

Vergelijking van zeven GARCH modellen voor het voorspellen van Value at Risk

Jurriaan Wesselink

zomer 2015

Samenvatting

Deze scriptie analyseert de Value at Risk (VaR) voorspellingen van zeven Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH) modellen. De zeven modellen zijn toegepast op zeven marktindices. Het resultaat laat zien dat GARCH modellen beter presteren dan het RiskMetrics model. Echter, Fractionally Integrated GARCH (FIGARCH) modellen presteren niet beter dan andere GARCH modellen. Modellen met een normale verdeling hebben een mindere fit dan modellen met Student-t verdeling. In prestatie van de VaR berekening is echter geen duidelijk verschil te ontdekken tussen de normale en de Student-t verdeling.

1 Inleiding

In de financiële wereld is Value at Risk (VaR) één van de belangrijkste maatstaven van marktrisico's. De maatstaf wordt gebruikt door financiële instituties zoals banken, verzekeraars en vermogensbeheerders. Rond 1990 ontwikkelde J.P. Morgan een model dat elke dag de risicofactoren bijhield en op basis hiervan de waarde van het portfolio schatte. De standaardafwijking van het portfolio werd hieruit bepaald. Deze gebruikte men om maatstaven vergelijkbaar met de moderne VaR te bepalen. In 1994 werd het zogenaamde RiskMetrics model geïntroduceerd voor het bepalen van VaR.

Nog steeds is het RiskMetrics model belangrijk en veelgebruikt voor de berekening van de VaR in het bedrijfsleven. Het model neemt aan dat rendementen van financiële assets een conditionele normale verdeling hebben met verwachting nul en met een variantie op basis van het 'exponentially weighted moving average' van de historische gekwadraterde returns. Een groot voordeel van RiskMetrics is dat het simpel is en dat het als een transparante weergave van marktrisico's fungeert (Tsay, 2005, p. 293). Het model kent ook twee nadelen. Ten eerste heeft de verdeling van een rendement vaak dikkere staarten dan bij de normale verdeling wordt aangenomen. Ten tweede blijkt uit recente empirische onderzoeken dat veel reeksen van financiële rendementen de eigenschap van long memory kunnen hebben, in de zin dat het effect van schokken op de volatiliteit zeer persistent kan zijn, maar wel nog afneemt over de tijd. Deze long memory

eigenschap kan belangrijk zijn voor het modelleren van zowel de waarde van een portfolio als de volatiliteitseigenschap van financiële tijdsreeksen. Het Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (FIGARCH) model, een aangepaste versie van het GARCH model van Bollerslev (1986), bezit de eigenschap van langetermijns afhankelijkheid.

In deze scriptie vergelijk ik de prestatie van zeven GARCH-achtige modellen in het schatten van de VaR van verschillende marktindices. Ik bekijk het RiskMetrics model, het GARCH(1,1)-model, het Integrated GARCH (IGARCH(1,1)) model en het FIGARCH model. In dit laatste model wordt aangenomen dat de volatiliteit de long memory eigenschap heeft. Voor de verdeling van de gestandaardiseerde innovaties nemen we een normale of Student-t verdeling aan. Ik bekijk de long en de short posities van het portfolio.

De rest van de scriptie is als volgt opgebouwd. Sectie 2 bevat een uitgebreide uitleg over de VaR en de verschillende modellen die ik gebruik. In sectie 3 bespreek ik de maximum likelihood methode voor het schatten van de parameters van het FIGARCH-model. De maximum likelihood schatting van de parameters van de overige modellen is een simpeler versie van de methodiek om het FIGARCH model te schatten, zodat ik die niet expliciet hoeft uit te leggen. In sectie 4 pas ik de technieken van sectie 2 en 3 toe op 12 markt indices, ik bekijk de prestaties voor verschillende kwantielen van de voorspelde verdeling. Ten slotte bevat sectie 5 een conclusie en een discussie.

2 VaR en gebruikte modellen

2.1 VaR

Value at Risk (VaR) is een veelgebruikte statistiek voor het bepalen van potentiële risico's van economische verliezen in de financiële markt. Deze statistiek kan gebruikt worden voor het meten van operationele risico's, kredietrisico's en marktrisico's. VaR is een schatting van de grootte van het verlies dat een bedrijf na een bepaalde tijd kan hebben als gevolg van algemene marktschommelingen. VaR wordt gebruikt om te bekijken of een bedrijf een groot verlies overleeft. Het is opgebouwd uit een probabilistisch framework. Een VaR van 50 miljoen met $\alpha = 1\%$ zegt dat het bedrijf 1 keer in de 100 perioden een verlies van 50 miljoen (of meer) kan verwachten.

Als volgt zit de VaR wiskundig in elkaar. Laat P_t de prijs zijn van een asset op tijdstip t . Een VaR-berekening voor het *verlies* in de k perioden tussen tijdstip $t - k$ en tijdstip t :

$$P(P_{t-k} - P_t \leq VaR(t, k, \alpha)) = 1 - \alpha. \quad (1)$$

Met de assumptie van een bepaalde verdeling kan de VaR uitgedrukt worden in het percentiel van de verdeling van het rendement. Laat q_α het α percentiel zijn van de getransformeerde rendementen die als volgt gedefinieerd zijn: $\log(P_t) -$

$\log(P_{t-k})$. Dan geldt dat de VaR is:

$$VaR(t, k, \alpha) = (1 - e^{q_\alpha})P_{t-k}. \quad (2)$$

Hieruit blijkt dat VaR alleen berekend kan worden met accurate voorspelling van de percentielen q_α . Hier wordt de VaR teruggetransformeerd door middel van een e-macht. Dit is nodig vanwege de log-transformatie in onze log-rendementen. De VaR die ik gebruik, omdat deze gemakkelijker is, is:

$$VaR = \sigma_t c. \quad (3)$$

Dit is de procentuele VaR-berekening, welke voor een periode van $k=1$ berekend wordt. c staat voor het desbetreffende kwantiel van de Student-t of normale verdeling. Deze kan ik vergelijken met de data van de log-rendementen. Omdat dit gemakkelijker is, gebruik ik deze in de analyse. In de bespreking van de GARCH-achtige modellen geef ik de originele VaR-berekening weer, zodat de lezer ook voor deze definitie van de VaR kan kiezen. Voor de resultaten in deze scriptie heb ik deze niet gebruikt (maar bovengenoemde VaR berekening in formule (3) die bij het beoordelen van de kwaliteit van de VaR voorspellingen equivalent is maar eenvoudiger om te berekenen).

2.2 GARCH-achtige modellen

Laat $(r_t, t \in Z)$ de rij met log rendementen van de prijzen zijn, vermenigvuldigd met 100. Dit laatste doe ik omdat het rekenen met kleine getallen soms voor numerieke problemen (zoals afronding naar nul) kan zorgen. Deze vermenigvuldiging met 100 voorkomt dat in dit geval. Er geldt, $(r_t = 100 * (\log(P_t) - \log(P_{t-1})))$. In de volgende subsecties bespreek ik de modellen die ik in de scriptie gebruik.

2.2.1 RiskMetrics model

Het RiskMetrics model neemt aan dat de rendementen als volgt gegenereerd worden:

$$r_t = \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1), \sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) \varepsilon_{t-1}^2. \quad (4)$$

Hierbij is λ de smoothing parameter. Deze formulering impliceert een conditionele verdeling met een gemiddelde van nul en een conditionele variantie van σ_t^2 . Een belangrijke eigenschap van het RiskMetrics model is dat de conditionele variantie geschreven kan worden als een exponentially weighted moving average (EWMA) van de historische gekwadraterde rendementen:

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda)(r_{t-1}^2 + \lambda r_{t-2}^2 + \lambda^2 r_{t-3}^2 + \dots). \quad (5)$$

Uit deze vergelijking is te zien dat een grote smoothing parameter zorgt voor

meer gewicht op rendementen in het verdere verleden. Logischerwijs is te zien dat een kleine smoothing parameter voor meer gewicht op recente rendementen legt. Vaak wordt een λ tussen 0.9 en 1 gekozen, met een typische waarde van 0.94 voor dagelijkse data (= 0.97 voor maandelijkse data). Voor het RiskMetrics model geldt dat een VaR op dag t voor 1 dag terug als volgt berekend wordt:

$$VaR(t, k, \alpha) = (1 - e^{q\alpha})P_{t-k} \approx -\sigma_t z_\alpha P_{t-1}, \quad (6)$$

z_α is the α -percentiel van de normale verdeling.

2.2.2 GARCH(p,q)-model

Het GARCH(p, q)-model (met p en q positieve gehele getallen) is als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + \epsilon_t, \epsilon_t \sim \mathcal{D}(0, \sigma_t^2), \\ \sigma_t^2 &= \omega + \beta(B)\sigma_t^2 + \alpha(B)\epsilon_t^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Hierbij is $\omega > 0$ en $\alpha(B) = \alpha_1 B + \dots + \alpha_q B^q$ en $\beta(B) = \beta_1 B + \dots + \beta_p B^p$, met $\alpha_i \geq 0$ voor $i = 1, \dots, q$ en $\beta_j \geq 0$ voor $j = 1, \dots, p$. $\mathcal{D}(0, \sigma_t^2)$ is een conditionele verdeling met gemiddelde nul en variantie σ_t^2 . B is de *lag operator*: $B^k y_t = y_{t-k}$ (Hiervoor wordt ook vaak de notatie L gebruikt). Bollerslev (1986) heeft laten zien dat het GARCH proces van r_t covariantie-stationair (met een eindige en constante onconditionele variantie en eindige constante autocorrelaties) is dan en slechts dan als $\alpha(1) + \beta(1) < 1$. De variantievergelijking van het GARCH(p, q) model kan als volgt worden herschreven:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \omega + \beta(B)\sigma_t^2 + \alpha(B)\epsilon_t^2 \\ \sigma_t^2 - \beta(B)\sigma_t^2 &= \omega + \alpha(B)\epsilon_t^2 \\ (1 - \beta(B))\sigma_t^2 &= \omega + \alpha(B)\epsilon_t^2 \\ \sigma_t^2 &= \omega(1 - \beta(B))^{-1} + \alpha(B)\epsilon_t^2(1 - \beta(B))^{-1}. \end{aligned}$$

Merk op dat het RiskMetrics model gezien kan worden als een speciaal geval van het GARCH(1,1) model met $\mu = 0, \omega = 0$ en $\lambda = \beta_1 = 1 - \alpha_1$. Omdat het GARCH-model adequaat is in veel financiële tijdsreeksen (Bollerslev et al., 1992) heb ik dit model betrokken bij de analyse.

2.2.3 IGARCH(p,q)-model

De variantievergelijking van het GARCH model kan als volgt herschreven worden:

$$\begin{aligned}
\sigma_t^2 &= \omega(1 - \beta(B))^{-1} + \alpha(B)\epsilon_t^2(1 - \beta(B))^{-1} \\
(1 - \beta(B))\sigma_t^2 &= \omega + \alpha(B)\epsilon_t^2(\nu = \epsilon_t^2 - \sigma_t^2) \\
-\alpha(B)\epsilon_t^2 &= \omega - (1 - \beta(B))\sigma_t^2 \\
-\alpha(B)\epsilon_t^2 &= \omega + \nu_t(1 - \beta(B)) - \epsilon_t^2(1 - \beta(B)) \\
(1 - \alpha(B) - \beta(B))\epsilon_t^2 &= \omega + (1 - \beta(B))\nu_t,
\end{aligned}$$

waarbij $\nu = \epsilon_t^2 - \sigma_t^2$. Uit empirische studies van Engle en Bollerslev (1986), Chou (1988) volgt dat het geschatte polynoom met vertraging $(1 - \alpha(B) - \beta(B))$ leidt tot een niet-stationair proces in sommige applicaties van de GARCH modellen. Om een proces te beschrijven dat niet covariantie-stationair is, gebruik ik $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_q B^q$ en volgt het IGARCH(p,q) model:

$$\Phi(B)(1 - B)\epsilon_t^2 = \omega + (1 - \beta(B))\nu_t, \nu_t = \epsilon_t^2 - \sigma_t^2. \quad (10)$$

Het IGARCH model is geïntroduceerd omdat uit veel empirische studies blijkt dat het geschatte GARCH(1,1) model geschatte parameters heeft waarvoor geldt dat $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$ dichtbij 1 ligt, persistente volatiliteiten schat. Het IGARCH(1,1) model kan in dergelijke gevallen een goed alternatief zijn voor het GARCH(1,1) model:

$$\begin{aligned}
r_t &= \mu + \epsilon_t, \\
\epsilon_t &\sim \mathcal{D}(0, \sigma_t^2), \\
\sigma_t^2 &= \omega + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + (1 - \beta_1)\epsilon_{t-1}^2.
\end{aligned} \quad (11)$$

Met $\mu = 0$ en $\omega = 0$ in het IGARCH(1,1) model ontstaat een RiskMetrics model met $\lambda = \beta_1$. Het IGARCH(1,1) model is mogelijk ook een goed model voor de VaR schatting.

2.2.4 FIGARCH(p,d,q)-model

In de voorgaande modellen is de volatiliteit niet met zogenaamd *long memory* gemodelleerd. Omdat er veel aanwijzingen zijn dat volatiliteit in de financiële wereld de long memory eigenschap kan hebben, beschouw ik ook een zogenaamd FIGARCH model. We vervangen de eerste verschil operator $(1 - B)$ uit (9) door de fractionele verschil operator $(1 - B)^d$ met $0 < d < 1$. Hieruit ontstaat het volgende FIGARCH(p,d,q) model:

$$\Phi(B)(1 - B)^d \epsilon_t^2 = \omega + (1 - \beta(B))\nu_t, \nu_t = \epsilon_t^2 - \sigma_t^2. \quad (12)$$

Om de eigenschappen van het model te begrijpen herschrijven we de variantievergelijking als volgt:

$$\begin{aligned}
\Phi(B)(1 - B)^d \epsilon_t^2 &= \omega + (1 - \beta(B))(\epsilon_t^2 - \sigma_t^2) \\
\sigma_t^2(1 - \beta(B)) &= \omega - \Phi(B)(1 - B)^d \epsilon_t^2 + (1 - \beta(B))\epsilon_t^2 \\
\sigma_t^2 &= \omega(1 - \beta(B))^{-1} + (1 - \Phi(B)(1 - B)^d(1 - \beta(B))^{-1})\epsilon_t^2.
\end{aligned}$$

Hierbij kan $(1 - B)^d$ uitgedrukt worden als een uitbreiding van de Maclaurin reeks:

$$(1 - B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k - d)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(-d)} B^k =$$

$$1 - dB + \frac{(1 - d)(-d)}{2} B^2 + \frac{(2 - d)(1 - d)(-d)}{3!} + \dots \quad (14)$$

Als k groot is benadert de fractie $\frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(k+1)}$ het getal k^{-d-1} , de fracties in de oneindige som worden namelijk hyperbolisch kleiner. Dat betekent tevens dat de gekwadrateerde innovaties met elke stap terug in de tijd (hyperbolisch) minder effect hebben op de huidige variantie. Hier ligt het grootste verschil van dit model ten opzichte van het GARCH en IGARCH model. In het GARCH model neemt het effect van de gekwadrateerde innovaties exponentieel af. In het IGARCH model blijft het effect belangrijk voor elke stap extra terug in de tijd. Omdat een hyperbolische afname langzamer gaat dan een exponentiële afname bevindt het FIGARCH model zich tussen beide modellen in. Deze hyperbolische afname van het belang van waarnemingen die verder in het verleden liggen wordt aangeduid met de term *long memory*.

In het GARCH, IGARCH en FIGARCH model neem ik μ mee in het model. In het RiskMetrics model geldt $\mu = 0$, dit geeft wellicht onzuivere VaR schattingen. In sectie 2.2.2 wordt aangenomen dat $\varepsilon_t \sim \mathcal{D}(0, \sigma_t^2)$. Er geldt voor het GARCH, IGARCH en FIGARCH model dat we ofwel een normale verdeling ($\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$) ofwel een gestandaardiseerde Student t-verdeling ($\varepsilon_t \sim \frac{\sigma_t t(\nu)}{\sqrt{\nu/(\nu-2)}}$) aannemen. Hieruit volgt de volgende 1-dags VaR berekening:

$$VaR = (1 - e^{\mu + c\sigma_t})P_{t-1}, \quad (15)$$

waarbij $c = z_\alpha$ voor de normale verdeling en $c = t_\alpha(\nu)/\sqrt{\nu/(\nu-2)}$ voor de Student t-verdeling. $t_\alpha(\nu)$ is het α -percentiel van de gestandaardiseerde Student t-verdeling met ν vrijheidsgraden.

3 Het schatten van GARCH-achtige modellen

De parameters in de GARCH-achtige modellen worden geschat met de maximum likelihood methode. In deze sectie ga ik in op de schatting van de parameters van de FIGARCH modellen.

Ik bekijk de methodiek eerst wanneer er sprake is van Student t-verdeelde innovaties. Met een tijdreeks van rendementen over een periode van T dagen ($r_t, t = 1, \dots, T$) geldt dat de maximum likelihood schatter als volgt berekend wordt. De parameter μ schatten we als het steekproefgemiddelde van de rendementen, $\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t$, de overige parameters worden wel met de methode van maximum likelihood geschat. Hierdoor ontstaat de volgende log-likelihood

functie:

$$l_t = T \ln \frac{\Gamma((\nu + 1)/2)}{\sqrt{(\nu - 2)\pi}\Gamma(\nu/2)} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\ln \sigma_t^2 + (\nu + 1) \ln \left(1 + \frac{\hat{\epsilon}_t^2}{(\nu - 2)\sigma_t^2} \right) \right]. \quad (16)$$

Er geldt dat $\hat{\epsilon}_t = r_t - \hat{\mu}$. Onder de aanname van normaal verdeelde innovaties geldt de volgende log-likelihood functie:

$$l_n = -\frac{1}{2}T \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\ln \sigma_t^2 + \frac{\hat{\epsilon}_t^2}{\sigma_t^2} \right]. \quad (17)$$

De berekening van de log-likelihood functies voor FIGARCH modellen is niet gemakkelijk, omdat de term σ_t^2 nodig is, en dus de term $(1 - B)^d$. Hiervoor moet een oneindige som berekend worden. Echter, voor veel stappen terug is het effect van die innovaties in het model zo klein dat de som als volgt benaderd kan worden:

$$(1 - B)^d \approx \sum_{k=0}^{1000} \frac{\Gamma(k - d)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(-d)} B^k. \quad (18)$$

Wanneer de parameters van het model geschat zijn, kan ik de 1-dags VaR berekenen door een schatting te maken van de σ_t^2 , zoals deze uit het model berekend worden.

4 Toepassing op markt indices

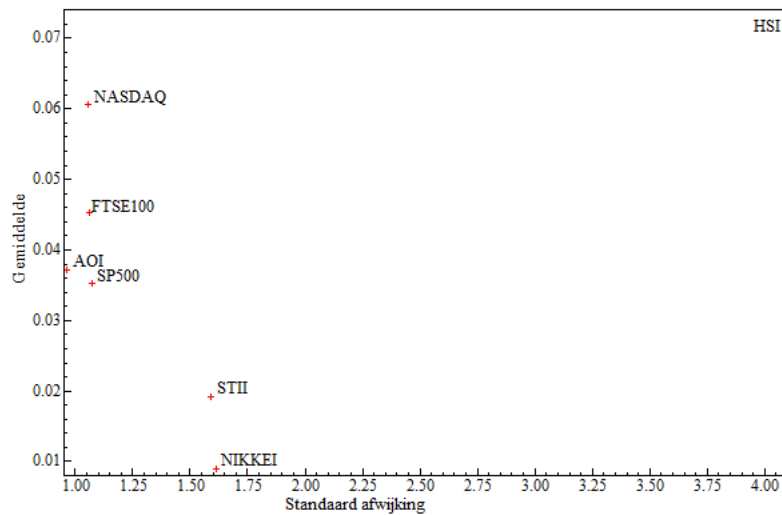
4.1 Beschrijving van de data

In deze sectie pas ik de verschillende GARCH modellen en het RiskMetrics model toe op de marktdata voor de VaR schatting. Ik doe dit op de volgende zeven marktindices: All Ordinaries Index (AOI) van Australië, FTSE100 van de het Verenigd Koninkrijk, Hang Seng Index (HSI) van Hong Kong, NASDAQ van VS, NIKKEI 225 Index van Japan, Standard Poor 500 Index (SP500) van de Verenigde Staten van Amerika en Straits Times Industrial Index (STII) van Singapore. Het zijn allemaal koersen van de wereldmarkt en de belangrijkste markten in Azië. De periode is weergegeven in tabel 1. Alle datasets eindigen op 31 december 1998. Sommige datasets hebben minder datapunten dan andere, omdat de data niet volledig te downloaden zijn (en omdat verschillende landen verschillende feestdagen kunnen hebben). Straks worden de data opgedeeld in een schattings-dataset en een validatie-dataset. De schattings-dataset wordt gebruikt om de parameters te bepalen in de verschillende modellen. Ik gebruik de validatie-data vervolgens om de prestatie van de verschillende methodes te bekijken en te vergelijken. Het rendement r_t is als volgt gedefinieerd: $r_t = 100 * (\log(P_t) - \log(P_{t-1}))$. Tabel 1 is een overzicht van de statistieken van de rendementen.

Index	Periode	n	Gemiddelde	Standaardafwijking	Scheefheid	Kurtosis
AOI	06/08/84 - 31/12/98	3639	0.037	0.96	-7.29	190.3
FTSE100	14/02/84 - 31/12/98	3882	0.0453	1.06	-1.76	32.75
HSI	03/01/75 - 31/12/98	5209	0.0734	4.097	-18.18	947.1
NASDAQ	12/10/84 - 31/12/98	3593	0.061	1.06	-1.45	22.26
NIKKEI	05/01/84 - 31/12/98	3692	0.00889	1.62	-1.2	40.04
SP500	04/01/50 - 31/12/98	12327	0.0352	1.074	-0.882	32.72
STII	03/01/80 - 31/12/98	2737	0.019	1.593	-0.8225	41.802

Tabel 1: Statistieken van rendementen

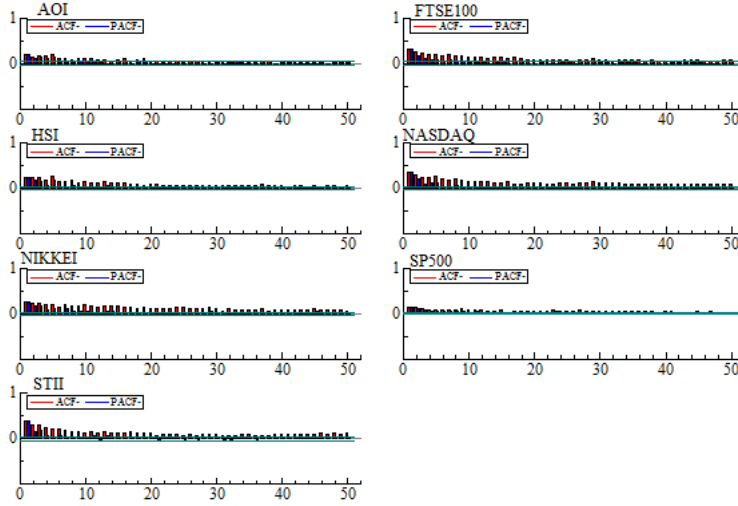
HSI heeft gemiddeld de hoogste rendementen en NIKKEI heeft gemiddeld de laagste rendementen. De standaardafwijking, de scheefheid en de kurtosis van HSI zijn opmerkelijk hoog. Op het eerste gezicht kunnen hier problemen in de data zitten voor het beschrijven met de modellen. Gezien de overige standaardafwijkingen van de indices, heeft een investering in AOI, FTSE100 of NASDAQ het minste risico. Figuur 1 is een grafiek van het gemiddelde tegen de standaardafwijking. Het is goed zichtbaar dat FTSE100, AOI, SP500 een cluster vormen (eventueel NASDAQ erbij). STII en NIKKEI, twee indices van de Aziatische markten, vormen een tweede cluster. Het lijkt erop dat de Aziatische clusters een hogere volatiliteit hebben en ook een lagere verwachting van het rendement (afhankelijk van de grootte van de dataset).



Figuur 1: Gemiddelde tegen standaardafwijking van de dagelijkse (procentuele) log-rendementen

In figuur 2 zie ik dat de autocorrelatie van de absolute waarden van de

gecentreerde rendementen, $|r_t - \bar{r}|$, heel langzaam afneemt in de lags. Hieruit blijkt dat er *long memory* kan zijn in de volatiliteit. Het is echter lastiger te zeggen van HSI, SP500 en AOI, de autocorrelatie wordt namelijk al snel minder groot. In deze figuur zijn ook de partiële autocorrelaties te zien. Deze worden al snel niet significant voor alle indices. Dit is niet wonderbaarlijk omdat veel processen met long memory dit ook hebben.



Figuur 2: Autocorrelatie (ACF) en Partial-Autocorrelatie (PACF) van de $|r_t - \bar{r}|$

4.2 Schatten GARCH parameters

Zoals al eerder kort omschreven is, maak ik van de totale dataset twee datasets: een schattings-dataset en een validatie-dataset. Met behulp van de schattings-dataset schat ik de parameters voor de GARCH-modellen. Voor de validatie-dataset schat ik vervolgens de VaR van de laatste vier jaar. Deze VaR-schattingen worden gebruikt om de out-of-sample prestatie in het voorspellen van de VaR van de verschillende GARCH-modellen te testen.

Hieronder de gebruikte modellen om de variantie te berekenen:

$$\begin{aligned}
 \text{RiskMetrics:} & \quad \sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) \epsilon_{t-1}^2 \\
 \text{GARCH(1,1):} & \quad \sigma_t^2 = \omega + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 \\
 \text{IGARCH(1,1):} & \quad \sigma_t^2 = \omega + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + (1 - \beta_1) \epsilon_{t-1}^2 \\
 \text{FIGARCH(1,d,0):} & \quad \sigma_t^2 = \omega + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + (1 - \beta_1 B - (1 - B)^d) \epsilon_t^2
 \end{aligned}$$

De normale verdeling of de Student-t verdeling is aangenomen voor de innovaties in het GARCH, IGARCH en FIGARCH model. Dan ontstaan zes modellen. Het RiskMetrics model is de zevende. De λ in het RiskMetrics model is 0.94.

In tabel 2 tot en met 4 zijn de verschillende geschatte parameterwaarden weergegeven. Ik heb de waarden gecontroleerd door een set simulaties. De plots van deze simulaties geven een indruk van de verschillende uitwerkingen van de modellen (zie figuur 3 van simulaties van AOI, gesimuleerde tijdreeksen uit modellen die geschat zijn op basis van de data van de rendementen op de AOI index). Ook gebruik ik twee statistieken die aangeven hoe goed het model gefit is op de data. Dat zijn de zogenaamde Akaike Information Criterion (AIC) en de Schwarz Bayesian Information Criterion (SBIC). Hoe kleiner de AIC of de SBIC is, hoe beter het model op de data is gefit. Tabel 5 geeft een ranking van de modellen op basis van deze statistieken. Beter modellen zijn als eerste geplaatst in de ranking. De modellen met een Student-t verdeling hebben een betere fit dan de modellen met een normale verdeling. Verder zijn de GARCH en IGARCH modellen beter dan het FIGARCH model.

Het is te zien dat $\Phi \equiv \alpha_1 + \beta_1$ voor alle GARCH(1,1) modellen dichtbij 1 wordt geschat. De lage schatting van β_1 in het GARCH(1,1) model voor STII valt op. Echter, ook hier geldt dat Φ weer dichtbij 1 ligt. In het artikel van So en Yu (2006) wordt gezegd dat de Φ altijd lager ligt voor de GARCH(t) modellen dan voor de GARCH modellen met de normale verdeling. Dit is in deze schattingen niet altijd correct. Het verschil komt onder andere voort uit de keuze voor een ingevoerde restrictie van $\Phi < 1$. Deze restrictie garandeert de covariantie-stationariteit in het model. Wel is er vaker een hogere β_1 in de GARCH modellen met de normale verdeling dan in de GARCH(t) modellen. Dat betekent dat er in de normale GARCH modellen meer impact is van σ_{t-1}^2 op de huidige variantie dan in de GARCH(t) modellen.

In het IGARCH model ligt de β_1 betrekkelijk lager dan de λ in het RiskMetrics model. Dit zorgt ervoor dat er in het IGARCH model minder impact van σ_{t-1}^2 op de huidige variantie is. Dat houdt direct in dat er meer impact van de vorige innovaties is op de huidige variantie. De vergelijking tussen de β_1 van het IGARCH model met de normale verdeling en het IGARCH(t) model is lastig. In de analyse van So en Yu (2006) gaan zij hier ook niet op in. Het valt op dat de verhouding tussen de geschatte $\hat{\beta}_1$ in de modellen met de normale en Student-t verdeling voor de verschillende indices voor IGARCH en GARCH overeenkomen.

Voor het FIGARCH model verschilt de geschatte waarde van d tussen 2.4626e-008 en 0.576. De meeste geschatte waarden van d zijn significant verschillend van 0. De vier laagste zijn gevonden bij het FIGARCH model met de normale verdeling van FTSE100 en NASDAQ en bij het FIGARCH(t)-model van AOI en FTSE100, deze laatste twee komen overeen met de analyse van So en Yu (2006). Voor de meeste indices geldt dat de marktvolatiliteit inderdaad de long memory eigenschap lijkt te hebben. Voor de indices met een d dichtbij 0 valt dit te betwijfelen.

Met behulp van tabel 5 kan ik de kwaliteit van de verschillende modelfits vergelijken. Het is duidelijk dat de modellen met de Student-t verdeling een betere fit hebben dan de modellen met de normale verdeling. Daarnaast lijken

ω	GARCH	GARCH(t)	IGARCH	IGARCH(t)	FIGARCH	FIGARCH(t)
AOI	0.0662	0.184	0.355	0.0513	0.590	0.897
FTSE100	0.077	0.063	0.374	0.025	0.77	3.95
HSI	0.11	0.157	0.105	0.137	0.4580	0.4670
NASDAQ	.0347	0.0709	0.0190	0.204	0.672	0.897
NIKKEI	0.019	0.036	0.019	0.034	1.050	2.12
SP500	0.0043	1.748	0.00258	1.748	0.919	0.897
STII	0.27	0.28	0.19	0.28	0.670	1.47

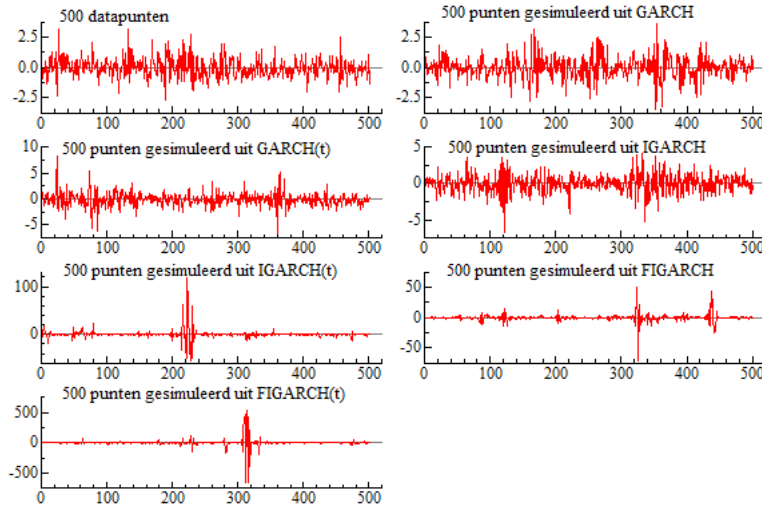
Tabel 2: schattingen $\hat{\omega}$

β_1	GARCH	GARCH(t)	IGARCH	IGARCH(t)	FIGARCH	FIGARCH(t)
AOI	0.781	0.598	0.352	0.817	0.0870	0.00023
FTSE100	0.767	0.827	0.352	0.87	2.8295e-005	0.00023
HSI	0.774	0.776	0.774	0.779	0.055	0.0795
NASDAQ	0.792	0.712	0.819	0.00719	2.4626e-008	0.074
NIKKEI	0.85	0.83	0.85	0.82	0.023	0.14
SP500	0.962	0.291	0.964	0.291	0.0187	0.576
STII	0.41	0.46	0.45	0.49	0.082	0.123

Tabel 3: schattingen $\hat{\beta}_1$

α_1	GARCH	GARCH(t)	d	FIGARCH	FIGARCH(t)
AOI	0.14	0.14		0.077	0.018
FTSE100	0.15	0.10		0.057	0.018
HSI	0.226	0.189		0.00078	0.00012
NASDAQ	0.163	0.193		1.8288e-005	2.6093e-010
NIKKEI	0.15	0.036		0.0074	0.018
SP500	0.035	0.71		0.0144	0.571
STII	0.398	0.35		0.037	0.0809

Tabel 4: schattingen $\hat{\alpha}_1$ (GARCH, GARCH(t); schattingen \hat{d} (FIGARCH FI-GARCH(t))



Figuur 3: Simulaties van de marktindex AOI (gesimuleerd uit modellen die geschat zijn op basis van de data van de rendementen op de AOI index). Deze simulaties worden gebruikt om te bekijken of het geschatte model een correcte beschrijving van de werkelijke, empirische tijdreeks geeft (in de zin dat gesimuleerde data uit het model qua eigenschappen 'lijken op' de empirische tijdreeks).

de GARCH-modellen betere fits te geven dan de FIGARCH modellen.

$AIC(SBIC)$	GARCH	GARCH(t)	IGARCH	IGARCH(t)	FIGARCH	FIGARCH(t)
AOI	4 (4)	1 (1)	5 (5)	2 (2)	6 (6)	3 (3)
FTSE100	4 (4)	1 (1)	5 (5)	2 (2)	6 (6)	3 (3)
HSI	4 (5)	1 (2)	5 (4)	2 (1)	6 (6)	3 (3)
NASDAQ	2 (3)	1 (1)	5 (5)	3 (2)	6 (6)	4 (4)
NIKKEI	2 (4)	4 (2)	1 (5)	3 (1)	6 (6)	5 (3)
SP500	5 (5)	1 (2)	4 (4)	2 (1)	6 (6)	3 (3)
STII	4 (4)	1 (1)	5 (5)	2 (2)	6 (6)	3 (3)

Tabel 5: model ranking gebaseerd op de AIC en SBIC statistiek (tussen haakjes)

4.3 Resultaten VaR

Nu volgt het validatie-gedeelte. Ik gebruik data van 1995-1998. VaR-schattingen zijn gecreëerd met het gebruik van de geschatte parameters. Ik gebruik drie veelgebruikte α -waarden: 1%, 2.5% en 5%. Ik bereken de overschrijdingsgraad $\hat{\alpha}$ die aangeeft hoe vaak het log-rendement negatiever is dan de VaR. De tabellen 6,7 en 8 hieronder geven de overschrijdingsgraden.

Voor α gelijk aan 1% of 2.5% is de overschrijdingsgraad het beste bij de GARCH-modellen. Voor α gelijk aan 5% geldt dat ook RiskMetrics goede overschrijdingsgraden genereert. Al met al presteren de GARCH-modellen in dit geval het beste.

Overschrijdingsgraad 1% (Long)	GARCH	GARCH(t)	IGARCH	IGARCH(t)	FIGARCH	FIGARCH(t)	RiskMetrics
AOI	0.99	1.19	0.29	0.59	0.69	0.016	1.78
FTSE100	1.15	1.15	0.87	0.6	1.3	0	0.96
HSI	2.1	1.72	2.1	1.6	1.6	0.89	2.7
NASDAQ	3.26	3.37	2.47	6.93	2.48	0.49	2.37
NIKKEI	2.33	2.33	2.33	2.22	2.22	0.45	2.63
SP500	1.58	0.2	1.58	0.2	1.68	0.02	2.57
STII	1.9	1.7	1.8	1.2	2.5	0.53	2.6

Tabel 6: Overschrijdingsgraad 1% (Long position)

Overschrijdingsgraad 2.5% (Long)	GARCH	GARCH(t)	IGARCH	IGARCH(t)	FIGARCH	FIGARCH(t)	RiskMetrics
AOI	2.47	2.47	0.79	1.38	0.98	0.097	3.9
FTSE100	2.30	2.39	1.82	1.73	2.49	0.024	3.26
HSI	3.64	3.55	3.64	3.36	2.68	0.95	4.41
NASDAQ	5.64	5.84	4.55	9.21	4.26	0.89	4.35
NIKKEI	3.55	3.55	3.55	3.34	4.05	1.01	3.64
SP500	2.78	0.49	2.78	0.49	2.1	0.031	3.86
STII	3.5	3.4	2.9	2.1	3.6	1.2	4.1

Tabel 7: Overschrijdingsgraad 2.5% (Long position)

Overschrijdingsgraad 5% (Long)	GARCH	GARCH(t)	IGARCH	IGARCH(t)	FIGARCH	FIGARCH(t)	RiskMetrics
AOI	4.35	4.05	2.17	3.07	3.07	0.2	6.4
FTSE100	4.41	4.31	2.39	3.93	3.74	0.096	6.2
HSI	6.04	6.04	6.04	5.27	3.84	2.0	6.99
NASDAQ	8.71	8.91	7.32	12.1	6.83	1.78	5.64
NIKKEI	5.67	5.47	5.67	5.1	5.07	2.12	5.27
SP500	5.24	0.89	5.24	0.89	3.66	0.099	7.23
STII	5.5	4.8	5.00	3.5	4.8	2.5	5.81

Tabel 8: Overschrijdingsgraad 5%(Long position)

Hetzelfde heb ik berekend voor de Short Position. Ik bereken de overschrijdingsgraad $\hat{\alpha}$ die aangeeft hoe vaak minus het log-rendement negatiever is dan de bijbehorende VaR. De tabellen 9,10 en 11 hieronder geven de overschrijdingsgraden. Voor α gelijk aan 1% geldt dat de FIGARCH-modellen voor veel indices het beste resultaat levert. Voor α gelijk aan 5% en 2.5% leveren de GARCH en de IGARCH modellen het beste resultaat.

Ten slotte geven de figuren 4 en 5 de boxplots van respectievelijk de Long position en de Short position van de overschrijdingskansen van de verschillende modellen (voor de 95% VaR, waarbij de overschrijdingskans dus 5% hoort te zijn).

Overschrijdingsgraad 1% (Short)	GARCH	GARCH(t)	IGARCH	IGARCH(t)	FIGARCH	FIGARCH(t)	RiskMetrics
AOI	0.79	1.1	0.6	0.8	0.6	0	1.09
FTSE100	1.53	1.34	0.67	1.15	1.1	0.19	
HSI	0.96	0.96	0.96	0.77	1.15	0.096	1.53
NASDAQ	1.98	2.38	1.39	4.16	1.58	0.29	1.88
NIKKEI	1.72	1.72	1.72	1.62	2.02	0.4	1.8
SP500	1.49	0	1.49	0	0.99	0	1.58
STII	2.3	1.8	1.9	1.3	2.1	0.7	2.1

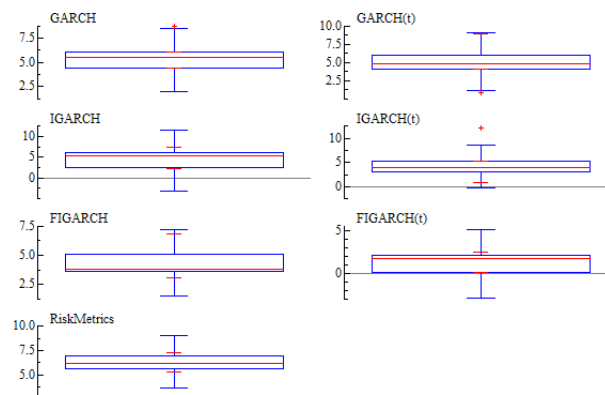
Tabel 9: Overschrijdingsgraad 1% (Short position)

Overschrijdingsgraad 2.5% (Short)	GARCH	GARCH(t)	IGARCH	IGARCH(t)	FIGARCH	FIGARCH(t)	RiskMetrics
AOI	1.87	1.87	0.89	1.1	1.4	0.10	2.37
FTSE100	2.97	2.87	1.44	1.92	1.82	0.19	3.16
HSI	1.82	2.1	1.82	1.63	2.01	0.67	2.88
NASDAQ	3.56	3.56	2.97	5.24	2.78	0.49	2.78
NIKKEI	2.73	3.04	2.74	2.43	3.65	1.11	2.94
SP500	2.57	0.2	2.48	0.2	1.49	0	3.27
STII	3.8	3.6	3.3	2.2	2.9	1.5	3.1

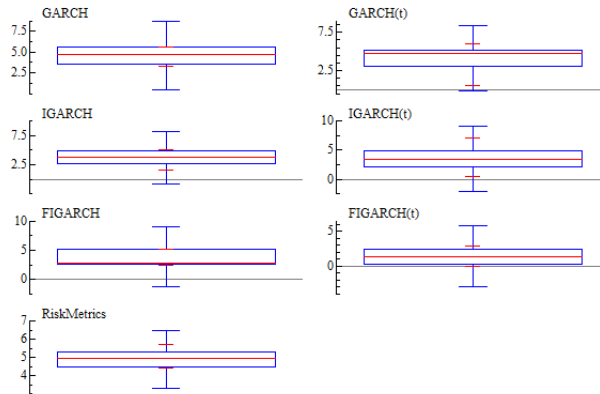
Tabel 10: Overschrijdingsgraad 2.5%(Short position)

Overschrijdingsgraad 5% (Short)	GARCH	GARCH(t)	IGARCH	IGARCH(t)	FIGARCH	FIGARCH(t)	RiskMetrics
AOI	3.26	3.06	1.58	2.17	2.8	2.96	4.94
FTSE100	4.7	4.7	2.59	3.45	2.59	0.3	5.3
HSI	3.55	3.36	3.55	2.78	2.88	1.34	4.5
NASDAQ	5.64	5.94	4.55	7.02	3.86	0.69	4.55
NIKKEI	4.86	5.17	4.86	4.96	5.17	2	5.07
SP500	3.76	0.5	3.86	0.5	2.5	0	4.45
STII	5.61	5.1	5.0	3.7	5.2	2.5	5.71

Tabel 11: Overschrijdingsgraad 5%(Short position)



Figuur 4: Boxplot van de overschrijdingskansen (voor de zeven beursindices) voor de Long positie voor de 95% VaR



Figuur 5: Boxplot van de overschrijdingskansen (voor de zeven beursindices) voor de Short positie voor de 95% VaR

5 Conclusie en Discussie

5.1 Conclusie

In deze scriptie bekijk ik de prestatie van zeven GARCH-achtige modellen op de berekening van VaR schattingen van markt rendementen.

Het is opmerkelijk dat de FIGARCH modellen niet nadrukkelijk beter zijn dan de GARCH modellen. Dit was de verwachting omdat er in FIGARCH modellen long memory gemodelleerd wordt. De conclusie die ik trek is dat deze afhankelijkheid niet cruciaal is voor de VaR berekening. Ook concludeer ik dat de modellen met de beste in-sample fit niet per se het beste presteren in de out-of-sample VaR berekening.

Het is moeilijk om te concluderen of de normale verdeling beter is dan de t-verdeling in de berekening van de VaR. In het algemeen heeft de Student t-verdeling dikkere staarten dan de normale verdeling en zal de overschrijdingskans van de modellen met een Student t-verdeling lager liggen (bij de 97.5% en 99% VaR). Dit is echter niet altijd het geval.

Het is te zien dat de overschrijdingsgraad van de Short positie lager ligt dan de overschrijdingsgraad van de Long positie. Een verklaring hiervoor is het verschil in de verdeling van negatieve en positieve rendementen. Hier is de negatieve scheefheid van de verdeling van log-rendementen te zien.

5.2 Discussie

In vervolgonderzoek moet men modellen bekijken die wel rekening houden met het leverage effect. Dat zijn bijvoorbeeld het E-GARCH model en het threshold GARCH model (TGARCH). Ook kan een scheve Student-t verdeling beschouwd worden, om rekening te houden met de scheefheid in de verdeling van de log-

rendementen.

Ook is het een optie om een FIGARCH(1,d,q) model met $q = 1$ (i.p.v. $q=0$) te schatten. Mogelijk presteert het FIGARCH model dan veel beter. Verder is het wellicht een optie een alternatief voor het FIGARCH model te verzinnen.

Ten slotte is het een optie om met extra verklarende variabelen een beter model te krijgen.

A Appendix: Kritiek op het artikel van So & Yu (2006)

So & Yu (2006) hebben afleiding (4) in het subhoofdstuk FIGARCH(p,d,q) niet goed uitgewerkt. De afleiding is aangepast en uitgebreid weergegeven in mijn analyse.

De parameterschattingen uit het artikel van So & Yu (2006) zijn niet uitgebreid weergegeven. Voor de GARCH modellen is slechts de optelsom van α_1 en β_1 gegeven. Voor de IGARCH modellen is logischerwijs de β_1 gegeven. Voor beide FIGARCH modellen is slechts de waarde van de parameter d gegeven.

Ook de uitleg van de parameterschattingen is beperkt in het artikel van So & Yu (2006). Er wordt bijvoorbeeld niet uitgelegd waarom gekozen wordt voor een FIGARCH(1,d,0) model. In mijn analyse heb ik het FIGARCH(1,d,1) uitgetoetst. De resultaten waren echter niet relevant voor de analyse van de VaR en bovendien niet te vergelijken met resultaten van de analyse van So & Yu (2006).

Het is belangrijk om uitgebreid in te gaan op de details van het FIGARCH model. In mijn modellering heb ik $(1 - B)^d$ niet benaderd zoals in het artikel van So & Yu (2006). Omdat ik te maken kreeg met negatieve waarden van de variantie, heb ik $(1 - B)^d$ als volgt benaderd:

$$(1 - B)^d \approx \sum_{k=0}^{170} \frac{\Gamma(k - d)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(-d)} B^k, \quad (19)$$

waarbij ik 170 termen gebruik i.p.v. 1000. Dit geeft geen cruciale wending in de vergelijking van mijn FIGARCH-model met die van So & Yu (2006), omdat de error termen van lag 171 en verder waarschijnlijk nauwelijks invloed hebben. De uitkomst van het FIGARCH(t) model lijkt irrelevant voor het onderzoek. De waarden liggen te ver van de verwachte waarden af. Figuur 3 laat al zien dat de gesimuleerde data uit het geschatte FIGARCH(t) model heel anders zijn dan de empirische data.

De overschrijdingsgraad van de VaR (d.w.z. het percentage rendementen dat extremer is dan de geschatte VaR) geeft zowel in mijn analyse als die van So & Yu (2006) niet een eenduidig beeld. De verschillende datasets zorgen voor verschillende waarden van de overschrijdingsgraad. Dit was mogelijk ook te verwachten, maar hierdoor wordt het moeilijk om algehele conclusies te trekken. Mijn conclusie dat de long memory eigenschap van het FIGARCH-model tegen mijn verwachting niet cruciaal is, is voor de ene dataset passender dan voor de andere.

Bibliografie

- So, M., Yu, P. (2006). Empirical analysis of GARCH models in value at risk estimation. *Int. Fin. Markets, Inst. and Money* 16 , 180–197.
- Tsay, R.S. (2005). *Analysis of financial time series*. 2nd edition.
- Bollerslev, T., Chou, R.Y., Kroner, K.F., 1992. ARCH modeling in finance; A review of the theory and empirical evidence. *Journal of Econometrics* 52, 5–59.
- Engle, R.F., Bollerslev, T., 1986. Modelling the persistence of conditional variances. *Econometric Reviews* 5, 1–50.
- Chou, R.Y., 1988. Volatility persistence and stock valuations: some empirical evidence using GARCH. *Journal of Applied Econometrics* 3, 279–294.