geen volledige) beschrijving van de echte wereld (Zie Theorem 9.3 in Artemov, 2008).
Merk op dat S_{dd} de semantiek van de verwijzingsoperatoren inhoudt:

Lemma 4.1.

$$S_{dd} + \Gamma \vdash F \Rightarrow 0 \Vdash F$$

Dit houdt in dat als er iets in de logica geldt, het ook wel in de echte wereld van ons eigen geconstrueerde model moet gelden. Deze eigenschap zullen we later gebruiken om de redenatie van Gettier te formaliseren.

Formele onderbouwing

Gettier concludeert in zijn eerste voorbeeld dat Smith gerechtvaardigd is in het geloof dat hij heeft over dat 'de man die de baan krijgt tien muntjes in zijn zak heeft'. Wij kunnen dat formaliseren tot de volgende formule:

$$t : C(\iota x J(x))$$

Als de conclusie van Gettier klopt, zou deze formule waar moeten zijn in het door ons gecreeërde model voor een of andere t, in wereld 0.

Te bewijzen: Gettiers conclusie is waar in wereld 0.
Bewijs: Laten we precies de redenering van Gettier volgen en formaliseren.
Voor de duidelijkheid hier nogmaals propositie (d) en (e) van Gettier:

(d) $\texttt{Jones} = \iota x J(x) \wedge C(\texttt{Jones})$ (Jones is degene die de baan krijgt en Jones heeft tien muntjes in zijn zak.)

(e) $C(\iota x J(x))$ (Degene die de baan krijgt heeft tien muntjes in zijn zak).

1 $\texttt{Jones} = \iota x J(x) \rightarrow [C(\texttt{Jones}) \rightarrow C(\iota x J(x))]$, dit is een axioma van ons verwijzingsoperatoren-model

2 $[\texttt{Jones} = \iota x J(x) \wedge C(\texttt{Jones})] \rightarrow C(\iota x J(x))$, volgt uit 1 door propositielogica

3 $s : \{[\texttt{Jones} = \iota x J(x) \wedge C(\texttt{Jones})] \rightarrow C(\iota x J(x))\}$, volgt uit CS

4 $u : [\texttt{Jones} = \iota x J(x) \wedge C(\texttt{Jones})] \rightarrow (s \cdot u) : C(\iota x J(x))$, volgt uit 3 door axioma A2 en Modus Ponens

5 $u : [\texttt{Jones} = \iota x J(x) \wedge C(\texttt{Jones})]$, aanname uit Γ

6 $(s \cdot u) : C(\iota x J(x))$, volgt uit 4 en 5 door Modus Ponens

We kunnen nu t invullen voor $s \cdot u$.
Nu geldt:

$$S_{dd} + \Gamma \vdash t : C(\iota x J(x))$$

Aangezien dat geldt, geldt nu ook:

$$0 \Vdash t : C(\iota x J(x))$$

Hiermee is de redenatie van het eerste voorbeeld van Gettier geformaliseerd.

Formalisering van Gettiers tweede voorbeeld

Gettier heeft in zijn artikel uit 1963 twee voorbeelden gegeven. Ik zal voor de volledigheid de formalisering van het tweede voorbeeld zelf construeren aan de hand van de formalisering van het eerste voorbeeld. Hierbij zal ik het voorbeeld iets versimpelen en zowel (g) als (i) weglaten in deze formalisering. (g) en (i) hebben weinig invloed op de conclusie van het gedachtenexperiment en zijn vooral aanwezig voor de vorm. Ik zal ze weglaten om de formalisering soepeler te laten verlopen.
Ik zal in deze constructie dezelfde stappen aanhouden als in het eerste voorbeeld. Merk op dat het tweede voorbeeld geen verwijzingsoperatoren hanteert. We kunnen bij de formalisering van dit voorbeeld uitgaan van J_{CS}.

Definities

Laten we beginnen met enkele definities noteren.

- $F(x)$ is het predicaat dat in natuurlijke taal "x bezit een Ford"betekent.
- $B(x)$ is het predicaat dat in natuurlijke taal "x bevindt zich in Barcelona"betekent.
- Laat `Jones` en `Smith` en `Brown` respectievelijk de entiteiten Jones, Smith en Brown zijn.
- Laat u een onderbouwings-variabele zijn.

Construeren van een model

Laat M een model zijn, die voorbeeld 2 exact representeert. Er zijn twee werelden, wereld 0 en wereld 1 waarvan wereld 0 de echte wereld is en wereld 1 het gerechtvaardigd geloof uit de echte wereld representeert. Er is dus een relatie van wereld 0 naar wereld 1.
Laat volgens Gettiers tweede voorbeeld een aantal dingen waar zijn:

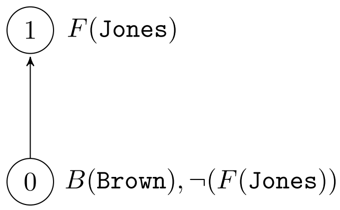
1 In wereld 0: Laat $B(\texttt{Brown})$ waar zijn. Laat $F(\texttt{Jones})$ onwaar zijn.

2 Smith heeft een geloof in wereld 0, die moet worden gerepresenteerd. Dit gebeurt in wereld 1. Laat hier $F(\texttt{Jones})$ waar zijn.

3 Smith heeft in het voorbeeld van Gettier bewijs voor (f). Dit wordt in het model gerepresenteerd door de rechtvaardigings-variabele u, zodanig dat

$$u : [F(\texttt{Jones})]$$

Dit levert het volgende model op:



Laten we deze aannames vergelijken met alle expliciete aannames die Gettier doet in zijn tweede voorbeeld. Laten we deze verzameling formules Δ noemen:

- $\neg F(\texttt{Jones})$ (Jones bezit geen Ford)
- $B(\texttt{Brown})$ (Brown bevindt zich in Barcelona)
- $u : [F(\texttt{Jones})]$ (Smith is gerechtvaardigd om te geloven dat Jones een Ford heeft)

Deze aannames vormen een correcte (maar geen volledige) beschrijving van de echte wereld (Zie Theorem 9.3 in Artemov, 2008):

Lemma 4.2.

$$J_{CS} + \Delta \vdash F \Rightarrow 0 \Vdash F$$

Dit houdt in dat als er iets in de logica geldt, het ook wel in de echte wereld van ons eigen geconstrueerde model moet gelden. Deze eigenschap zullen we later gebruiken om de redenatie van Gettier te formaliseren.

Formele onderbouwing

Gettier concludeert in zijn tweede voorbeeld dat Smith gerechtvaardigd is in het geloof dat hij heeft over (h), namelijk dat 'Jones een Ford heeft of Brown in Barcelona is'. Wij kunnen dat formaliseren tot de volgende formule:

$$t : [F(\texttt{Jones}) \vee B(\texttt{Brown})]$$

Als Gettier zijn conclusie klopt, zou deze formule waar moeten zijn in het door ons gecreeërde model voor een of andere t, in wereld 0.
Te bewijzen: Gettiers conclusie is waar in wereld 0.
Bewijs: Laten we precies de redenering van Gettier volgen en formaliseren.
Voor de duidelijkheid hier nogmaals propositie (f) en (h) van Gettier:

(f) $F(\texttt{Jones})$ (Jones bezit een Ford)

(h) $F(\texttt{Jones}) \vee B(\texttt{Brown})$ (Jones bezit een Ford of Brown is in Barcelona)

1 $s : [F(\texttt{Jones})] \to s : [F(\texttt{Jones} \vee B(\texttt{Brown})]$, volgt uit CS.

2 $u : [F(\texttt{Jones})]$, aanname uit Δ.

3 $(u \cdot s) : [F(\texttt{Jones}) \vee B(\texttt{Brown})]$, volgt uit 1 en Modus Ponens.

We vullen nu t in voor $u \cdot s$. Er volgt nu:

$$J_{CS} + \Delta \vdash t : [F(\texttt{Jones}) \vee B(\texttt{Brown})]$$

Nu geldt dus ook:

$$0 \Vdash t : [F(\texttt{Jones}) \vee B(\texttt{Brown})]$$

Hiermee is de redenatie van het tweede voorbeeld van Gettier geformaliseerd.

Feitelijkheid

In zijn paper uit 2008 argumenteert Artemov dat de voorbeelden van Gettier in bepaalde gevallen consistent zijn als ze worden geformaliseerd, zoals hierboven is aangetoond. In sommige gevallen zouden de problemen van Gettier echter inconsistenties met zich mee brengen als ze worden geformaliseerd. In ieder geval één geval hiervan is het model dat wordt gecreeërd als het axioma van feitelijkheid wordt aangenomen in J_{CS}. Het feitelijkheids-axioma ziet er als volgt uit:

Lemma 4.3.

$$t : F \to F$$

Een zeer simpel axioma, die grote consequenties heeft. Intuïtief zegt het feitelijkheids-axioma dat gerechtvaardigd geloof waarheid impliceert. Vanaf daar is de stap naar een implicatie van gerechtvaardigd geloof naar kennis snel gemaakt. Intuïtief zou dit axioma de voorbeelden van Gettier tegenspreken.
Het axioma brengt dus vragen met zich mee. Moet het wel zo zijn dat iets per definitie waar is, wanneer er een rechtvaardiging voor is? Als dit het geval is, had Smith uit het eerste en het tweede voorbeeld van Gettier per definitie geen rechtvaardiging gehad om bepaalde proposities te geloven.
Laten we het feitelijkheids-axioma aannemen, met het doel om het eerste Gettier-voorbeeld nogmaals te testen op inconsistenties in een nieuwe, sterkere omgeving.

We nemen Γ uit de formalisering van het eerste voorbeeld van Gettier aan.

- $u : [(\texttt{Jones} = \iota x J(x)) \wedge C(\texttt{Jones})]$, aanname uit Γ.
- $\texttt{Jones} = \iota x J(x)$, volgens het feitelijkheids-axioma en propositionele logica.
- $(\texttt{Jones} = \iota x J(x)) \to J(\texttt{Jones})$, volgens de definitie van verwijzingsoperatoren.
- $J(\texttt{Jones})$, volgens Modus Ponens.
- $J(\texttt{Jones})$, volgens Γ.
- Tegenspraak.

Met het aannemen van het feitelijkheids-axioma vormt er zich in Γ een duidelijke tegenspraak. Dit laat zien dat het feitelijkheids-axioma niet alleen informeel, maar ook geformaliseerd het eerste voorbeeld van Gettier ontkracht. Dit kan enkele conclusies tot gevolg hebben. We kunnen hieruit concluderen dat het formaliseren van de voorbeelden van Gettier een limiet heeft. Niet in elke logica zijn de voorbeelden te formaliseren, dus de vraag is hoe nuttig en toepasbaar de voorbeelden zijn.
Aan de andere kant kan het iets zeggen over het feitelijkheids-axioma. Aangezien de logica, verrijkt met het feitelijkheids-axioma tegen-intuïtieve conclusies trekt, kunnen we deze logica wellicht afschrijven als een goede, de echte wereld representerende logica.

Analyse van de formaliseringen

Er blijkt dat de voorbeelden van Gettier niet alleen als een gedachte-experiment gelden, maar ook in een formele logica. We hebben formeel laten zien dat de implicatie van gerechtvaardigd, waar geloof naar kennis niet in alle gevallen opgaat, en dat het JTB-model dus geen volledig geldig model van kennis is.
Dit betekent dat de problemen die Gettier heeft aangekaart in praktijk problematisch kunnen zijn. Als een agent, die volgens een bepaalde logica werkt, volgens zijn redenatie gerechtvaardigd geloof heeft, hoeft dat dus geen kennis te zijn. Vervolgonderzoek kan worden gedaan naar een mogelijke vierde pijler van het JTB-model, of wellicht een volledig andere definitie van kennis, die de problemen van Gettier uitsluiten.
Verder laat deze formalisering zien dat het model dat we hebben gemaakt goed werkt als een model voor de echte wereld, met betrekking tot gerechtvaardigd geloof. Als wij intuïtief iets niet zouden klassificeren als kennis en een model zou dat juist wel doen, zou het model de werkelijkheid niet goed representeren.

Om deze formalisering uit te voeren heeft Artemov gebruik gemaakt van een toevoeging op zijn eerder gedefiniëerde rechtvaardigingslogica, namelijk de verwijzingsoperatoren en de bijbehorende semantiek. Dit maakt de logica sterker en de formalisering daarmee ook. Dat er blijkbaar meer nodig is dan alleen de rechtvaardigingslogica om het eerste voorbeeld van Gettier te formaliseren toont aan dat het een ingewikkeld probleem is. Het is echter een goede eerste stap voor het analyseren van de voorbeelden van Gettier.

Voor het tweede voorbeeld wordt geen gebruik gemaakt van verwijzingsoperatoren of de bijbehorende semantiek. De formalisering wordt volledig gedaan in J_{CS}. Aangezien deze formalisering geen gebruik maakt van verwijzingsoperatoren en omdat hij eenvoudiger in elkaar zit en te begrijpen is dan de formalisering van het eerste voorbeeld van Gettier, vind ik deze formalisering uitstekend om aan te tonen dat Gettiers voorbeelden ook op formeel niveau als argument tegen het JTB-model kunnen worden gebruikt, maar ook om aan te tonen dat J_{CS} een logica is die zich wenselijk gedraagt.

5 Conclusie

In deze scriptie hebben we de rechtvaardigingslogica van Sergei Artemov bestudeerd. Na de introductie van de logica en zowel de syntax als de semantiek te hebben uitgelegd, hebben we soundness en volledigheid voor deze logica bewezen, om een beter en vollediger begrip van de logica te kunnen krijgen.
Vervolgens hebben we de voorbeelden, alsook de problemen die Gettier aankaartte bekeken en de claims van Gettier onder de loep genomen met behulp van rechtvaardigingslogica.
We hebben de formalisering van het eerste voorbeeld van Gettier geanalyseerd. Ook hebben we de formalisering van het tweede voorbeeld uitgewerkt en geanalyseerd.
Hieruit hebben we geconcludeerd dat de formaliseringen goed in elkaar zitten en het eerste voorbeeld complexer is dan het tweede. Het tweede voorbeeld werd door middel van minder bijkomstigheden geformaliseerd, en dat kwam het bewijs ten goede. Hieruit kunnen we concluderen dat de rechtvaardigingslogica van Sergei Artemov een goed middel is om de voorbeelden van Edmund Gettier te formaliseren, en daarmee de argumenten van Gettier stevig onderbouwt. Door in een formele omgeving de implicatie van gerechtvaardigd, waar geloof naar kennis onwaar te laten zijn, hebben we door middel van de rechtvaardigingslogica van Artemov laten zien dat de argumenten die Gettier introduceerde gerechtvaardigd zijn.

Als kanttekening moet worden gezegd dat Artemov in zijn artikel al dan niet bewust vaag blijft over kennis. Er is geen box-operator gedefiniëerd in de logica, zoals gangbaar is in de epistemologie. Het blijft bijvoorbeeld onduidelijk of $0 \Vdash F$ zou betekenen dat een agent kennis heeft van F in wereld 0, óf dat F een feit is in wereld 0. Het is mogelijk dat er betere, waarheidsgetrouwere formaliseringen van de voorbeelden van Gettier bestaan, die wel gebruik maken van een box-operator of op een andere manier concreet zijn over kennis, bijvoorbeeld een formalisering gedaan door Williamson[5].
Aangezien de onderbouwing van de problemen die Gettier aankaartte goed is, en Gettier dus succesvol is onderbouwd door rechtvaardigingslogica, zou het waardevol zijn voor de epistemologie om verder onderzoek te doen naar een mogelijke vierde pijler in het JTB-model. Ook zou een mogelijk onderzoeksgebied het versterken van de voorwaarden voor rechtvaardiging zijn, om erachter te komen of dit kan leiden tot een betere definitie van kennis.

Bibliografie

1 Sergei Artemov. The logic of justification. *Review of Symbolic Logic* 1 (4): 477-513. 2008.

2 Edmund Gettier. Is Justified True Belief Knowledge? *Analysis*, volume 23. 1963.

3 Sergei Artemov, Elena Nogina. Basic systems of epistemic logic with justification. *Journam of Logic and Computation* 15 (6), 1059-1073. 2005.

4 Richard Kirkham. Does the Gettier Problem Rest on a Mistake? *Mind* New Series, Volume 93, No 372, 501-513. 1984.

5 Timothy Williamson. Gettier Cases in Epistemic Logic. *Inquiry: An Interdisciplinary Journal of Philosophy* Volume 56, Issue 1. 2013.