Wiskundig denken in de pilotexamens van de nieuwe wiskundecurricula havo/vwo

Master thesis, juli 2015

Hanneke Kodde-Buitenhuis
Studentnummer: 3484793
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht
Cito, Arnhem
Supervisor: prof.dr. P. Drijvers
Coördinator: dr. D. J. Boerwinkel
30 ECTS

Universiteit Utrecht

Freudenthal Instituut
voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen

CITO

Samenvatting

Wiskundige denkactiviteiten (WDA) staan momenteel sterk in de belangstelling. Ze vormen een belangrijk onderdeel van de nieuwe wiskundecurricula voor havo en vwo, die in het schooljaar 2015-2016 worden ingevoerd. Deze nieuw ontwikkelde examenprogramma's zijn sinds 2009 al op verschillende pilotscholen ingevoerd en afgesloten met pilotexamens. Dit onderzoek gaat over de rol van WDA in deze pilotexamens en de resultaten van leerlingen op dat gebied.

De ruime aandacht voor reproductieve kennis en vaardigheden en de gebrekkige aandacht voor productieve vaardigheden in het huidige wiskundeonderwijs vormt een probleem; een goede verhouding hiertussen is belangrijk (Van Streun, 2014). In 2007 heeft de commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (cTWO) een visiedocument opgesteld met daarin een voorstel voor het vernieuwen van het wiskundeonderwijs voor havo en vwo. De commissie waarschuwt voor een te eenzijdige nadruk op procedurele kennis ten koste van conceptuele kennis. cTWO pleit dan ook voor een belangrijke plaats van WDA in het wiskundeonderwijs (cTWO, 2007, 2013).

Om het begrip 'wiskundig denken' verder handen en voeten te geven voor de implementatie in het wiskundeonderwijs heeft Drijvers een compacte werkdefinite opgesteld: "*Wiskundig denken is bedenken hoe je wiskundig gereedschap kunt gebruiken om een probleem aan te pakken"* (Drijvers, 2015a). In dit onderzoek worden de deelaspecten *probleemoplossen, modelleren* en *abstraheren* onderscheiden. Wil het wiskundig denken een belangrijke plaats in het wiskundeonderwijs krijgen, dan zal dit ook zichtbaar moeten worden in de toetsen, die immers hun schaduw vooruitwerpen op het onderwijs (Bergsma, Brouwers, Van der Laan, Legierse & Visser, 2006; Voogt & Pareja Roblin, 2010; Drijvers, 2015b).

Het onderzoek kent de volgende onderzoeksvragen:

1. In hoeverre doen de vragen van de pilotexamens wiskunde B voor havo en vwo een beroep op wiskundige denkactiviteiten?
2. Presteren leerlingen van pilotscholen beter dan leerlingen van reguliere scholen met betrekking tot wiskundige denkactiviteiten in examens van havo en vwo?

Het onderzoek bestaat uit drie fasen: een voorbereidende fase, de dataverzameling en een analysefase. De *analysefase* bestaat uit drie delen: het analyseren van de examens, een kwantitatieve analyse van de resultaten van leerlingen en een kwalitatieve analyse van het leerlingenwerk. Voor de kwantitatieve analyse is data gebruikt die beschikbaar is bij Cito. Voor de kwalitatieve analyse zijn drie reguliere scholen (in totaal 128 leerlingen) bezocht en vier van de vijf pilotscholen (in totaal 110 leerlingen) waar het pilotexamen voor vwo wiskunde B 2014-1 gemaakt is en nog aanwezig was.

Met betrekking tot de eerste onderzoeksvraag leidt het onderzoek tot de volgende resultaten. Uit het overzicht in Tabel 1 blijkt dat er in de pilotexamens meer WDA getoetst worden dan in de reguliere examens. Wel neemt het percentage vragen waarin WDA getoetst worden voor het vwo in de loop der jaren af. Wat betreft de deelaspecten van WDA is het de conclusie dat met name *probleemoplossen* getoetst wordt in de pilotexamens. Modelleren en abstraheren komen veel minder aan de orde. Gezien het aantal examenvragen waarin WDA getoetst worden en de verschillende deelaspecten die aan de orde komen is hier nog vooruitgang te boeken. Mogelijk kunnen hiervoor in de constructieopdrachten voor examens richtlijnen worden opgenomen.

Tabel 1
Overzicht van het aantal examenvragen waarin WDA getoetst worden in pilot- en reguliere examens voor havo (2011-2015) en vwo (2012-2015) en bijbehorende percentages

Afnamejaar	Vwo pilot		Vwo regulier		Havo pilot		Havo regulier	
2011					8/19	(42%)	3/19	(16%)
2012	9/15	(60%)	7/17	(41%)	5/19	(26%)	1/19	(5%)
2013	9/17	(53%)	6/18	(33%)	4/17	(24%)	1/19	(5%)
2014	9/18	(50%)	4/18	(22%)	6/19	(32%)	2/19	(11%)
2015	6/16	(38%)	6/17	(35%)	6/16	(38%)	4/19	(21%)
Totaal	33/66	(50%)	23/70	(33%)	29/90	(32%)	11/95	(12%)

Voor de beantwoording van de tweede onderzoeksvraag zijn de resultaten van zowel de kwantitatieve analyse van de leerlingenresultaten als de kwalitatieve analyse van het leerlingenwerk onderzocht.

De conclusie is dat pilotleerlingen op het havo gemiddeld hoger (+6.0) scoren dan reguliere leerlingen op overlappende vragen (vragen in de pilotexamens die exact gelijk zijn aan vragen in de reguliere examens) waarin tevens WDA getoetst worden. Op het vwo scoren de pilotleerlingen gemiddeld ook hoger (+4.8) dan de reguliere leerlingen op deze vragen. Het gaat hier overigens over slechts enkele vragen. Uit het gemiddelde van de p-waarden van alle examenvragen waarin WDA getoetst worden is te concluderen dat pilotleerlingen gemiddeld juist lager scoren dan reguliere leerlingen, dit geldt voor zowel het havo als het vwo.

De kwalitatieve analyse van het leerlingenwerk leidt tot de volgende conclusies. Wat betreft de overlappende vragen van het pilot- en reguliere examen waarin tevens WDA getoetst worden, is het de conclusie dat (a) pilotleerlingen meer alternatieve oplossingswegen volgen om een probleem op te lossen, (b) pilotleerlingen vaker een schets toevoegen om inzicht in het probleem te krijgen, (c) pilotleerlingen en reguliere leerlingen ongeveer even vaak een woordelijke conclusie opschrijven, ook als dat niet perse nodig is en (d) dat pilotleerlingen en reguliere leerlingen ongeveer evenveel fouten maken door gebrek aan parate voorkennis.

Wat betreft de nieuwe vragen in het pilotexamen waarin tevens WDA getoetst worden, is het de conclusie dat (a) pilotleerlingen regelmatig alternatieve oplossingswegen volgen om het probleem op te lossen, maar vaak vasthouden aan een ingeslagen oplossingsweg, (b) pilotleerlingen weinig moeite hebben met het vertalen tussen verschillende representaties in de wiskunde, (c) meerdere pilotleerlingen een vergelijking exact oplossen, waar het ook met de grafische rekenmachine mag en (d) dat de WDA vragen die betrekking hebben op een nieuw onderwerp minder goed gemaakt worden en dat dit sterk verschilt per klas.

Wat betreft de vragen in het reguliere examen, die niet in het pilotexamen zijn opgenomen en waarin tevens WDA getoetst worden, is het de conclusie dat leerlingen vragen in de Euclidische meetkunde oplossen door eerst zoveel mogelijk gegevens te bepalen en op te schrijven en vervolgens een oplossingsweg kiezen. Als een leerling vastloopt wordt een nieuwe oplossingsweg ingeslagen om het probleem toch op te lossen. Met WDA vragen die niet tot de Euclidische meetkunde behoren weten leerlingen minder goed raad, daarbij wordt vaak een onvolledige uitwerking opgeschreven.

1. Inleiding

Wiskundige denkactiviteiten (WDA) staan momenteel sterk in de belangstelling. Ze vormen een belangrijk onderdeel van de nieuwe wiskundecurricula voor havo en vwo, die in het schooljaar 2015-2016 worden ingevoerd. Deze nieuw ontwikkelde examenprogramma's zijn sinds 2009 al op verschillende pilotscholen ingevoerd en afgesloten met pilotexamens. Dit onderzoek gaat over de rol van WDA in deze pilotexamens en de resultaten van leerlingen op dit gebied.

Het doel van het wiskundeonderwijs is leerlingen op te leiden tot actieve, reflectieve en intelligente burgers (OECD, 2009). Daartoe moeten leerlingen kernvaardigheden ontwikkelen. Kernvaardigheden (*21st century skills*) als probleemoplossen en analytisch denken zijn van grote vormende waarde voor leerlingen, ook wanneer zij een vervolgopleiding of beroep zullen kiezen waarin wiskunde geen grote rol speelt (Voogt & Pareja Roblin, 2010). Het belang van ontwikkeling van kernvaardigheden strookt niet met de ruime aandacht voor reproductieve kennis en vaardigheden en de gebrekkige aandacht voor productieve vaardigheden in het huidige wiskundeonderwijs; een goede verhouding hiertussen is belangrijk (Van Streun, 2014).

In 2007 heeft de commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (cTWO) een visiedocument opgesteld met daarin een voorstel voor het vernieuwen van het wiskundeonderwijs voor havo en vwo. De commissie waarschuwt voor een te eenzijdige nadruk op procedurele kennis ten koste van conceptuele kennis. cTWO pleit dan ook voor een belangrijke plaats van WDA in het wiskundeonderwijs (cTWO, 2007, 2013). Wil dit verder vorm krijgen, dan moet WDA ook getoetst worden in de eindexamens (Bergsma, Brouwers, Van der Laan, Legierse & Visser, 2006 ; Voogt & Pareja Roblin, 2010). Op basis van de adviezen van cTWO zijn nieuwe examenprogramma's ontwikkeld voor de vakken wiskunde ABCD. De concept-examenprogramma's 2015 zijn inmiddels uitgewerkt in syllabi voor de eindexamens 2017 (havo) en 2018 (vwo). De vernieuwde wiskundecurricula voor havo en vwo zijn sinds 2009 op een aantal pilotscholen beproefd. Voor deze pilotscholen zijn sinds 2011 (havo) en 2012 (vwo) eindexamens ontwikkeld parallel aan de ontwikkeling van de reguliere eindexamens.

WDA zijn een belangrijk punt van verschil tussen de huidige examenprogramma's en de vernieuwde examenprogramma's. Een eerste vraag is dan ook in hoeverre bijbehorende examens verschillen op dit punt. De verwachting is dat WDA in de reguliere examens minder aan de orde komen en dat er in de pilotexamens duidelijk aandacht voor is. Dit zou betekenen dat pilotleerlingen bij het oplossen van vragen in de pilotexamens meer productieve vaardigheden inzetten dan reguliere leerlingen bij het oplossen van vragen in de reguliere examens. Een tweede vraag is dan ook in hoeverre dit verschil terug te zien is in de scores van pilot- en reguliere leerlingen op examenvragen waarin WDA aan de orde is. In het gemaakte examenwerk van leerlingen is een deel van de gedachtegang van leerlingen terug te zien. In hoeverre zijn ook de wiskundige denkactiviteiten terug te zien in het gemaakte examenwerk van leerlingen?

Het doel van dit onderzoek is om te onderzoeken of en hoe WDA getoetst worden in de pilotexamens. Verder heeft dit onderzoek als doel te evalueren of leerlingen van pilotscholen beter scoren dan leerlingen van reguliere scholen met betrekking tot WDA.

2. Theoretisch kader

2.1 Waarom wiskundige denkactiviteiten?

Van verschillende kanten komt het geluid dat het onderwijzen van uitsluitend reproductieve kennis en vaardigheden onvoldoende invulling geeft aan de doelen van het onderwijs. Het vakoverstijgende doel van ons onderwijs is leerlingen op te leiden tot actieve, reflectieve en intelligente burgers (Resnick, 1987; OECD, 2009) en hen zo goed mogelijk voor te bereiden op de arbeidsmarkt. Hiervoor moeten zij competenties ontwikkelen waaraan behoefte is in de kennissamenleving (Voogt & Pareja Roblin, 2010). Vanuit een internationaal perspectief hebben Voogt en Pareja Roblin (2010) de belangrijkste competenties in kaart gebracht: samenwerking, communicatie, ICT geletterdheid, sociale en/of culturele vaardigheden (incl. burgerschap), creativiteit, kritisch denken, en probleemoplossende vaardigheden. De aandacht voor de zogenoemde *21st century skills* ondersteunt de breed gedragen mening dat het onderwijs meer moet zijn dan het aanleren van reproductieve kennis en vaardigheden. Voor elk vak in het voortgezet onderwijs geldt dat naast inhoudelijke kennis, algemene denkvaardigheden getraind en getoetst moeten worden. Hierbij gaat het om het leren denken, met het uiteindelijke doel een kritische houding en probleemoplossend vermogen bij leerlingen te bevorderen (Bergsma, Brouwers, Van der Laan, Legierse & Visser, 2006; Resnick, 1987). Denkvaardigheden kunnen worden geclassificeerd en een veel gebruikt model hiervoor is de taxonomie van Bloom. De taxonomie van Bloom is aangepast om zo beter aan te sluiten bij de *21st century skills* (Anderson & Krathwohl, 2001). De laatste drie niveau's hiervan behoren tot de hogere orde denkvaardigheden. In het onderwijs in Nederland kennen wij hiervan ook een toepassing in het RTTI-model, waarin onderscheid gemaakt wordt tussen reproductie, toepassen in een bekende situatie, toepassen in een nieuwe situatie en inzicht. Aansluitend bij de *21st century skills* is er sinds enkele jaren in Europa aandacht voor onderzoekend leren (*inquiry based learning*): onderwijs met inbreng van een actieve rol voor leerlingen (Kirschner, Sweller & Clark, 2006). Het doel daarvan is dat leerlingen beter leren, meer eigenaar van de lesstof zijn, onderzoeksvaardigheden en een onderzoekende houding ontwikkelen en dat docenten beter zicht hebben op de capaciteiten van hun leerlingen en in het onderwijs daar beter op aan kunnen sluiten (Doorman, Kooij & Mooldijk, 2012).

Specifiek voor het wiskunde onderwijs stellen Leikin en Kawass (2005) dat het de ervaring in het wiskundeonderwijs is, dat met name algoritmen en routinematige problemen worden ingezet bij het voorbereiden van leerlingen op eindexamens. Meestal wordt wiskunde geassocieerd met zekerheid, met weten en kennen en met kundig zijn om het juiste antwoord snel te vinden (Schoenfeld, 1985; Stodolsky, 1985; Lampert, 1990). Lampert stelt dat deze veronderstellingen gevormd zijn door school ervaringen, waarin "doing *mathematics means following the rules laid down by the teacher;* knowing *mathematices means remembering and applying the correct rule when the teacher asks a question; and mathematical* truth is determined *when the answer is ratified by the teacher"* (Lampert, 1990). Een consequentie van het aanbieden van onderwijs in hapklare brokken is volgens Schoenfeld (1992) dat leerlingen leren dat antwoorden en methoden aan hen worden verstrekt bij gestelde problemen; van de leerlingen wordt dan niet verwacht dat zij zelf een geschikte methode kiezen (productie). Het uitsluitend onderwijzen van reproductieve vaardigheden vormt bij leerlingen een verkeerd beeld van de wiskunde en bereid hen niet goed voor op het concreet toepassen van wiskunde in de praktijk. Pólya verbindt daar het sociale aspect aan door te stellen dat de ervaring van leerlingen met wiskunde in overeenstemming moet zijn met de manier waarop wiskunde wordt *gedaan* (Schoenfeld, 1992; in Leikin & Kawass, 2005). Pólya schrijft in de inleiding van zijn boek *How to solve it* dat de rol van de wiskundedocent hierin belangrijk is:

> *"Thus, a teacher of mathematics has a great opportunity. If he fills his allotted time with drilling his students in routine operations he kills their interest, hampers their intellectual development, and misuses his opportunity. But if he challenges the curiosity of them to solve their problems with stimulating questions, he may give them a taste for, and some means of, independent thinking." (Pólya 1945, preface)*

Het is belangrijk om leerlingen te laten ervaren dat zij door zelf te denken verder kunnen komen dan door alleen uit het hoofd leren en reproduceren. Hier heeft de wiskundedocent een grote rol in. Pólya geeft aan dat het aan de wiskundedocent is om de keuze te maken tussen een eenzijdige oefening van standaardkennis of het wekken van nieuwsgierigheid en het ontwikkelen van intellectuele vermogens van leerlingen (Drijvers et al., 2012).

Skemp (1976) maakt een vergelijkbaar onderscheid. Hij stelt dat er twee vormen van wiskundeonderwijs zijn: instrumentele wiskunde, waarbij de nadruk ligt op *instrumental understanding* (beschreven als regels zonder onderbouwing) en relationele wiskunde, waarbij de nadruk ligt op *relational understanding* (weten wat je moet doen en waarom). Skemp pleit voor de laatste vorm van wiskundeonderwijs, waarin aandacht geschonken wordt aan wiskunde dat verder gaat dan het leren van reproductieve kennis en vaardigheden. Dit is ook terug te zien in het *Handboek wiskundedidactiek*, waar wordt beargumenteerd dat "naast parate kennis, *weten dat*, ook het aanpakken van problemen, *weten hoe,* en het begrijpen van wiskunde, *weten waarom*, waardevolle doelen van wiskundeonderwijs zijn. Doelen die kunnen worden bereikt als ook aan de reflectie op eigen kennis, *weten over weten*, en aan een constructieve *houding* wordt gewerkt" (Drijvers et al., 2012, p. 342).

Creativiteit, kritisch denken en probleemoplosvaardigheden zijn belangrijke 21st century skills die goed passen bij deze visie op het wiskundeonderwijs, waarin meer aandacht gevraagd wordt voor het aanleren van productieve vaardigheden. cTWO heeft dit in haar visiedocument (cTWO, 2007) opgenomen als domein overstijgende doelen die nagestreefd moeten worden, ook wel bekend als wiskundige denkactiviteiten. Hoewel er niet gesproken kan worden van een strikte scheiding tussen reproductie en productie, omdat deze hand in hand gaan, stelt Drijvers (2015a) dat de huidige nadruk op denkactiviteiten een manier is om deze tweedeling in balans te brengen. cTWO waarschuwt dan ook voor een te eenzijdige nadruk op procedurele kennis (zoals bijvoorbeeld het automatiseren van het oplossen van vergelijkingen of het uitwerken van haakjes) ten koste van conceptuele kennis (inzicht in de onderliggende concepten, vermogen om problemen te overzien en vervolgens geschikte oplossingsstrategieën te kiezen), de commissie heeft daarom een krachtig pleidooi gehouden om WDA een belangrijke plaats in de curricula te geven (cTWO, 2007, 2013).

2.2 Wat zijn wiskundige denkactiviteiten?

Wiskundig denken is nodig wanneer een leerling productieve vaardigheden in moet zetten om een probleem op te lossen. Om te beschrijven wat er verstaan wordt onder wiskundige denkactiviteiten, moet daarom eerst duidelijk zijn wat het verschil is tussen reproductieve kennis en vaardigheden en productieve vaardigheden. In de syllabi voor de centrale examens staat het onderscheid tussen *reproductie* en *productie* als volgt geformuleerd:

> *Parate kennis, parate vaardigheden en productieve vaardigheden*
> Bij de specificatie van de globale eindtermen is onderscheid gemaakt tussen parate vaardigheden en productieve vaardigheden. Bovendien is bij een aantal subdomeinen

> opgenomen over welke parate kennis de kandidaat dient te beschikken. Deze indeling is bedoeld om aan te geven wat het verwachte kennis- en beheersingsniveau van de kandidaat is.
> Met parate vaardigheden wordt hier bedoeld de wiskundige basistechnieken die de kandidaat routinematig moet beheersen.
> Bij productieve vaardigheden is het uitgangspunt dat de kandidaat beschikt over de parate vaardigheden en deze in complexe probleemsituaties kan toepassen. De productieve vaardigheden voert de kandidaat niet op routine uit. De kandidaat zal door inzicht, overzicht, probleemaanpak en metacognitieve vaardigheden een strategie moeten bedenken om het probleem op te lossen.
> Bij parate kennis gaat het om kennis waarover de kandidaat dient te beschikken en die niet uit de formuleringen van de parate en/of productieve vaardigheden blijkt. De opsomming van parate kennis is daarmee een aanvulling op de parate en productieve vaardigheden (CvTE, 2015).

Kernwoorden voor productieve vaardigheden die hierin genoemd worden zijn: niet-routine, complexe probleemsituaties, inzicht, overzicht, probleemaanpak en strategie. Deze kernwoorden zijn terug te zien in hogere orde vaardigheden die Resnick (1987) noemt: niet algoritmisch, complex, meerdere oplossingen, meerdere criteria, onduidelijkheden, zelfregulering en bewust denken. Deze begrippen vormen een belangrijk kader voor het concept wiskundige denkenactiviteiten.

In de literatuur worden verschillende visies op wiskundig denken gegeven. Devlin stelt: *"Mathematical thinking is a whole way of looking at things, of striping them down to their numerical, structural, or logical essentials, and of analyzing the underlying patterns"* (Devlin, 2011, p. 59). Schoenfeld zegt het weer anders:

> *Learning to think mathematically means (a) developing a mathematical point of view – valuing the processes of mathematization and abstraction and having the predilection to apply them, and (b) developing competence with tools of the trade, and using those tools in the service of the goal of understanding structure – mathematical sense-making. (Schoenfeld, 1992, p. 335)*

Ook worden opsommingen gegeven van elementen van wiskundig denken. Dreyfus en Eisenberg (1996) noemen analogie, structuur, representatie, visualisatie en omkeerbaardheid belangrijke elementen van wiskundig denken. Schoenfeld geeft de volgende fundamentele aspecten van wiskundig denken aan: "*core knowledge, problem solving strategies, effective use of resources, having a mathematical perspective, and engagement in mathematical practices*" (Schoenfeld, 1992, p. 5). Om het begrip 'wiskundig denken' verder handen en voeten te geven voor de implementatie in het wiskundeonderwijs heeft Drijvers een compacte werkdefinite opgesteld:

> *Wiskundig denken is bedenken hoe je wiskundig gereedschap kunt gebruiken om een probleem aan te pakken* (Drijvers, 2015b).

Op enkele termen uit deze definitie geeft hij een nadere toelichting. "Ten eerste zit het wiskundige dus in het gereedschap. Dat vat ik ruim op: het kan specifiek en concreet zijn, zoals de *abc*-formule voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen, maar het omvat ook het ontwikkelen van strategieën en theoretisch-methodisch gereedschap zoals logisch redeneren, bewijzen, inductie en deductie. In feite maakt dit gereedschap het denken tot wiskundig denken. Ten tweede is ook het woord “gebruiken” breder bedoeld dan het misschien lijkt: het gaat niet alleen om het toepassen van een bestaande kant-en-klare methode, maar ook, of zelfs juist, om het ontwikkelen daarvan, of om het op maat maken en aanpassen van een bestaande methode voor een specifiek doel. Een “probleem”, tenslotte, is niet zomaar een opgave, maar een vraag waarvoor de leerling nog geen kant-en-klare oplossingsmethode ter beschikking heeft, een niet-standaard opgave van binnen of buiten de wiskunde, die de leerling (nog) niet routinematig kan oplossen” (Drijvers, 2015b).

In de omschrijving van wiskundig denken onderscheidt de vernieuwingscommissie cTWO (2007) zes denkactiviteiten:

> *Centrale denkactiviteiten zijn modelleren en algebraïseren ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen* (cTWO, 2007, p. 21).

Drijvers (2015a) stelt voor deze in te perken tot drie kernaspecten van wiskundig denken die cruciaal zijn bij het gebruiken van wiskundig gereedschap, namelijk probleemoplossen, modelleren en abstraheren. Deze drie kernaspecten kennen overeenkomsten met Realistisch Wiskundeonderwijs. Modelleren komt daarin overeen met het horizontaal mathematiseren (Treffers, 1987) en abstraheren met het verticaal mathematiseren (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2013). De drie kernaspecten van wiskundig denken zijn weergegeven in Figuur 1.

Figuur 1: Kernaspecten van wiskundig denken weergegeven in een driehoek

Terugkomend op het onderscheid tussen productie en reproductie, behoren de productieve vaardigheden die een beroep doen op wiskundig denken binnen de driehoek. Reproductieve kennis en vaardigheden vallen buiten de driehoek, omdat er dan nauwelijks een beroep gedaan wordt op wiskundig denken. Binnen modelleren en abstraheren is gekozen voor een onderscheid tussen proces en object, in navolging van Sfard (1991). Zij komt vanuit een analyse van verschillende wiskundige definities en voorstellingen tot de conclusie dat abstracte begrippen, zoals getal of functie, kunnen worden opgevat als twee fundamenteel verschillende manieren: structureel – als objecten, en operationeel – als processen. Deze benaderingen zijn als het ware de twee verschillende kanten van eenzelfde medaille. Waar Sfard in dit verband de term *reïficatie* gebruikt, wordt door Tall et al. (2000) ook de term *inkapseling* gebruikt.

Vanzelfsprekend is hiermee nog niet alles gezegd over wiskundige denkactiviteiten, een begrip dat in de komende jaren verder concreet gemaakt moet worden in het wiskundeonderwijs. De genoemde drie kernaspecten, die met elkaar zijn verweven en soms moeilijk van elkaar zijn te onderscheiden, worden verder uitgewerkt.

3.2.1 Probleemoplossen

Bij wiskunde gaat het uiteindelijk over problemen en het oplossen daarvan (Hamlos, 1980). Een vraag is voor een oplosser een probleem als deze niet onmiddellijk een oplossingsweg ziet. Probleemoplossen is de kunst van het aanpakken van niet-triviale problemen waarvoor leerlingen nog geen bekende routinematige oplossing hebben maar die hen mogelijkheden biedt om een nieuwe oplossingsstrategie te ontwikkelen (Doorman et al., 2007). Of anders geformuleerd:

> *Solving a problem is finding a way out of a difficulty, a way around an obstacle, attaining an aim which was not immediately attainable. Solving problems is the specific achievement of intelligence, and intelligence is the specific gift of mankind: problem solving can be regarded as the most characteristically human activity*. (Pólya, 1962, p. V).

cTWO (2007) stelt dat het bij probleemoplossen gaat om de vaardigheid wiskundige problemen te formuleren, te representeren en op te lossen. Voor het oplossen van een probleem kan de oplosser niet een bekend stappenplan volgen (reproductie), maar moet er een nieuwe oplossingsweg gecreëerd worden (productie). Probleemoplossende vaardigheden zijn bijvoorbeeld manieren om aan een probleem te beginnen zoals een schets maken, iets afleiden uit de gegevens, kijken naar patronen, of juist terugredeneren vanuit de gewenste uitkomst, een probleemaanpak bedenken, een randgeval zoeken, een getallenvoorbeeld doorrekenen, een meerstapsstrategie uitvoeren zonder de draad kwijt te raken, weten hoe je zaken die je al kent of weet in een nieuwe situatie creatief kunt inzetten, reflecteren op de gevolgde aanpak (Pólya, 1945; Schoenfeld, 1992; Van Streun, 2001; in Drijvers, 2015b). Hierbij is een repertoire aan heuristieken onmisbaar (cTWO, 2007).

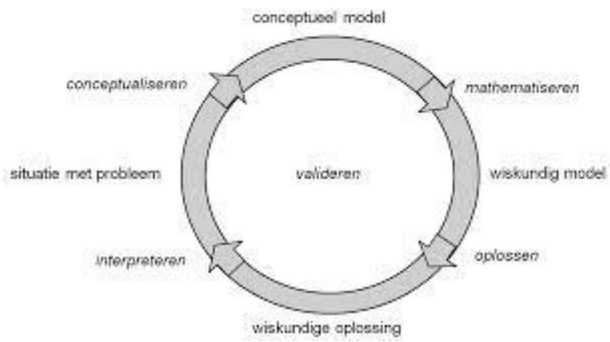
In zijn boek *How to solve it* onderscheidt Pólya (1945) vier fasen in het probleemoplossen: het probleem begrijpen, een plan maken, het plan uitvoeren en terugkijken. Het is vanzelfsprekend dat een probleem eerst begrepen moet worden alvorens het goed opgelost kan worden. Leerlingen zijn vaak belemmerd in het oplossen van problemen doordat zij het probleem niet of gedeeltelijk begrijpen. Het kiezen van een geschikte strategie, het maken van een plan voor het oplossen van het probleem, is misschien wel de belangrijkste fase in het probleemoplossen wat wiskundige denkactiviteiten betreft. De vaardigheid in het kiezen van een geschikte strategie kan het beste getraind worden door veel problemen op te lossen. Voor het oplossen van een probleem kunnen meerdere oplossingswegen mogelijk zijn en een oplossingsweg kan uit meerdere denkstappen bestaan, waarbij de denkstappen op zichzelf gedeeltelijk reproductie kunnen zijn van bekende heuristieken. Het uitvoeren van het plan bestaat dan uit het oplossen van deze deelproblemen. Een belangrijke laatste stap in het proces van het oplossen van een probleem is het terugkijken en reflecteren. De gevonden oplossing moet naast het oorspronkelijke probleem worden gelegd, om te bepalen of het probleem daadwerkelijk is opgelost.

Vormen van probleemoplossen die we in examens niet tegenkomen, maar die wel goed in wiskundelessen aan bod kunnen komen zijn bijvoorbeeld het stellen van een probleem of de mogelijkheid tot het geven van meerdere goede antwoorden.

3.2.2 Modelleren

Het tweede hoekpunt van de driehoek rond wiskundig denken is modelleren. Modelleren betreft de relaties tussen wiskunde en problemen uit de wereld om ons heen en de manier waarop dergelijke problemen kunnen worden aangepakt met wiskundige middelen (Drijvers, 2015b). cTWO omschrijft modelleren als "een praktische en creatief proces waarbij realistische problemen in wiskundige vorm worden vertaald. Leerlingen worden voor een probleemsituatie geplaatst met als doel deze met wiskundige middelen op te lossen. Dit omvat het doorgronden en analyseren van het probleem, het kiezen van variabelen, het opstellen van verbanden, het bepalen van een strategie en het inzetten van wiskundige middelen. Een ander essentieel onderdeel van modelleren is het algebraïseren: het mathematiseren van een realistische of wiskundige situatie door een formule of vergelijking op te stellen." (cTWO, 2007, p. 25).

De verschillende aspecten van modelleren worden door Spandaw en Zwaneveld (2012) weergegeven in een model. Deze modelleercyslus is weergegeven in Figuur 2.



Figuur 2: modelleercyclus (Spandaw & Zwaneveld, 2012)

Vanuit een situatie met een probleem wordt de vertaling naar een conceptueel model gemaakt (conceptualiseren), dit conceptuele model wordt vervolgens vertaald naar een wiskundig model (mathematiseren). Als de oplossing van het wiskundige model bepaald is, kan deze terugvertaald worden naar de oorspronkelijke situatie met het probleem (interpreteren). Het vertalen kan ook plaatsvinden tussen verschillende representaties in de wiskunde. In een probleemsituatie of een set vragen naar aanleiding van een context behoeven niet alle aspecten van de modelleercyclus naar voren te komen. Dat is wel het geval bij een praktische opdracht of profielwerkstuk, waarin in een optimale omgeving verschillende wiskundige denkactiviteiten kunnen worden gemobiliseerd (Van Streun, 2014). Modelleren kan moeilijk en tijdrovend zijn. Grote modelleerproblemen, zoals bijvoorbeeld die van de OnderbouwWiskundedag, wiskunde A-lympiade en de wiskunde-B dag, zijn in de reguliere onderwijs- en toetspraktijk lastig frequent te organiseren. Maar ook door middel van kleine en eenvoudige problemen kan in de les aandacht aan modelleren worden besteed (Drijvers, 2015a).

Tot hier is met name het *modelleren als proces* beschreven: het vertalen van een probleem naar wiskundige termen of wiskundige termen terugvertalen naar het probleem in de geschetste context. Een gegeven of gecreëerd model kan echter ook als een object beschouwd worden.

Eigenschappen van een model kunnen dan worden geanalyseerd, een model kan worden aangepast en modellen kunnen onderling worden vergeleken (Van Streun, 2014).

3.2.3 Abstraheren

Leerlingen vinden wiskunde vaak abstract en geven dat als argument om het vak niet leuk te vinden. Maar de kracht en het plezier komt juist voort uit het abstracte karakter van de wiskunde (Mason, 1989). Abstractie is het wezen en de kracht van wiskunde en maakt leren en begrijpen van wiskunde gemakkelijker (cTWO, 2007). Het derde hoekpunt van de driehoek rondom wiskundig denken is abstraheren. Bij abstraheren gaat het om het doorzoen van onderliggende concepten in concrete situaties en omgekeerd om het kunnen vertalen van abstracte noties naar concrete objecten en situaties (cTWO, 2007). Het abstraheren ligt volgens Mason (1989) tussen de expressie van algemeenheid en het manipuleren van die expressie, bijvoorbeeld het opstellen van een overtuigend argument. Bij abstraheren gaat het om het destilleren van overeenkomsten en verschillen in concrete probleemsituaties, die leiden tot de vorming van betekenisvolle wiskundige objecten (Drijvers, 2015b). Omgekeerd gaat het ook om het toepassen van opgedane kennis in nieuwe concrete situaties. Tall drukt het als volgt uit: "*Abstraction is the isolation of specific attributes of a concept so that they can be considered separately from the other attributes*" (Tall, 1988, p. 2).

Net als Sfard (1991) maakt Skemp (1986) onderscheid tussen het proces van het abstraheren en het resultaat daarvan, de abstractie of het concept. Door het abstraheren vanuit concrete probleemsituaties worden betekenisvolle wiskundige objecten gevormd. Geleidelijk aan verschuift het accent zo van het oplossen van concrete problemen naar het inzicht in en het redeneren met de wiskundige objecten die daarin een rol spelen en waarbij de leerling zich wat kan voorstellen (Drijvers, 2015b). Het denken over abstracte wiskundige objecten, eigenschappen daarvan en relaties daartussen is een vorm van wiskundig denken. Het gaat hier om het redeneren op een hoger niveau over zaken en verbanden die nog steeds iets voor je betekenen, een van de krachtigste aspecten van de wiskunde (Drijvers, 2015a).

Het begrip symbol sense heeft hier alles mee te maken en legt een verbinding tussen wiskundige denkactiviteit en algebraïsche vaardigheid. Drijvers (2012a) stelt dat symbol sense verwijst naar die onderdelen van algebraïsche vaardigheid die de procedurele basisvaardigheden overstijgen en die te maken hebben met inzicht in de betekenis van algebra. Of, zoals Arcavi zegt: "*Symbol sense is the algebraic component of a broader theme: sense-making in mathematics*" (Arcavi, 1994, p. 32).

2.4 Het toetsen van wiskundige denkactiviteiten

Wiskundige denkactiveiten hebben een belangrijke plaats gekregen in de nieuwe wiskunde curricula. Wil dit een grotere plaats in het wiskundeonderwijs krijgen, dan zal dit ook zichtbaar moeten worden in de toetsen, die immers hun schaduw vooruitwerpen op het onderwijs (Bergsma, Brouwers, Van der Laan, Legierse & Visser, 2006; Voogt & Pareja Roblin, 2010; Drijvers, 2015b). De manier waarop WDA een plek heeft gekregen in de pilotexamens is beschreven in de onderzoekssetting in de methodesectie van dit onderzoek. Maar wiskundige denkactiviteiten moeten niet uitsluitend in de eindexamens getoetst worden. cTWO (2007) pleit voor een belangrijke plaats van deze activiteiten in lange, coherente leerlijnen door de programma's heen. Ehrenfest-Afanassjewa (1960) stelt zelfs dat het wiskundig denken juist al in het begin van een hoofdstuk aangesproken moet worden, als de gestelde problemen nog minder gecompliceerd zijn. Daardoor wordt tevens de gelegenheid tot het oefenen van niet-denken uitgeschakeld. Hoe meer de leerling het opbouwen van de lesstof meebeleeft, des te meer gelegenheid krijgt hij om het denken te oefenen (Ehrenfest-Afanassjewa, 1960; in Drijvers et al., 2012). De ijking van de balans tussen enerzijds wiskunde als zelfstandige discipline en anderzijds wiskunde als instrument zal per schooltype en per profiel verschillen (cTWO, 2007).

Het toetsen van wiskundig denkvermogen is niet eenvoudig, maar wel voorwaarde voor een daadwerkelijke plaats voor deze vaardigheden in doorlopende leerlijnen (Drijvers, 2015b). Het toetsen van WDA is lastig omdat het onder andere sterk afhankelijk is van de persoon. Een voorbeeld hiervan is het opstellen van een raaklijn aan een grafiek met behulp van differentiëren voor het bepalen van de helling. Dit is voor leerlingen uit vwo 4 (wiskunde B) nog nieuw wanneer zij net kennis hebben gemaakt met differentiëren. Naarmate leerlingen dergelijke problemen vaker tegengekomen gaat het opstellen van een raaklijn behoren tot hun reproductieve vaardigheden en wordt er nauwelijks meer een beroep gedaan op wiskundig denken. Binnen een klas is het wiskundig denken per leerlingen ook verschillend. Devlin (2011) beargumenteert dat iedereen een zekere aanleg heeft voor wiskundig denken, maar dat de mate hiervan varieert per persoon. Het probleemoplossend vermogen van leerlingen is afhankelijk van hun persoonlijke mogelijkheden om oplossingsstrategieën toe te passen (Van der Kolk-den Heijer, 2014).

Hoewel de mate van wiskundig denken sterk afhankelijk is van de persoon wordt er in de examens toch gesproken van WDA vragen, omdat er uitgegaan mag worden van bepaalde kennis en vaardigheden, zoals dit is vastgelegd in de syllabi voor examens. Hoewel dit per leerling nog sterk verschilt wordt er uitgegaan van een gemiddelde.

2.6 Onderzoeksvragen

Nu beschreven is waarom WDA een plek moeten krijgen in het wiskundeonderwijs, wat verstaan wordt onder WDA en wat het belang is van het toetsen van WDA, rijst de vraag in hoeverre wiskundige denkactiviteiten ook daadwerkelijk getoetst worden in de pilotexamens, behorend bij de vernieuwde curricula. Moeten pilotleerlingen bij het oplossen van vragen in de pilotexamens meer productieve vaardigheden inzetten dan reguliere leerlingen bij het oplossen van vragen in de reguliere examens? En in hoeverre is er wat het toetsen van WDA betreft een verschil tussen de examens voor havo en voor vwo? Voor de scholen die meedraaien met de pilot van de nieuwe wiskundecurricula is materiaal ontwikkeld (cTWO, 2012) dat past bij de nieuwe examenprogramma’s en zijn er bijeenkomsten georganiseerd met pilotdocenten waarin WDA een terugkerend onderwerp was. Hoewel dit onderzoek zich richt op WDA in eindexamens en er in dit onderzoek verder niet gekeken wordt naar het ontwikkelde materiaal en de gegeven lessen, mag er aangenomen worden dat pilotleerlingen meer aandacht hebben besteed aan WDA dan reguliere leerlingen. Is dit verschil ook terug te zien in de scores van pilot- en reguliere leerlingen, op examenvragen waarin WDA getoetst worden? In het gemaakte examenwerk van leerlingen is een deel van de gedachtegang van leerlingen terug te zien. Nu is het interessant om na te gaan of er in dit werk van leerlingen ook wiskundige denkactiviteiten terug te zien zijn en of er wat dit betreft een verschil is tussen het werk van pilotleerlingen en van reguliere leerlingen. Uitgaande van deze probleemstelling kent het onderzoek de volgende onderzoeksvragen:

1. In hoeverre doen de vragen van de pilotexamens wiskunde B voor havo en vwo een beroep op wiskundige denkactiviteiten?
2. Presteren leerlingen van pilotscholen beter dan leerlingen van reguliere scholen met betrekking tot wiskundige denkactiviteiten in examens van havo en vwo?

3. Methode

Het onderzoek bestaat uit drie fasen: een voorbereidende fase, de dataverzameling en een analysefase. De *analysefase* bestaat uit drie delen: het analyseren van de examens, een kwantitatieve analyse van de resultaten van leerlingen en een kwalitatieve analyse van het leerlingenwerk. Om duidelijk te hebben wat de onderzoekssetting is wordt eerst uitgewerkt hoe een pilotexamen is ontworpen.

3.1 Onderzoekssetting: het ontwerpen van een pilotexamen

De nieuwe wiskunde curricula zijn sinds 2009 als pilot ingevoerd op een aantal verschillende scholen. Voor deze pilotscholen zijn centrale eindexamens ontworpen, parallel met de reguliere eindexamens. Het reguliere examen geldt als uitgangspunt voor het ontwerpen van het pilotexamen. Een examen bestaat uit een aantal opgaven en een kan uit meerdere vragen bestaan. In grote lijnen worden de vragen in het reguliere examen, die niet passen bij het nieuwe curriculum eruit gehaald. Hiervoor in de plaats komen nieuwe vragen en opgaven, die passen bij het vernieuwde curriculum. Om het niveau van de examens onderling te kunnen vergelijken, moet een deel van de vragen in het pilotexamen exact gelijk zijn aan vragen in het reguliere examen. Dit is ook van belang voor het bepalen van de N-term van het pilotexamen, omdat het aantal leerlingen die het pilotexamen maken te klein is om een onafhankelijke N-term te bepalen. Als regel wordt gehandhaafd dat ongeveer de helft van de vragen in het pilotexamen vrijwel gelijk moeten zijn aan de vragen in het reguliere examen en ongeveer de helft is nieuw ten opzichte van het reguliere examen.

In de pilotexamens is een aantal vragen aangepast ten opzichte van de reguliere examens, om in de vraag ook WDA te toetsen. Een voorbeeld hiervan is vraag 3 uit het pilot- en reguliere examen havo wiskunde B 2013-1. Deze eerste opgave van beide examens gaat over tornadoschalen. De vragen 1 en 2 zijn overlappend tussen beide examens en toetsen geen WDA. Vraag 3 is vervolgens aangepast in het pilotexamen, waardoor de vraag meer wiskundig denkactief wordt. In de Figuren 3 en 4 zijn beide versies van vraag 3 afgebeeld.

Figuur 3
Regulier examen havo wiskunde B 2013-1, vraag 3

Een andere schaal voor de intensiteit van tornado's is de in 1972 ontwikkelde Torro-schaal T. Het verband tussen v en T wordt gegeven door de formule:

$$v = 2{,}39 \cdot (T+4)^{\frac{3}{2}} \qquad (2)$$

Hierin is v de maximale windsnelheid in de tornado in m/s en T de intensiteit van de tornado op de Torro-schaal. T wordt afgerond op een geheel getal.
Door formule (2) in te vullen in formule (1) en vervolgens de ontstane formule te herleiden, kan worden aangetoond dat er een lineair verband bestaat tussen de onafgeronde F- en T-waarden. Dit lineaire verband kan worden beschreven met een formule van de vorm $F = aT + b$.

4p **3** Bereken de waarden van a en b. Rond je antwoorden af op twee decimalen.

Figuur 4
Pilotexamen havo wiskunde B 2013-1, vraag 3

Een andere schaal voor de intensiteit van tornado's is de in 1972 ontwikkelde Torro-schaal T. Het verband tussen v en T wordt gegeven door de formule:

$$v = 2{,}39 \cdot (T+4)^{\frac{3}{2}}$$

Hierin is v de maximale windsnelheid in de tornado in m/s en T de intensiteit van de tornado op de Torro-schaal. T wordt afgerond op een geheel getal.

Er bestaat een lineair verband tussen de onafgeronde F- en T-waarden. Dit lineaire verband kan worden beschreven met een formule van de vorm $F = aT + b$.

4p 3 Bereken de waarden van a en b. Rond je antwoorden af op twee decimalen.

In het reguliere examen wordt een oplossingsrichting gewezen, wat in het pilotexamen gedeeltelijk weggelaten is. Hierdoor moet de oplosser van de vraag in het pilotexamen een aantal denkstappen zetten, terwijl de oplosser van de vraag in het reguliere examen alleen de aangedragen stappen uit moet voeren. De vraag in het pilotexamen zou nog denkactiever gemaakt kunnen worden door niet weg te geven dat het om een lineair verband gaat.

Een ander voorbeeld van een vraag die in het pilotexamen is aangepast, waardoor de vraag denkactiever is geworden, is vraag 11 in het reguliere examen van havo wiskunde B 2011-1 en vraag 12 in het overeenkomende pilotexamen. Het betreft de opgave *Bushalte* waarvan vraag 10 in het reguliere examen exact gelijk is aan vraag 11 in het pilotexamen. Ook de introductie van deze vragen komt in beide examens overeen. De opgave uit het reguliere examen is afgebeeld in Figuur 5 en de overeenkomende vragen uit het pilotexamen zijn afgebeeld in Figuur 6. Vraag 12 in het pilotexamen is aangepast ten opzicht van de vraag in het reguliere examen door de formule voor de totale lengte van de twee voetpaden weg te laten. Pilotleerlingen moeten deze formule zelf opstellen om de vraag te kunnen beantwoorden. Hierdoor is de vraag in het pilotexamen denkactiever. Tegelijk kan de vraag nog denkactiever gemaakt worden door niet aan te geven dat de minimale lengte met behulp van differentiëren bepaald moet worden. Daardoor zou de oplossingsrichting nog minder worden aangegeven, waardoor de vraag denkactiever wordt. Datzelfde geldt voor vraag 10 in het reguliere examen en vraag 11 in het pilotexamen. In de inleidende tekst van deze opgave worden formules gegeven voor het berekenen van verschillende afstanden, waarbij ook de variabele x wordt ingevoerd. Door bijvoorbeeld de variabele x nog niet in te voeren en door de tekst onder de figuur weg te laten, wordt vraag 11 meer een open probleem waarin WDA getoetst worden (*modelleren als proces* en *probleemoplossen*).

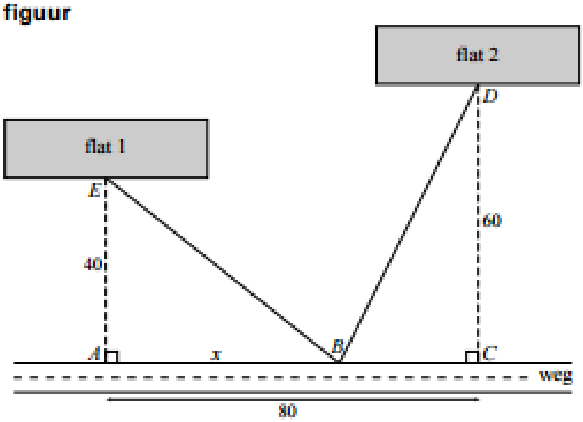
Figuur 5

Regulier examen havo wiskunde B 2011-1, vraag 10 en 11

Bushalte

Langs een rechte weg staan twee flatgebouwen. De ingang van flat 1 (punt E) ligt 40 meter van de weg af en de ingang van flat 2 (punt D) ligt 60 meter van de weg af. Men wil een bushalte plaatsen (punt B) en daarna van de bushalte naar de ingang van elk van de twee flats een recht voetpad aanleggen. Punt A is het punt aan de weg dat het dichtst bij de ingang van flat 1 ligt en punt C is het punt aan de weg dat het dichtst bij de ingang van flat 2 ligt. De afstand tussen punt A en punt C is 80 meter. In de figuur is van deze situatie een schematisch bovenaanzicht getekend.

figuur



De lengte van het voetpad tussen de bushalte en de ingang van flat 1 in meters wordt gegeven door de formule $BE = \sqrt{x^2 + 1600}$ en de lengte van het voetpad tussen de bushalte en flat 2 in meters wordt gegeven door de formule $BD = \sqrt{x^2 - 160x + 10\,000}$. Hierin is x de afstand tussen punt A en de bushalte B in meters.

Het is mogelijk de bushalte zo te plaatsen dat de twee voetpaden even lang zijn.

4p **10** Bereken op algebraïsche wijze de waarde van x in deze situatie.

De totale lengte van de twee voetpaden L in meters wordt gegeven door de formule:

$$L = \sqrt{x^2 + 1600} + \sqrt{x^2 - 160x + 10\,000}$$

Als de twee voetpaden even lang zijn, is de totale lengte van deze voetpaden (ongeveer) 132 meter. Men wil de bushalte zo plaatsen dat de totale lengte van de twee voetpaden minimaal is. Hierdoor hoeft er minder dan 132 meter voetpad aangelegd te worden.

6p **11** Bereken met behulp van differentiëren hoeveel meter minder.

Figuur 6
Pilotexamen havo wiskunde B 2011-1, vraag 11 en 12

Het is mogelijk de bushalte zo te plaatsen dat de twee voetpaden even lang zijn.

4p **11** Bereken op algebraïsche wijze de waarde van x in deze situatie.

Als de twee voetpaden even lang zijn, is de totale lengte van deze voetpaden (ongeveer) 132 meter. Men wil de bushalte zo plaatsen dat de totale lengte van de twee voetpaden minimaal is.

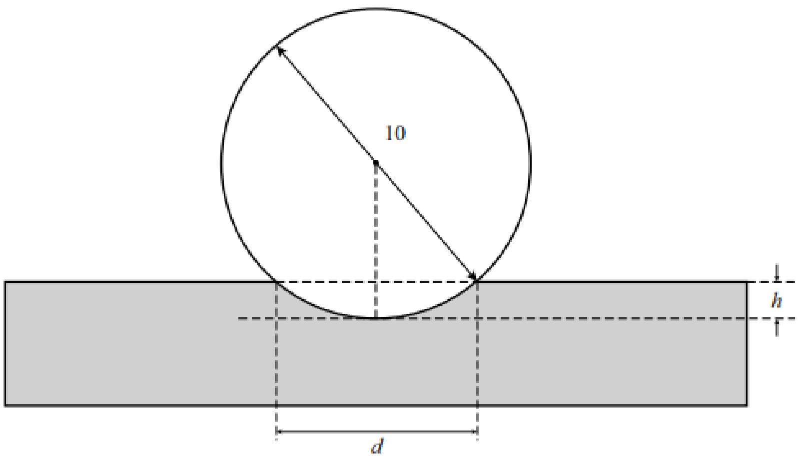
7p **12** Bereken met behulp van differentiëren hoeveel meter de totale lengte van de twee voetpaden dan minder is dan 132 meter.

Een ander voorbeeld van een vraag die denkactiever gemaakt kan worden is vraag 14 uit het pilotexamen voor vwo wiskunde B 2015-1. De vraag is afgebeeld in Figuur 7.

Figuur 7
Pilotexamen vwo wiskunde B 2015-1, vraag 14

Deze kracht mag niet zo groot zijn dat de kogel vervormt of voor meer dan de helft in het materiaal wordt gedrukt.
In de praktijk wordt bij de hardheidsmeting volgens Brinell de diameter d (in mm) van de cirkelvormige rand van de indruk gemeten. In figuur 3 is een dwarsdoorsnede getekend van een kogel met diameter 10 mm die een stukje in het materiaal is gedrukt. De diepte van de indruk is h (in mm).

figuur 3



Met behulp van figuur 3 kan het volgende verband tussen h en d worden gevonden:

$$h = \frac{10 - \sqrt{100 - d^2}}{2}$$

5p **13** Bewijs de juistheid van deze formule.

Aan deze vraag gaan nog 2 vragen vooraf die samen de opgave *Hardheid* vormen. Deze hele opgave is exact gelijk in het overeenkomende reguliere examen opgenomen. In vraag 13 moet het verband worden aangetoond tussen de variabelen h en d. Door dit verband niet weg te geven in de vraag, maar door de leerlingen zelf op te laten stellen, wordt de vraag meer open en daardoor denkactiever.

3.2 Voorbereidende fase

De *voorbereidende fase* bevatte een bescheiden literatuurstudie en de ontwikkeling van een model. Voor de literatuurstudie is literatuur over wiskundige denkactiviteiten, probleemoplossen, modelleren, abstraheren, toetsing van WDA en lessituaties verzameld in een database. Deze database is gezamenlijk opgezet met de onderzoekers van het project *Wiskundige denkactiviteit in de praktijk*[1]. Door middel van deze verzamelde literatuur is kennis gebundeld over verschillende aspecten van WDA die betrekking hebben op examenvragen, de opbrengst hiervan is weergegeven in het theoretisch kader.

Op basis van de literatuurstudie is een model (zie Figuur 8) ontwikkeld als samenvatting van het theoretisch kader, waarin de verschillende deelaspecten van WDA kort en bondig worden beschreven. Dit model is in de analysefase verder uitgewerkt voor het coderen van examenvragen met bijbehorend correctievoorschrift en voor het analyseren van leerlingenwerk.

Probleemoplossen
Onder *Probleemoplossen* (P) verstaan we het bepalen van een oplossingsstrategie voor het oplossen van een probleem dat niet alleen met reproductie opgelost kan worden. Een oplossingsweg bestaat in het algemeen uit meerdere denkstappen en er kunnen meerdere oplossingswegen mogelijk zijn.

Modelleren als proces
Onder *Modelleren als proces* (Mp) verstaan we het vertalen van een probleem naar wiskundige termen of het terugvertalen van wiskundige termen naar de probleemsituatie.

Model als object
Onder *Model als object* (Mo) verstaan we het aanpassen van een model, het analyseren op eigenschappen van een model of het vergelijken van verschillende modellen.

Abstraheren als proces
Onder *Abstraheren als proces* (Ap) verstaan we het destilleren van overeenkomsten en verschillen uit een concrete situatie, die vervolgens leiden tot de vorming van betekenisvolle wiskundige objecten of omgekeerd, het toepassen van dergelijke opgedane kennis in nieuwe concrete situaties.

Abstract object
Onder *Abstract object* (Ao) verstaan we het denken over wiskundige objecten, eigenschappen daarvan en relaties daartussen.

Figuur 8: Model als basis voor het coderen van examenvragen en het analyseren van leerlingenwerk

3.3 Dataverzameling

Hoewel WDA in het hele wiskundeonderwijs aan bod dienen te komen, ligt de focus in dit onderzoek op het analyseren van WDA in centrale eindexamens van wiskunde B, omdat de centrale eindexamens richtinggevend zijn voor het onderwijs. De keuze is op wiskunde B gevallen omdat de roep naar WDA vooral vanuit bèta opleidingen van het hoger onderwijs lijkt te komen. Examenvragen die geanalyseerd zijn op WDA en waarvan de leerlingenresultaten zijn geanalyseerd,

[1] Mogelijk gemaakt door het Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek, Projectnummer 405-14-502

komen uit de pilotexamens en de reguliere examens voor havo (2011, 2012, 2013, 2014, 2015) en vwo (2012, 2013, 2014, 2015). Het betreft alle vragen uit deze examens in het eerste tijdvak, omdat in de overige tijdvakken te weinig leerlingen het pilotexamen hebben gemaakt, waardoor de resultaten te veel beïnvloed kunnen worden door individuele leerlingen.

De data voor de kwantitatieve analyse bestaan uit de scores van alle leerlingen die de betreffende examens gemaakt hebben. Deze data zijn beschikbaar bij Cito. De data voor de kwalitatieve analyse bestaan uit het geschreven werk van pilotleerlingen en reguliere leerlingen voor het examen vwo wiskunde B 2014-1. De keuze is op dit examen gevallen omdat het examenwerk van eerdere jaren op veel scholen niet meer aanwezig is en omdat WDA meer aan bod komt in het reguliere examen van vwo dan in het reguliere examen van havo.

Participanten

De participanten in de kwantitatieve analyse zijn alle leerlingen die de betreffende examens hebben gemaakt en waarvan de resultaten bij Cito beschikbaar zijn. Het aantal leerlingen per examen is weergegeven in Tabel 2.

Tabel 2

Overzicht van het aantal leerlingen dat de examens heeft gemaakt

Examenjaar	Aantal leerlingen pilot (havo)	Aantal leerlingen regulier (havo)	Aantal leerlingen pilot (vwo)	Aantal leerlingen regulier (vwo)
2011-1	138	11212		
2012-1	135	11469	243	15683
2013-1	121	11198	178	15172
2014-1	124	11905	166	14929
2015-1	109	12779	95	16013

Voor de kwalitatieve analyse zijn drie reguliere scholen (in totaal 128 leerlingen) bezocht en vier van de vijf pilotscholen (in totaal 110 leerlingen) waar het betreffende pilotexamen gemaakt is en nog aanwezig was. De vijfde pilotschool wilde niet meewerken met het onderzoek omdat zij inmiddels gestopt is met de pilot. De reguliere scholen zijn benaderd via het netwerk van Junior College Utrecht. Zowel de pilotscholen als de reguliere scholen die meewerken aan dit onderzoek kunnen worden beschouwd als gemiddelde[2] scholen ten opzichte van het landelijk gemiddelde.

3.4 Analysefase

3.4.1 Analyse van examenvragen

Het model dat ontwikkeld is in de voorbereidende fase, is verder uitgewerkt voor het beoordelen van examenvragen met bijbehorend correctievoorschrift (zie Bijlage 1). Dit model richt zich alleen op het toetsen van WDA in eindexamens van wiskunde B, voor zowel havo als vwo. Het biedt concrete handvatten om te beoordelen of een examenvraag een vorm van WDA vraagt van de oplosser, welke vorm van WDA dat is en hoe dit terug te zien is in het correctievoorschrift.

Om de betrouwbaarheid van dit model te waarborgen is de interbeoordelaars-betrouwbaardheid bepaald. Drie beoordelaars, waaronder de onderzoeker, hebben het model toegepast op het pilotexamen vwo wiskunde B 2014-1 (bestaande uit 18 vragen). In dit examen worden verschillende vormen van WDA getoetst. Als het gaat om het onderscheiden van WDA en niet-WDA in een vraag, is er sprake van een goede overeenkomst (Fleiss' Kappa = 0.70) (Landis &

[2] www.scholenopdekaart.nl

Koch, 1977). Voor de deelaspecten binnen het model is minder goede overeenstemming tussen de beoordelaars. Dit wordt mede veroorzaakt door het beperkt aantal beoordeelde vragen. Daarom wordt er in de analyse van leerlingenresultaten en leerlingenwerk minder gekeken naar de verschillen tussen de onderscheiden aspecten binnen WDA.

Het uitgewerkte model voor het beoordelen van examenvragen met bijbehorend correctievoorschrift is toegepast op de pilotexamens en de reguliere examens voor havo (2011, 2012, 2013, 2014, 2015) en vwo (2012, 2013, 2014, 2015). De resultaten hiervan worden verderop in dit rapport beschreven. Per examen is een tabel opgesteld met daarin per vraag aangegeven of er WDA getoetst wordt en welke vorm van WDA dat is.

Voor het beantwoorden van de eerste onderzoeksvraag, in hoeverre de vragen in de pilotexamens een beroep doen op WDA, zijn de genoemde examens geanalyseerd. Hierin is gekeken naar het totaal aantal vragen in de reguliere examens en de pilotexamens waarin een beroep gedaan wordt op WDA, voor zowel havo als vwo. Daarnaast is ook gekeken naar de verschillende vormen van WDA die aan bod komen in de examenvragen.

3.4.2 Kwantitatieve analyse

Er is een kwantitatieve analyse uitgevoerd op de resultaten van de examens waarop het ontwikkelde model is toegepast in de analyse van examenvragen. In deze kwantitatieve analyse zijn de verschillen in scores bestudeerd tussen pilotleerlingen en reguliere leerlingen en tussen havo en vwo op examenvragen die als wiskundig denkactief beschouwd worden. Hierin is naar de volgende verschillen gekeken:

- Verschil in gemiddelde p-waarden op vragen die als WDA gecodeerd zijn tussen het pilotexamen en het reguliere examen en tussen havo en vwo.
- Verschil in gemiddelde p-waarden van alle examenvragen en gemiddelde p-waarden van vragen die als WDA gecodeerd zijn. Deze gemiddeldes worden berekend door alle p-waarden van de betreffende examenvragen bij elkaar op te tellen en dit totaal vervolgens te delen door het aantal vragen. Hierin worden alle vragen uit de examens voor havo (2011-2015) en voor vwo (2012-2015) meegenomen.
- Verschil in (gemiddelde) p-waarden op overlappende vragen die als WDA gecodeerd zijn tussen het pilotexamen en het reguliere examen, voor havo en vwo. Dit verschil wordt berekend door de p-waarden van de verschillende vragen bij elkaar op te tellen en te delen door het totaal aantal vragen. Op vragen waar het verschil in p-waarden groot is (>10.0), is nader ingezoomd.

3.4.3 Kwalitatieve analyse

Een uitgebreide analyse is uitgevoerd op het pilotexamen en het reguliere examen voor vwo van 2014-1. Hiervoor is gebruik gemaakt van het model voor het coderen van examenvragen. Per vraag is aangegeven waarom een vraag wel of niet als WDA gecodeerd is en welke vorm van WDA in de vraag naar voren komt. In deze verantwoording voor vragen die als WDA gecodeerd zijn, is ook aangegeven waar de denkactiviteiten in het correctievoorschrift terug te zien zijn. Deze uitgebreide analyse is opgesteld als richtlijn voor het analyseren van leerlingenwerk. Zo kan het wiskundig denken van leerlingen, dat terug te zien is in de door hen genoteerde antwoorden, in kaart worden gebracht.

De onderzoeker is bij scholen langsgegaan om het examenwerk van leerlingen in te zien en te bestuderen. Hierbij is gekeken naar de vragen 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15 uit het pilotexamen en de vragen 5, 6, 11, 13, 18 uit het reguliere examen, omdat deze vragen als een vorm van WDA gecodeerd zijn. Deze examenvragen met bijbehorend correctievoorschrift zijn opgenomen in Bijlage 2. Per vraag en per leerling is onderzocht welke punten uit het correctievoorschrift gehaald zijn en heeft de onderzoeker opmerkingen genoteerd die betrekking hebben op de manier waarop WDA wel of niet terug te zien zijn in het werk van de leerling. Ter ondersteuning is een aantal foto's genomen van het gemaakte werk, onder waarborging van anonimiteit, zodat de onderzoeker opvallende punten op een later moment nog in kon zien. De gemaakte opmerkingen en aantekeningen zijn naderhand naast elkaar gelegd, zodat een vergelijking gemaakt kon worden. Hierin is het volgende onderzocht:

- Het verschil tussen het werk van pilot- en reguliere leerlingen op de overlappende vragen die als WDA gecodeerd zijn: vragen 10 en 15 uit het pilotexamen respectievelijk vragen 5 en 6 uit het reguliere examen. Hierin is gelet op het volgende:
    - de gevolgde oplossingsstrategie
    - de gemaakte fouten waardoor punten zijn verloren
    - andere opvallende zaken met betrekking tot WDA, zoals het toevoegen van een schets of een stappenplan en het geven van een woordelijke conclusie
- Waarnemingen in het werk van pilot- en reguliere leerlingen zijn per examenvraag weergegeven aan de hand van aantallen en percentages. Hierin is gelet op het volgende:
    - het aantal behaalde punten per leerling
    - de gevolgde oplossingsstrategie
    - of en hoe de stappen uit het correctievoorschrift, die als WDA zijn gecodeerd, zijn uitgevoerd
    - de verschillende soorten fouten die gemaakt zijn
- Het verschil tussen het leerlingenwerk van vraag 6 uit het pilotexamen en vraag 13 uit het reguliere examen. In beide vragen zorgt de toevoeging van een parameter ervoor dat de vraag niet met alleen reproductieve kennis en vaardigheden kan worden opgelost. Wat deze overeenkomst betreft wordt het verschil van het werk van pilot- en reguliere leerlingen vergeleken.

Van de vragen die in de kwalitatieve analyse zijn onderzocht, zijn de landelijke gemiddeldes, zoals deze bekend zijn bij Cito, vergeleken met de gemiddelde scores van leerlingen waarvan het examenwerk is onderzocht. Hier is een groot verschil (verschil in p-waarden >10.0) waargenomen bij vraag 11 uit het reguliere examen en de vragen 12 en 15 uit het pilotexamen. Dit is weergegeven in Tabel 3. Voor de overige vragen zijn geen grote verschillen tussen p-waarden waargenomen.

Tabel 3
Overzicht van het aantal leerlingen dat de examens heeft gemaakt

Examenvraag	p-waarde landelijk	p-waarde participanten	Verschil in p-waarden
11 (regulier)	41.1	25.8	-15.3
12 (pilot)	33.6	44.3	+10.7
15 (pilot)	65.6	78.3	+12.7

De grote verschillen voor de vragen 12 en 15 uit het pilotexamen voor vwo kunnen worden verklaard door tegenvallende resultaten bij een van de vijf pilotscholen. Deze pilotschool heeft na dit examen besloten te stoppen met de pilot en heeft niet meegewerkt met de kwalitatieve analyse van dit onderzoek.

De kwantitatieve analyse en de kwalitatieve analyse leidden gezamenlijk tot conclusies met betrekking tot de tweede onderzoeksvraag, of leerlingen van pilotscholen beter presteren dan leerlingen van reguliere scholen met betrekking tot WDA in examens.

4. Resultaten

4.1 WDA in examenvragen

Het ontwikkelde model voor het beoordelen van examenvragen is toegepast op de examens voor havo (2011, 2012, 2013, 2014, 2015) en voor vwo (2012, 2013, 2014, 2015). Tabellen 24 tot en met 32 in Bijlage 3 geven per afnamejaar en niveau een overzicht van alle vragen in de pilot- en reguliere examens. Hierin is aangegeven (a) welke vragen in het pilotexamen overlappen, aangepast of nieuw zijn ten opzichte van het reguliere examen en (b) of en hoe WDA getoetst worden in de examenvragen. Tabel 4 geeft een overzicht van het aantal vragen waarin WDA getoetst zijn in de verschillende examens.

Tabel 4

Overzicht van het aantal examenvragen waarin WDA getoetst worden in pilot- en reguliere examens voor havo (2011-2015) en vwo (2012-2015) en bijbehorende percentages

Afnamejaar	Vwo pilot		Vwo regulier		Havo pilot		Havo regulier	
2011					8/19	(42%)	3/19	(16%)
2012	9/15	(60%)	7/17	(41%)	5/19	(26%)	1/19	(5%)
2013	9/17	(53%)	6/18	(33%)	4/17	(24%)	1/19	(5%)
2014	9/18	(50%)	4/18	(22%)	6/19	(32%)	2/19	(11%)
2015	6/16	(38%)	6/17	(35%)	6/16	(38%)	4/19	(21%)
Totaal	33/66	(50%)	23/70	(33%)	29/90	(32%)	11/95	(12%)

Uit dit overzicht blijkt dat er in de pilotexamens voor havo in totaal 29 van de 90 (32%) vragen WDA toetsen, tegenover 11 van de 95 (12%) vragen in de reguliere examens voor havo. Deze toename wordt als sterk beschouwd. In de pilotexamens voor vwo toetsen in totaal 33 van de 66 (50%) vragen WDA, tegenover 23 van de 70 (33%) vragen in de reguliere examens voor vwo. In de reguliere examens voor vwo valt 52% van de vragen die WDA toetsen binnen de Euclidische meetkunde, een onderwerp dat niet in het nieuwe curriculum voor vwo wiskunde B is opgenomen. Dit betreft de vragen 6, 7, 16 en 17 uit het examen van 2012-1, de vragen 9 en 19 uit het examen van 2013-1, de vragen 11 en 18 uit het examen van 2014-1 en de vragen 8, 9, 16 en 17 uit het examen van 2015-1. In de pilotexamens voor vwo neemt het percentage vragen waarin WDA getoetst worden in de loop der jaren af. In 2012 werden in 60% van de vragen WDA getoetst en in 2015 nog slechts in 38% van de vragen.

In Tabel 5 is te zien welke vormen van WDA in de examens getoetst worden en hoe vaak elke vorm getoetst wordt. In een examenvraag kunnen meerdere vormen van WDA getoetst worden.

Tabel 5

Overzicht van de mate waarin soorten WDA in examenvragen getoetst worden voor havo (2011-2015) en vwo (2012-2015)

Soorten WDA	Vwo pilot	Vwo regulier	Havo pilot	Havo regulier	*Totalen*
Probleemoplossen	29	20	25	7	81
Modelleren als proces	5	0	1	2	8
Model als object	0	0	0	0	0
Abstraheren als proces	0	0	1	0	1
Abstract object	7	3	2	2	14

Probleemoplossen komt als wiskundige denkactiviteit het meeste terug in de examens, modelleren en abstraheren als vormen van WDA worden minder vaak getoetst. Dit komt overeen met de analyse van Van Streun (2014), waarin hij opmerkt dat de uitwerking van modelleren in de centrale examens mager is. Wat betreft het abstraheren stelt hij dat het zwaartepunt ligt bij het redeneren met wiskundige begrippen of eigenschappen. Dit is ook terug te zien in bovenstaande analyse waaruit blijkt dat er binnen het abstraheren met name *abstract object* getoetst wordt als vorm van WDA.

4.2 Kwantitatieve analyse van leerlingenresultaten

De overlappende vragen binnen de examens, die tevens als WDA gecodeerd zijn, laten verschillen in p-waarden zien. In Tabel 6 zijn alle vragen uit de havo pilotexamens opgenomen die exact gelijk zijn aan vragen in de reguliere examens en waarin tevens WDA getoetst worden. In Tabel 7 is een soortgelijk overzicht voor het vwo opgenomen. Een volledig overzicht van p-waarden bij examenvragen die als een vorm van WDA zijn gecodeerd, is opgenomen in de Tabellen 33 tot en met 41 in Bijlage 4.

Tabel 6

Overzicht van p-waarden overlappende WDA-vragen in examen havo wiskunde B

Examen	Vraagnummer pilot	Vraagnummer regulier	Vorm van WDA	p-waarde pilot	p-waarde regulier	Verschil in p-waarde
2011-1	3	3	Mp	40.0	41.9	-1.8
2011-1	17	18	Ao	70.0	59.9	+10.1
2011-1	18	19	Ao	61.4	47.7	+13.7
2012-1	14	7	P	87.2	79.4	+7.7
2014-1	11	13	P	37.7	35.0	+2.7
2015-1	3	3	P	79.1	76.0	+3.1

Tabel 7

Overzicht van p-waarden overlappende WDA-vragen in examen vwo wiskunde B

Examen	Vraagnummer pilot	Vraagnummer regulier	Vorm van WDA	p-waarde pilot	p-waarde regulier	Verschil in p-waarde
2012-1	9	9	P	*100*	43.1	-
2013-1	2	2	Ao	60.3	56.7	+3.6
2013-1	16	14	P	50.5	50.4	+0.1
2014-1	15	6	P	65.6	70.4	-4.7
2015-1	4	3	P	57.2	55.9	-1.3
2015-1	13	14	P	61.1	34.6	+26.4

Op het havo is het gemiddelde verschil in p-waarden op deze examenvragen +6.0, in het voordeel van de pilotleerlingen. Het gaat overigens over slechts 6 vragen. Bij de berekening van de gemiddelde p-waarden zijn de vragen met een p-waarde die op 100 is gesteld niet meegenomen, omdat dit het beeld vertekend. Het gemiddelde verschil in p-waarde voor de overlappende vragen in de examens voor het vwo waarin WDA getoetst worden is +4.8. Pilotleerlingen scoren op het vwo gemiddeld hoger dan reguliere leerlingen op deze vragen. Opgemerkt moet worden dat dit verschil sterk wordt bepaald door het verschil in p-waarden van vraag 13 (pilot) en vraag 14 (regulier) uit het examen 2015-1. In eerste instantie was ook vraag 10 uit het pilotexamen voor vwo 2014-1 (vraag 5 in het reguliere examen 2014-1) meegenomen in dit overzicht, waardoor het gemiddelde verschil in p-waarden wat lager uitviel: +2.9. Deze vraag is uiteindelijk uit het overzicht weggelaten, omdat uit de kwalitatieve analyse naar voren kwam dat de vraag bij nader inzien geen WDA toetst. Vraag 9 uit het vwo examen van 2012-1 is niet meegenomen in de berekening van het gemiddelde verschil in p-waarden. De p-waarde voor deze vraag is op 100 gesteld voor het pilotexamen, omdat er twijfels waren over gelijke kansen voor leerlingen.

Bij verder inzoomen op deze overlappende vragen waarin WDA getoetst worden, valt een aantal grote (verschil in p-waarden >10.0) verschillen op. Examenvragen waarvoor dit geldt zijn opgenomen in Bijlage 5. De vragen in de opgave over een logaritmentafel in het examen voor het havo van 2011-1 (vragen 17 en 18 in het pilotexamen en vragen 18 en 19 in het reguliere examen) zijn gecodeerd als *abstract object*. Pilotleerlingen maken beide vragen in deze opgave opvallend beter (verschil in p-waarden is respectievelijk +10.1 en +13.7). Leerlingen worden in deze opgave geconfronteerd met een nieuwe theorie, om logaritmen op algebraïsche wijze te berekenen. Bij het beantwoorden van deze vragen kunnen zij niet terugvallen op hun reproductieve kennis en vaardigheden, maar moeten hun productieve vaardigheden inzetten om het probleem op te lossen.

Voor het vwo is het verschil in p-waarden van vraag 13 uit het pilotexamen van 2015-1 en vraag 14 uit het overeenkomende reguliere examen groot: +26.4 in het voordeel van de pilotleerlingen. Deze vraag is opgenomen in de onderzoekssetting in de methodesectie. De juistheid van een gegeven formule moet worden aangetoond. Hiertoe moet een oplossingsstrategie worden opgesteld en uitgevoerd. Dit kan door de stelling van Pythagoras toe te passen op de gegeven concrete situatie. Daarvoor moeten verschillende zijden eerst worden uitgedrukt in de variabelen h en/of d. Vervolgens moet de opgestelde vergelijking herschreven en vereenvoudigd worden. Voor deze vraag konden maximaal 5 punten gehaald worden. In Tabel 8 zijn het aantal leerlingen en bijbehorende percentages aangeven per het aantal behaalde punten.

Tabel 8
Overzicht van aantal leerlingen per behaald aantal punten van overlappende vraag 13 (pilot) en vraag 14 (regulier) van het examen vwo wiskunde B 2015-1

Aantal punten	Pilotleerlingen		Reguliere leerlingen	
0	23/95	(24%)	8329/16013	(52%)
1	4/95	(4%)	821/16013	(5%)
2	7/95	(7%)	1347/16013	(8%)
3	9/95	(9%)	1163/16013	(7%)
4	15/95	(16%)	1057/16013	(7%)
5	37/95	(39%)	3296/16013	(21%)

Het zien van een driehoek waarop de stelling van Pythagoras kan worden toegepast is een cruciale stap in het oplossingsproces. Deze oplossingsstrategie ligt meer voor de hand als leerlingen met vergelijkbare problemen hebben geoefend. In het overzicht van behaalde punten valt op dat ongeveer de helft van de reguliere leerlingen geen punten haalt tegenover ongeveer een kwart van de pilotleerlingen. Voor het bepalen van de normering van het pilotexamen wordt onder andere het niveau van pilot- en reguliere leerlingen vergeleken op de overlappende vragen tussen de examens. Pilotleerlingen hebben in de aanloop naar het examen meer geoefend met problemen zoals die in vraag 13 gesteld worden en zijn daardoor in het voordeel. Daarom is besloten deze vraag niet mee te tellen als overlap bij het bepalen van de N-term voor dit examen. Als deze vraag voor dit onderzoek ook buiten beschouwing wordt gelaten, wordt het gemiddelde verschil in p-waarden van overlappende WDA vragen tussen de pilot- en reguliere examens -0.3. Pilotleerlingen scoren dan gemiddeld lager dan reguliere vragen.

In Tabel 9 wordt een overzicht gegeven van de gemiddelde p-waarden van alle vragen in de examens voor havo (2011-2015) en vwo (2012-2015) en de gemiddelde p-waarden van alle vragen waarin WDA getoetst worden.

Tabel 9

Overzicht van gemiddelde p-waarden van alle vragen in examens voor havo (2011-2015) en vwo (2012-2015) en gemiddelde p-waarden van WDA vragen in examens, zowel pilot als regulier

Gemiddeldes	Vwo pilot	Vwo regulier	Havo pilot	Havo regulier
Gemiddelde van alle vragen	61.1 (66 vragen)	62.5 (71 vragen)	57.9 (90 vragen)	60.1 (95 vragen)
Gemiddelde van WDA vragen	47.9 (33 vragen)	51.1 (23 vragen)	40.8 (29 vragen)	54.2 (11 vragen)
Verschil	-13.2	-11.4	-17.1	-5.9

De gemiddelde p-waarde van vragen waarin WDA getoetst worden ligt voor de pilotexamens lager dan voor de reguliere examens, voor zowel havo als vwo. Verder worden de vragen waarin WDA getoetst worden gemiddeld minder goed gemaakt dan de overige vragen in de examens.

4.3 Kwalitatieve analyse van leerlingenwerk

Een uitgebreide analyse van het pilotexamen en het reguliere examen voor vwo wiskunde B 2014-1 is opgenomen in Bijlage 6. De WDA vragen uit de examens zelf zijn opgenomen in Bijlage 2. Voor elke vraag uit dat examen is aangegeven waarom een vraag wel of niet als WDA gecodeerd is, welke vorm van WDA in de vraag naar voren komt en hoe dat terug te zien is in het correctievoorschrift. Deze analyse vormt de richtlijn voor het analyseren van leerlingenwerk. In Tabel 10 is een overzicht gegeven van de vragen waarop de analyse van het leerlingenwerk is uitgevoerd, de vragen die WDA toetsen.

Tabel 10

Overzicht van WDA in examenvragen en van bijhorende p-waarden.
Examen vwo wiskunde B 2014-1; pilot en regulier

Overlap (O), Aangepast (A), Nieuw (N) of Regulier (R)	Vraag in pilotexamen	Vraag in regulier examen	Vorm van WDA	p-waarde pilot	p-waarde regulier
N	3		Mp, P *	64.5	
N	4		P	57.0	
N	5		P	58.8	
N	6		P, Ao *	38.7	
R		13	P, Ao *		20.6
O	10	5	- / P**	64.5	57.2
N	11		P	13.6	
N	12		P / Mp **	33.6	
N	13		P	43.4	
N	14		P	32.8	
O	15	6	P	65.6	70.3
R		11	P		41.1
R		18	P		61.5

* Beide vormen van WDA worden in de vraag getoetst

** In de verschillende oplossingswegen zijn verschillende vormen van WDA van toepassing

In deze kwalitatieve analyse is eerst het leerlingenwerk van pilot- en reguliere leerlingen vergeleken voor de overlappende vragen (vragen 10 en 15 uit het pilotexamen overlappen met respectievelijk vragen 5 en 6 uit het reguliere examen). Vervolgens is het leerlingenwerk geanalyseerd van de overige vragen in het pilot- en reguliere examen waarin WDA getoetst worden.

4.3.1 Overlappende WDA vragen

Overlappende vraag 10 (pilot) en vraag 5 (regulier)

Overlappende vraag 10 (pilot) en vraag 5 (regulier) is in eerste instantie als *probleemoplossen* gecodeerd, omdat de tweede oplossingsweg in het correctievoorschrift een opvallende denkstap laat zien. De eerste oplossingsweg in het correctievoorschrift daarentegen is een vorm van reproductie voor leerlingen. In het leerlingenwerk is terug te zien dat veel leerlingen (88% van de pilotleerlingen en 94% van de reguliere leerlingen) de reproductieve oplossingsstrategie volgen. Daarom is ervoor gekozen deze vraag in de rest van het onderzoek niet als WDA te beschouwen.

Tegelijk is in het leerlingenwerk opgevallen dat enkele leerlingen wel een alternatieve oplossingsweg volgen die als WDA beschouwd kan worden. Van de 88 leerlingen die de vraag goed beantwoordden (44 van de 110 pilotleerlingen en 44 van de 128 reguliere leerlingen), laten enkele leerlingen een alternatieve oplossingsstrategie zien in hun uitwerking van deze vraag. In Tabel 11 wordt hiervan een overzicht gegeven.

Tabel 11
Overzicht van aantal pilot- en reguliere leerlingen dat een alternatieve oplossingsweg volgt bij vraag 10 (pilotexamen) en vraag 5 (regulier examen); examen vwo wiskunde B 2014-1

Alternatieve oplossingswegen	Pilotleerlingen		Reguliere leerlingen	
a. Opp. V_1, V_2 en V_3 samen nemen (opl. 2 uit cv)	0/110	(0%)	1/128	(1%)
b. Grafieken 8 omhoog verschoven	5/110	(5%)	2/128	(2%)
c. Oppervlakte opgesplitst in meerdere delen*	5/110	(5%)	5/128	(4%)
d. Grafiek verschoven **	3/110	(3%)	0/128	(0%)
e. Met grafische rekenmachine opgelost	27/110	(25%)	38/128	(30%)

* Dit is een goede oplossingsstrategie maar wordt niet als WDA beschouwd
** Leerlingen hebben geprobeerd de oppervlakte te berekenen door grafieken te verschuiven, maar hebben hier een fout in gemaakt

Alternatieve oplossingswegen a. en b. worden als wiskundig denkactieve en tevens correcte alternatieve oplossingsstrategieën beschouwd. Van de pilotleerlingen laten 7 van de 110 (6%) leerlingen een correcte wiskundig denkactieve oplossingsweg zien in hun uitwerkingen, bij de reguliere leerlingen is dit bij 3 van de 128 (2%) leerlingen terug te zien.

In het leerlingenwerk bij deze examenvraag valt op dat veel leerlingen gebruikmaken van een grafische rekenmachine bij het berekenen van een oppervlakte, zowel pilot (25%) als regulier (30%). Dit is geen correcte methode om de vraag goed te beantwoorden. Verder valt op dat leerlingen die een goede oplossingsweg zijn ingeslagen, maar niet alle punten hebben gehaald, punten hebben verloren door reken- en slordigheidfouten. Dit betreft 36 leerlingen die het reguliere examen hebben gemaakt en 26 pilotleerlingen.

Het globale beeld uit deze vraag is dat enkele leerlingen een alternatieve en wiskundig denkactieve oplossingsweg volgen. Op dit punt zien we een verschil tussen pilot- en reguliere leerlingen, pilotleerlingen volgen vaker een alternatieve oplossingsweg.

Overlappende vraag 15 (pilot) en vraag 6 (regulier)

Overlappende vraag 15 (pilot) en 6 (regulier) is als *probleemoplossen* gecodeerd, omdat een meerstaps-strategie moet worden opgesteld en uitgevoerd. In het licht van WDA zijn een aantal opvallende zaken uit het leerlingenwerk te noemen in de manier waarop zij het probleem aanpakken. In Tabel 12 wordt hiervan een overzicht gegeven.

Tabel 12
Overzicht van aantal leerlingen bij waarnemingen in leerlingenwerk van vraag 15 (pilot) en vraag 6 (regulier); examen vwo wiskunde B van 2014-1

Aanpak probleem	Pilotleerlingen		Reguliere leerlingen	
a. Woordelijke conclusie gegeven	57/110	(52%)	63/128	(49%)
b. Alle punten behaald	53/110	(48%)	48/128	(38%)
c. Schets toegevoegd	19/110	(17%)	3/128	(2%)
d. Stappenplan opgesteld	1/110	(1%)	3/128	(2%)
e. Meerdere oppervlakten berekend	12/110	(11%)	17/128	(13%)

In het correctievoorschrift wordt het trekken van een conclusie naar aanleiding van de berekening niet verplicht gesteld. Vanuit het oogpunt van WDA is dit wel een belangrijke stap in het oplossen van een probleem, *terugkijken* zoals Pólya (1945) het noemt. Ongeveer de helft van zowel de pilot- als reguliere leerlingen geven een woordelijke conclusie. Verder is in het leerlingenwerk te zien dat verscheidene leerlingen de figuur bij de opgave hebben overgenomen en er gegevens aan toe hebben gevoegd. Het maken van een schets bij een probleem kan helpen bij het bepalen van een oplossingsstrategie en past bij de zogenoemde productieve vaardigheden. In het leerlingenwerk van deze examenvraag is te zien dat pilotleerlingen deze vaardigheid meer inzetten dan reguliere leerlingen. Er moet nog wel worden opgemerkt dat deze vraag ook beantwoord kan worden door niet vooraf een oplossingsstrategie op te stellen maar door meteen aan het rekenen te gaan.

De leerlingen die niet alle punten hebben gehaald (52% van de pilotleerlingen en 62% van de reguliere leerlingen) zijn punten verloren door verschillende fouten die in het leerlingenwerk zijn terug te zien. Een overzicht van gemaakte fouten wordt in Tabel 13 gegeven.

Tabel 13
Overzicht van aantal leerlingen bij waarnemingen in leerlingenwerk van vraag 15 (pilot) en vraag 6 (regulier); examen vwo wiskunde B van 2014-1

Gemaakte fouten	Pilotleerlingen		Reguliere leerlingen	
a. Fout in vereenvoudigen logaritmen*	13/110	(12%)	16/128	(13%)
b. Fout in opstellen integraal	10/110	(9%)	12/128	(9%)
c. Kent primitieve niet**	4/110	(4%)	4/128	(3%)
d. Reken- of slordigheidfout	18/110	(16%)	22/128	(17%)
e. Onvolledig	0/110	(0%)	17/128	(13%)
f. Werkt met verhouding tussen oppervlakten	2/110	(2%)	11/128	(9%)
g. Vult waarden voor p in	1/110	(1%)	3/128	(2%)
h. Probeert met grafische rekenmachine op te lossen	1/110	(1%)	0/128	(0%)

* het lukt leerlingen niet om de logaritmen te vereenvoudigen en zo onafhankelijk van p te schrijven.
** van $1/x$ of van $1/p$.

Er zijn 17 reguliere leerlingen die de vraag onvolledig beantwoorden door bijvoorbeeld alleen aan te tonen dat de oppervlakte onder de grafiek onafhankelijk van p is. Dergelijke onvolledigheid wordt bij pilotleerlingen niet teruggezien in hun werk. Wat betreft de interpretatie van de vraag valt het op dat 11 van de 128 reguliere leerlingen de vraag verkeerd hebben geïnterpreteerd en hebben aangetoond dat de verhouding tussen de oppervlakten onafhankelijk van p is. Dit geldt ook voor 2 van de 110 pilotleerlingen. Verder is er weinig verschil tussen pilot- en reguliere leerlingen in het aantal fouten dat gemaakt is door gebrek aan parate voorkennis. Hieronder vallen *f, g, h* en *i* uit Tabel 13. Pilotleerlingen maken in totaal 45 dergelijke fouten (gemiddeld 0.4 fout per leerling), reguliere leerlingen maken er in totaal 54 (gemiddeld 0.4 fout per leerling).

Het globale beeld uit deze vraag is dat verschillende onderdelen aan de gevolgde oplossingsweg worden toegevoegd waarin WDA is terug te zien en dat punten worden verloren op verschillende soorten fouten. Wat dit betreft zijn er weinig verschillen tussen pilot- en reguliere leerlingen.

4.3.2 WDA vragen in het pilotexamen

Vraag 3 uit het pilotexamen

De vragen 3, 4 en 5 in het pilotexamen vormen samen de meetkundige opgave *Cirkels in een driehoek*. In vraag 3 moeten de leerlingen een bewijs geven. Hiertoe moet een variabele voor de straal van de ingeschreven cirkel worden ingevoerd om het meetkundige probleem naar algebra te vertalen. De vraag is als *probleemoplossen* en *modelleren als proces* gecodeerd. 54 van de 110 leerlingen (49%) hebben alle punten gehaald voor deze vraag. In het licht van WDA zijn een aantal opvallende zaken uit het leerlingenwerk te noemen. In Tabel 14 wordt hiervan een overzicht gegeven.

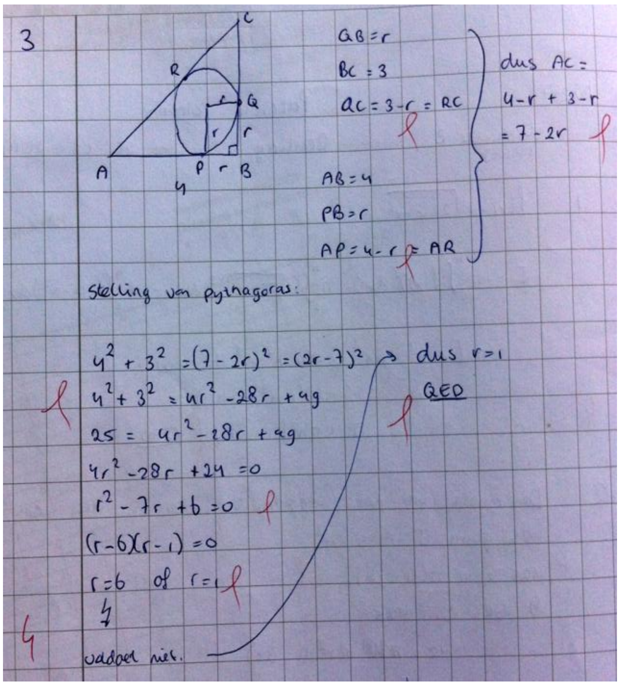
Tabel 14
Overzicht van aantal leerlingen bij waarnemingen in leerlingenwerk van vraag 3; pilotexamen vwo wiskunde B 2014-1

Waarnemingen	Aantal leerlingen	
a. Voegt extra schets toe	15/110	(14%)
b. Voert geen variabele in	11/110	(10%)
c. Voert meerdere variabelen in	5/110	(5%)
d. Alternatieve oplossingsweg	30/110	(27%)
i. Goede oplossing*	14/110	(13%)
ii. Loopt vast**	16/110	(15%)
e. Cirkelredenering	6/110	(5%)

* Bij deze leerlingen worden 11 onderling verschillende oplossingswegen gezien.
** Bij deze leerlingen worden 13 onderling verschillende oplossingswegen gezien.

Alle leerlingen schrijven een uitwerkingen op bij deze vraag en ongeveer de helft van de leerlingen haalt alle punten. Het invoeren van een variabele, bolletje 2 in het correctievoorschrift, is gecodeerd als *Modelleren als proces*. 90% van de leerlingen voert deze stap uit, waaronder 5 leerlingen die meerdere variabelen invoeren voor verschillende lengtes. Van de 11 leerlingen (10%) die geen variabele invoeren, geven 5 leerlingen wel een goed bewijs. In het leerlingenwerk zijn 24 alternatieve oplossingswegen te zien, waarvan ongeveer de helft tot een goed bewijs leidt.

In Figuur 8 is een voorbeeld van leerlingenwerk toegevoegd waarin een goede en volledige uitwerking van de vraag is gegeven.



Figuur 8: voorbeeld van leerlingenwerk bij vraag 3 in het pilotexamen vwo wiskunde B 2014-1

Vraag 4 uit het pilotexamen

In vraag 4 moeten de leerlingen weer een bewijs geven. Deze vraag is als *probleemoplossen* gecodeerd. Het zien van gelijkvormigheid tussen driehoeken is een cruciale stap in de oplossingsweg uit het correctievoorschrift. In het licht van WDA zijn een aantal opvallende zaken uit het leerlingenwerk te noemen. In Tabel 15 wordt hiervan een overzicht gegeven.

Tabel 15
Overzicht van aantal leerlingen bij waarnemingen in leerlingenwerk van vraag 4; pilotexamen vwo wiskunde B 2014-1

Waarnemingen	Aantal leerlingen	
a. Haalt alle punten	45/110	(41%)
b. Alternatieve goede oplossingsweg	4/110	(4%)
c. Ziet gelijkvormigheid wel, maar loopt vast	18/110	(16%)
d. Ziet gelijkvormigheid niet, probeert wel wat	30/110	(27%)
e. Notatie- en slordigheidfout	7/110	(6%)
f. Cirkelredenering	3/110	(3%)
g. Geen uitwerking	7/110	(6%)

Van de 45 leerlingen (41%) die alle punten voor deze vraag halen, volgen 4 leerlingen een alternatieve oplossingsweg. Doordat leerlingen geen gelijkvormigheid tussen driehoeken zien (30 leerlingen) of de gelijkvormigheid wel zien maar tocht vast lopen (18 leerlingen) geeft 44% van de leerlingen geen goed bewijs.

Vraag 5 uit het pilotexamen

In vraag 5 van het pilotexamen moet de straal van een kleinere cirkel in de driehoek berekend worden. De vraag is als *probleemoplossen* gecodeerd. Met de gegevens uit de vragen 3 en 4 en het toepassen van de stelling van Pythagoras kan een vergelijking opgesteld worden. Deze vergelijking hoeft niet exact te worden opgelost. In het licht van WDA zijn een aantal opvallende zaken uit het leerlingenwerk te noemen. In Tabel 16 wordt hiervan een overzicht gegeven.

Tabel 16
Overzicht van aantal leerlingen bij waarnemingen in leerlingenwerk van vraag 5; pilotexamen vwo wiskunde B 2014-1

Waarnemingen	Aantal leerlingen	
a. Haalt alle punten	45/110	(41%)
b. Lost vergelijking exact op	43/110	(39%)
i. Gaat goed	26/110	(24%)
ii. Legt uit dat tweede oplossing niet kan	11/110	(10%)
iii. Legt niet uit de tweede oplossing niet kan	1/110	(1%)
iv. Fout in exact oplossen*	17/110	(15%)
c. Vindt twee oplossingen met GRM	5/110	(5%)
i. Legt uit dat tweede oplossing niet kan	3/110	(3%)
ii. Legt niet uit dat tweede oplossing niet kan	2/110	(2%)
d. Alternatieve oplossingsweg	43/110	(39%)
i. $AU = 3 - \sqrt{4r} = 3r$	7/110	(6%)
ii. $UP + AU + PR = AB = 4$	5/110	(5%)
iii. Pythagoras in ΔANU	16/110	(15%)
iv. Overig	15/110	(14%)
d. Loopt vast in ingeslagen oplossingsweg	26/110	(24%)
e. Reken- en slordigheidfout	25/110	(23%)
f. Geen uitwerking	8/110	(7%)

* Deze leerlingen hadden waarschijnlijk alle punten gehaald als zij de vergelijking niet exact hadden opgelost.

45 leerlingen (41%) halen alle punten voor deze vraag, 8 leerlingen schrijven geen uitwerking op. Hoewel er meerdere oplossingswegen mogelijk zijn, wordt er in het correctievoorschrift een beschreven. In het leerlingenwerk worden 12 verschillende goede alternatieve oplossingswegen herkend bij in totaal 43 leerlingen (39%). Hoewel een gestelde vergelijking met een grafische rekenmachine mag worden opgelost, lossen 43 leerlingen (39%) de door hen opgestelde vergelijking exact op, 17 van de 43 leerlingen verliezen hierdoor punten. Van de 17 leerlingen die twee oplossingen vinden, geven 14 leerlingen aan welke oplossing het moet zijn, dit is een belangrijke stap in het oplossen van een probleem. 3 leerlingen slaan deze stap over en verliezen daardoor een punt.

Vraag 6 uit het pilotexamen

Vraag 6 in het pilotexamen is als *probleemoplossen* en *abstract object* gecodeerd, omdat de combinatie van een parameter en het bepalen van een verticale asymptoot nieuw is en in een volledig abstracte context is geplaatst. Een vergelijkbare situatie is te zien in vraag 13 van het reguliere examen. De verschillende analyses van het leerlingenwerk worden na vraag 13 in het reguliere examen verder besproken en vergeleken. Wat vraag 6 in het pilotexamen betreft zijn in het licht van WDA een aantal opvallende zaken uit het leerlingenwerk te noemen. In Tabel 17 wordt hiervan een overzicht gegeven.

Tabel 17
Overzicht van aantal leerlingen bij waarnemingen in leerlingenwerk van vraag 6; pilotexamen vwo wiskunde B 2014-1

Waarnemingen	Aantal leerlingen	
a. Haalt alle punten	2/110	(2%)
b. Controleert teller niet (b_4)	98/110	(89%)
c. Controleert teller wel (b_4)	9/110	(8%)
d. Fout in b_3, b_2 wel goed	10/110	(9%)
e. Onvolledige uitwerking	58/110	(53%)
f. Stelt teller gelijk aan 0	2/110	(2%)
g. Reken- of slordigheidfout	13/110	(12%)
h. Geen uitwerking	1/110	(1%)

Bij vrijwel alle leerlingen (op 3 leerlingen na) is in hun uitwerking te zien dat zij weten wat een goede oplossingsrichting voor het beantwoorden van deze vraag is: de noemer gelijkstellen aan 0. In deze eerste stap, die op zichzelf als reproductie wordt beschouwd, verliezen dus weinig leerlingen punten. Toch zijn er slechts 2 leerlingen die deze vraag volledig goed maken. Veel leerlingen (89%) verliezen een punt doordat zij niet controleren of de gevonden waarden voor a geen nulpunten van de teller zijn. Hierdoor kan geen goede conclusie getrokken worden om de vraag te beantwoorden, terwijl dit wel een belangrijke stap is in het oplossen van het probleem. In het correctievoorschrift is deze stap opgenomen onder bolletje 4. Bij slechts 9 leerlingen is deze stap wel terug te zien in hun werk. Ook verliezen veel leerlingen (53%) punten doordat zij een onvolledig antwoord geven op de vraag. Onder onvolledigheid wordt het geven van een gedeeltelijke oplossing verstaan, het niets doen met de periodiciteit voor het vinden van mogelijke oplossingen en het niet afmaken van een begonnen uitwerking. Leerlingen die de stappen van bolletje 1 en 2 in het correctievoorschrift goed doen, maar een fout maken bij de vervolgstap in bolletje 3, maken wel de belangrijke denkstappen in het oplossingsproces, maar zij weten dit niet goed af te ronden.

Vraag 11 uit het pilotexamen

Vraag 11 uit het pilotexamen is als *probleemoplossen* gecodeerd, omdat de oplossingsweg een combinatie is van verschillende denkstappen. De vraag behoort tot de vectormeetkunde, een nieuw domein in de nieuwe wiskundecurricula. Na het inzien van het leerlingenwerk valt het aantal behaalde punten per leerling op. In Tabel 18 wordt hiervan een overzicht gegeven.

Tabel 18
Overzicht van aantal leerlingen bij waarnemingen in leerlingenwerk van vraag 11; pilotexamen vwo wiskunde B 2014-1

Waarnemingen	Aantal leerlingen	
a. Haalt alle punten	11/110	(10%)
b. Haalt enkele (1-3) punten	27/110	(25%)
i. Goede oplossingsweg	14/110	(13%)
ii. Probeert, geen strategie	13/110	(12%)
iii. 1 punt	16/110	(15%)
iv. 2 punten	6/110	(5%)
v. 3 punten	5/110	(5%)
c. Haalt 0 punten	72/110	(65%)
i. Geen uitwerking	27/110	(25%)
ii. Probeert wel iets	45/110	(41%)

Ongeveer tweederde van de leerlingen haalt geen punten voor deze vraag. Van de 11 leerlingen die alle punten hebben gehaald komen 10 leerlingen van een pilotschool. Van de leerlingen die enkele punten hebben gehaald (25%), zijn 14 leerlingen een goede oplossingsweg ingeslagen, waarvan 7 leerlingen weer van dezelfde pilotschool. Doordat deze vraag niet goed is gemaakt door pilotleerlingen, zijn er geen andere zaken opgevallen met betrekking tot WDA.

Vraag 12 uit het pilotexamen

Vraag 12 uit het pilotexamen valt binnen dezelfde opgave als vraag 11. In deze vraag moet worden aangetoond dat een bepaalde afstand constant is. In het correctievoorschrift worden twee wezenlijk verschillende oplossingswegen aangegeven. De eerste oplossingsweg is als *probleemoplossen* gecodeerd en redeneert aan de hand van vectoren. De tweede oplossingsweg is als *modelleren als proces* gecodeerd en maakt een vertaalslag van de analytische meetkunde naar algebra. Na het inzien van het leerlingenwerk valt het aantal behaalde punten per leerling op en de gevolgde oplossingsstrategie. In Tabel 19 wordt hiervan een overzicht gegeven.

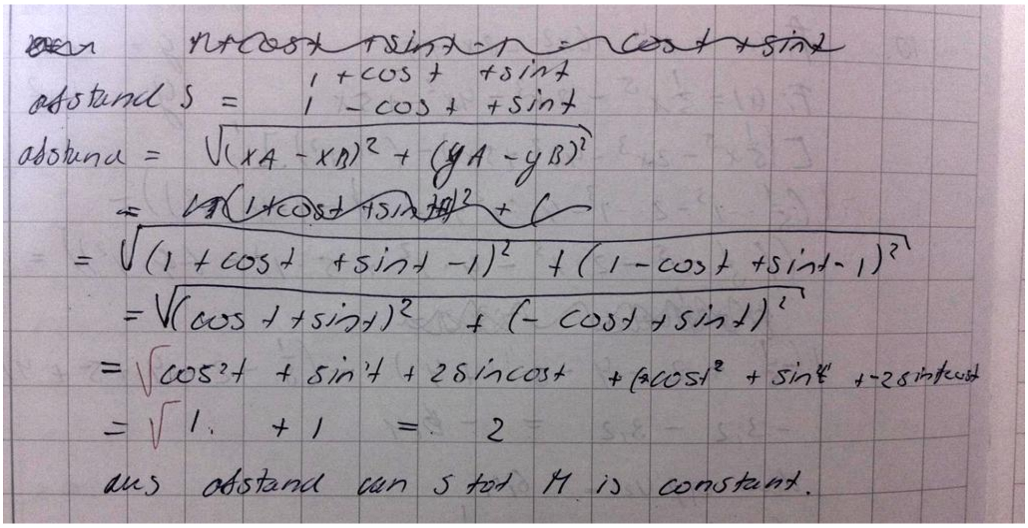
Tabel 19
Overzicht van aantal leerlingen bij waarnemingen in leerlingenwerk van vraag 12; pilotexamen vwo wiskunde B 2014-1

Waarnemingen	Aantal leerlingen	
a. Haalt alle punten	39/110	(35%)
b. Haalt enkele (1-3) punten	18/110	(16%)
i. Goede oplossingsweg	16/110	(15%)
ii. Probeert, geen strategie	2/110	(2%)
iii. 1 punt	8/110	(7%)
iv. 2 punten	4/110	(4%)
v. 3 punten*	6/110	(5%)
e. Haalt 0 punten	53/110	(48%)
iii. Geen uitwerking	34/110	(31%)
iv. Probeert wel iets	19/110	(17%)
f. Optie 1 uit correctievoorschrift**	57/110	(52%)
g. Optie 2 uit correctievoorschrift**	7/110	(6%)

* Leerlingen maken kleine fouten, daardoor niet alle punten voor deze vraag.
** Leerlingen die 0 punten hebben gehaald, maar wel iets hebben geprobeerd zijn hier ook in meegenomen.

Ongeveer de helft van de leerlingen haalt geen punten voor deze vraag, waaronder 34 leerlingen (31%) die niets opschrijven. Een grote meerderheid van de leerlingen volgt oplossingsstrategie 1 uit het correctievoorschrift en enkele leerlingen volgen de tweede oplossingsweg (52% tegenover 6%), beide oplossingswegen zijn als een andere vorm van WDA gecodeerd. 39 leerlingen (35%) halen alle punten voor deze vraag. Van de 18 leerlingen die enkele punten voor deze vraag halen, zijn 16 leerlingen een goede oplossingsweg ingeslagen. In Figuur 9 is een voorbeeld van leerlingenwerk gegeven waarin de uitwerking van de vraag goed is, maar op het einde het wortelteken door de leerling vergeten is mee te nemen.

Als de gemiddelde scores per pilotschool worden vergeleken voor deze vraag, dan valt op dat leerlingen van één van de pilotscholen gemiddeld hoger scoren dan leerlingen van de andere pilotscholen (een p-waarde van 60.1 tegenover 21.2, 31.5 en 38.9). De leerlingen van deze school scoorden bij vraag 11 ook opvallend beter dan leerlingen van de andere pilotscholen.



Figuur 9: voorbeeld van leerlingenwerk bij vraag 12 in het pilotexamen vwo wiskunde B 2014-1

Vraag 13 uit het pilotexamen

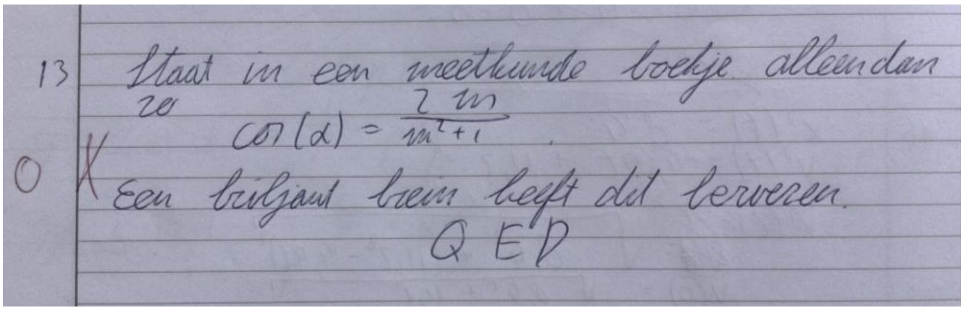
Vraag 13 en vraag 14 uit het pilotexamen vormen samen de opgave over *Gespiegelde raaklijnen*. Deze vragen zijn als *probleemoplossen* gecodeerd. Voor het beantwoorden van vraag 13 moeten verschillende denkstappen gemaakt worden om de gevraagde formule op te kunnen stellen, hoewel het berekenen van een hoek tussen twee lijnen in principe reproductie is voor de leerlingen. In Tabel 20 wordt een overzicht gegeven van het aantal behaalde punten per leerling en het aantal leerlingen dat een fout maakt met absolute-waarde strepen in de formule.

Tabel 20
Overzicht van aantal leerlingen bij waarnemingen in leerlingenwerk van vraag 13; pilotexamen vwo wiskunde B 2014-1

Waarnemingen	Aantal leerlingen	
a. Haalt alle punten	6/110	(5%)
b. Haalt 3 punten	47/110	(43%)
c. Haalt 2 punten	15/110	(14%)
d. Haalt 1 punt	31/110	(28%)
e. Haalt 0 punten	11/110	(10%)
f. Fout met absolute-waarde strepen	55/110	(50%)

Een groot aantal leerlingen (90%) haalt punten voor deze vraag, maar slechts 6 leerlingen halen alle punten. Deze 6 leerlingen komen allemaal uit dezelfde klas. Veel leerlingen (50%) verliezen punten, doordat zij geen absolute-waarde strepen opstellen of hier een fout mee maken. In Figuur 10 is een voorbeeld gegeven van leerlingenwerk van een leerling die niet wist hoe de vraag goed opgelost kon worden.

Als de gemiddelde scores per pilotschool worden vergeleken voor deze vraag, dan valt op dat leerlingen van twee pilotscholen gemiddeld hoger scoren dan leerlingen van de andere twee pilotscholen (p-waarde van 61.2 en 63.0 tegenover 28.8 en 31.5).



Figuur 10: voorbeeld van leerlingenwerk bij vraag 13 in het pilotexamen vwo wiskunde B 2014-1

Vraag 14 uit het pilotexamen

Vraag 14 uit het pilotexamen is als *probleemopossen* gecodeerd. Het probleem moet goed begrepen worden, voordat een oplossingsweg gecreëerd kan worden. De oplossingsweg bestaat uit verschillende denkstappen die gecombineerd moeten worden. De belangrijkste denkstappen zijn het gebruiken van de formule uit vraag 13, het opstellen van de afgeleide functie en het combineren van deze twee gegevens. In het licht van WDA zijn een aantal opvallende zaken uit het leerlingenwerk te noemen. In Tabel 21 wordt hiervan een overzicht gegeven.

Tabel 21

Overzicht van aantal leerlingen bij waarnemingen in leerlingenwerk van vraag 13; pilotexamen vwo wiskunde B 2014-1

Waarnemingen	Aantal leerlingen	
a. Haalt alle punten	10/110	(9%)
b. Haalt 0 punten	22/110	(20%)
i. Geen uitwerking	15/110	(14%)
ii. Probeert wel iets	8/110	(7%)
c. Haalt enkele punten, zonder strategie	20/110	(18%)
d. Alleen een fout in b5	8/110	(7%)
e. Doet niets met afgeleide	24/110	(22%)
f. Gebruikt vraag 13 niet	11/110	(10%)

Slechts 10 leerlingen (9%) lukt het de vraag goed en volledig te beantwoorden. Leerlingen die enkele punten voor de vraag halen en wel duidelijk een strategie volgen, gaan vaak de fout in doordat zij een belangrijke denkstap niet uitvoeren. 24 leerlingen (22%) doen bijvoorbeeld niets met de afgeleide, maar proberen met alleen de formule uit vraag 13 deze vraag te beantwoorden. En omgekeerd zijn er 11 leerlingen (10%) die vraag 13 niet gebruiken en blijven steken in het redeneren met de afgeleide. Opvallend is dat er 9 leerlingen zijn die de afgeleide functie in de formule uit vraag 13 invullen en op die manier proberen de vraag te beantwoorden. Deze uitgebreidere oplossingsweg is goed en getuigt van inzicht, maar is tegelijk gevoelig voor rekenfouten. Leerlingen die alleen een fout in bolletje 5 uit het correctievoorschrift maken, hebben de belangrijkste denkstappen in hun werk laten zien. Het lukt hen alleen niet deze stappen op de juiste manier te combineren.

WDA vragen in het pilotexamen

Het globale beeld uit deze WDA vragen in het pilotexamen is dat pilotleerlingen (a) regelmatig alternatieve oplossingswegen volgen om het probleem op te lossen, (b) weinig moeite hebben met het vertalen tussen verschillende representaties in de wiskunde, (c) de WDA vragen die betrekking hebben op nieuwe onderwerpen in de nieuwe curricula minder goed maken en dat dit sterk verschilt per klas en (d) geneigd zijn, waar mogelijk, een vergelijking exact op te lossen.

4.3.3 WDA vragen in het reguliere examen

Vraag 11 uit het reguliere examen

Vraag 11 uit het reguliere examen behoort tot een opgave binnen de Euclidische meetkunde. De vragen 10 en 12 in deze opgave zijn niet als WDA gecodeerd, omdat de bijbehorende oplossingswegen voor de hand liggen. Voor vraag 11 is de oplossingsweg niet meteen duidelijk en moet de leerling de juiste gegevens gebruiken en combineren om de vraag te beantwoorden.

Slechts 10 leerlingen (8%) zien de verhouding die ontstaat door de zwaartelijnen, dit zijn ook de enige leerlingen die alle punten voor deze vraag hebben gehaald. Leerlingen die de vraag wel geprobeerd hebben te beantwoorden, maar niet alle punten haalden (116 leerlingen, 91%) zijn verschillende oplossingswegen ingeslagen en zijn vastgelopen omdat zij de verhouding door de zwaartelijnen niet opmerkten. Een deel van hen (41 leerlingen) probeert de redenering wel compleet te maken door naar het antwoord toe te werken. Bij 7 leerlingen wordt een volledig alternatieve oplossingsweg terug gezien in hun uitwerking. Hoewel de ingeslagen oplossingswegen wel tot een goed antwoord kunnen leiden, halen zij niet alle punten omdat de redenering uiteindelijk te kort door de bocht is.

In de methodesectie is aangegeven dat leerlingen waarvan het werk is onderzocht in de kwalitatieve analyse opvallend lager scoren dan het landelijk gemiddelde voor deze vraag. Resultaten van de kwalitatieve analyse kunnen voor deze vraag uit het reguliere examen dan ook lastig gegeneraliseerd worden.

Vraag 13 uit het reguliere examen

Vraag 13 in het reguliere examen is als *probleemoplossen* en *abstract object* gecodeerd, omdat de combinatie van een parameter en het bepalen van een raakpunt nieuw is en in een volledig abstracte context is geplaatst. In het licht van WDA zijn een aantal opvallende zaken uit het leerlingenwerk te noemen. In Tabel 22 wordt hiervan een overzicht gegeven.

Tabel 22

Overzicht van aantal leerlingen bij waarnemingen in leerlingenwerk van vraag 13 (regulier examen vwo wiskunde B 2014-1)

Waarnemingen	Aantal leerlingen	
a. Haalt alle punten	17/128	(13%)
b. Geeft conclusie	6/128	(5%)
c. Controleert $f_a(x) = 0$ èn $f_a'(x) = 0$	9/128	(7%)
d. Doet niets met afgeleide	44/128	(34%)
e. Bepaalt $f_a(x) = 0$ exact als oplossingsstrategie	29/128	(23%)
f. Bepaalt $f_a'(x) = 0$ exact als oplossingsstrategie	4/128	(3%)
g. Reken- of slordigheidfout	6/128	(5%)
h. Geen uitwerking	10/128	(8%)

Slechts 17 leerlingen (13%) beantwoorden deze vraag helemaal goed. 9 leerlingen geven een extra volledige uitwerking door te laten zien dat het gegeven punt een nulpunt van zowel de functie als de afgeleide functie is. 4 Leerlingen bewijzen zelfs dat het gegeven punt een nulpunt van de afgeleide functie is, door de vergelijking $f_a'(x) = 0$ exact op te lossen. Verder verbinden 6 leerlingen een woordelijke conclusie aan het door hen gegeven antwoord. Bij de overige leerlingen ontbreekt deze terugkoppeling. In het correctievoorschrift wordt het trekken van een conclusie naar aanleiding van de berekening niet verplicht gesteld. Vanuit het oogpunt van WDA is dit wel een belangrijke stap in het oplossen van een probleem.

In het leerlingenwerk is terug te zien dat veel leerlingen niet weten hoe een goed en volledig bewijs voor deze vraag gegeven kan worden. 34% van de leerlingen doet bijvoorbeeld niets met de afgeleide functie en probeert de vraag op een andere manier te beantwoorden. 23% van de leerlingen lost bijvoorbeeld de vergelijking $f_a(x) = 0$ op en vindt op die manier de x-coördinaat van het gegeven punt $\frac{\pi}{a}$, hiermee denken zij een goed bewijs te hebben gegeven, wat niet correct is.

Vraag 6 uit het pilotexamen en vraag 13 uit het reguliere examen

In vraag 6 in het pilotexamen en vraag 13 in het reguliere examen is een parameter toegevoegd aan een functie, waardoor de vragen niet meer opgelost kunnen worden met uitsluitend reproductieve kennis en vaardigheden. In het reguliere examen moet het raakpunt van de grafiek met de x-as bepaald worden en in het pilotexamen een verticale asymptoot. In beide vragen komt het erop neer dat de waarde van de parameter a voor de specifieke situatie berekend moet worden. Hoewel de vragen verschillend zijn, valt het op dat voor beide vragen weinig leerlingen alle punten halen (vraag 6 pilot 2% en vraag 13 regulier 13%) en dat de ingeslagen oplossingsweg voor beide vragen bij veel leerlingen niet goed is of onvolledig uitgewerkt wordt.

Vraag 18 uit het reguliere examen

Vraag 18 uit het reguliere examen betreft een opgave in de Euclidische meetkunde. Vanuit de gegevens moet aangetoond worden dat een bepaalde vierhoek een koordenvierhoek is. Door verschillende gegevens uit de situatie af te leiden en vervolgens te combineren kan een oplossingsweg gecreëerd worden. In het licht van WDA zijn een aantal opvallende zaken uit het leerlingenwerk te noemen. In Tabel 23 wordt hiervan een overzicht gegeven.

Tabel 23

Overzicht van aantal leerlingen bij waarnemingen in leerlingenwerk van vraag 18; regulier examen vwo wiskunde B 2014-1

Waarnemingen	Aantal leerlingen	
a. Haalt alle punten	66/128	(52%)
b. Schrijft een goede, bondige redenering op	40/128	(31%)
c. Goede alternatieve oplossingsweg	2/128	(2%)
d. Berekent meer gegevens dan nodig	47/128	(37%)
i. Goede redenering	24/128	(19%)
ii. Loopt vast	23/128	(18%)
e. Ziet alleen *constante hoek* niet (b1)	20/128	(16%)
f. Ziet alleen *Z-hoeken* niet (b2)	5/128	(4%)
g. Ziet alleen *gestrekte hoek* niet (b3)	17/128	(13%)
h. Haalt 0 punten	11/128	(9%)

Op één leerling na schrijven alle leerlingen een uitwerking op. Veel leerlingen (91%) halen ook punten voor deze vraag. 47 leerlingen (37%) schrijven meer gegevens op dan nodig en proberen op die manier de juiste gegevens te verzamelen om een goed bewijs te geven. 23 leerlingen daarvan lopen toch vast en 24 leerlingen weten de vraag op deze manier goed te beantwoorden. In totaal halen 66 leerlingen (52%) alle punten, 2 van hen laten een goede alternatieve oplossingsweg in hun uitwerking zien. Leerlingen die niet alle punten halen, maar wel een goede oplossingweg zijn ingeslagen lopen vast doordat zij bepaalde gegevens niet zien, zoals e., f. en g. uit Tabel 23.

WDA vragen in het reguliere examen

Het globale beeld van deze vragen in het reguliere examen is dat de WDA vragen vaak binnen de Euclidische meetkunde vallen. Bij het oplossen van dergelijke problemen schrijven leerlingen eerst zoveel mogelijk informatie op en proberen verschillende oplossingswegen. Als een leerling vastloopt wordt er gezocht naar een andere manier om het probleem toch op te lossen. Dit is een open oplossingsstrategie die vaak tot een goed antwoord leidt. Reguliere leerlingen weten minder goed raad met andere problemen waarin ook WDA getoetst worden, vaak is de uitwerking dan onvolledig of niet correct.

5. Conclusies en discussie

5.1 WDA in examenvragen

De eerste onderzoeksvraag luidt in hoeverre vragen in de pilotexamens een beroep doen op wiskundige denkactiviteiten. De conclusie is dat er een verschil is tussen de pilotexamens van havo en de pilotexamens van vwo in het aantal vragen waarin WDA getoetst worden. Voor vwo wordt in de helft van de vragen in de pilotexamens WDA getoetst, voor havo is dit ongeveer een derde van het totaal aantal vragen in de pilotexamens. Tegelijk is het opvallend dat het percentage vragen waarin WDA getoetst worden in de examens voor vwo in de afgelopen 4 jaar is afgenomen. Ook is er een verschil tussen de pilotexamens en de reguliere examens in het totaal aantal vragen waarin WDA getoetst worden. Voor havo is dit aantal vragen in de pilotexamens sterk toegenomen ten opzichte van de reguliere examens. Voor vwo is er ook een toename, maar minder groot. Dit wordt onder andere veroorzaakt doordat de WDA vragen in de reguliere examens voor een groot deel vallen binnen de Euclidische meetkunde, een onderwerp dat niet in de nieuwe curricula is opgenomen.

Wat betreft de deelaspecten van WDA is de conclusie dat met name *probleemoplossen* getoetst wordt in de pilotexamens. Modelleren en abstraheren komen veel minder aan de orde. De deelaspecten *model als object* en *abstraheren als proces* worden zelfs niet of nauwelijks getoetst in de examens.

Naar aanleiding van deze conclusies zijn de volgende opmerkingen te noemen. In de pilotexamens is al een aantal vragen aangepast ten opzichte van de reguliere examens, om zo in de vraag ook WDA te toetsen. Een voorbeeld hiervan is gegeven in de onderzoekssetting in de methodesectie. Een dergelijke aanpassing zou bij meer examenvragen uitgevoerd kunnen worden, zodat er meer WDA getoetst worden in de eindexamens, ook hiervan zijn voorbeelden gegeven. Gezien het aantal examenvragen waarin WDA getoetst worden is hier nog vooruitgang te boeken. Mogelijk kunnen er in de constructieopdrachten voor examens richtlijnen worden opgenomen voor het aantal vragen in een examen dat WDA dient te toetsen.

Een andere opmerking is dat de analytische meetkunde de Euclidische meetkunde gedeeltelijk heeft vervangen in de nieuwe curricula voor vwo wiskunde B. Met het oog op wiskundige denkactiviteiten is het opvallend dat juist het onderwerp uit het reguliere curriculum voor vwo, waarvan de examenvragen WDA toetsen, niet meer in het nieuwe curriculum is opgenomen.

Een derde opmerking heeft betrekking op de verschillende deelaspecten van WDA die in de examens getoetst worden. Hoewel *probleemoplossen* als bovenste punt in de driehoek een belangrijk onderdeel is van WDA, moeten ook andere vormen van WDA getoetst worden in de examens. Het toetsen van verschillende vormen van WDA heeft immers direct gevolgen voor het onderwijzen van WDA in de wiskundelessen, waarin alle deelaspecten van WDA aan bod dienen te komen. Hierbij moet worden opgemerkt dat, vanwege de beschikbare tijd, niet alle aspecten van de modelleercyclus in een examenvraag naar voren behoeven te komen (Van Streun, 2014). In een probleemsituatie kan een van de aspecten worden uitgelicht.

Bij deze conclusies en opmerkingen wat de eerste onderzoeksvraag betreft wordt de volgende kanttekening gemaakt. Met het ontwikkelde model voor dit onderzoek is alleen geanalyseerd of en hoe er WDA getoetst worden in examenvragen. Het niveau van WDA in een vraag is hierin niet meegenomen en vraagt om verder onderzoek.

Samengevat zien we ten aanzien van de eerste onderzoeksvraag dat er wel een beroep gedaan wordt op WDA in examenvragen, maar dat dit zeker op het havo nog meer ingevoerd kan worden. Daarnaast is er voor zowel het havo als het vwo nog weinig variatie in de vorm waarin WDA getoetst worden in de pilotexamens van wiskunde B, dit vraagt om meer aandacht bij het ontwerpen van de examens.

5.2 Analyse van leerlingenresultaten en leerlingenwerk

Voor de beantwoording van de tweede onderzoeksvraag, of pilotleerlingen beter presteren dan leerlingen van reguliere scholen met betrekking tot WDA in examenvragen, zijn de resultaten van zowel de kwantitatieve analyse van de leerlingenresultaten als de kwalitatieve analyse van het leerlingenwerk onderzocht.

5.2.1 Kwantitatieve analyse van leerlingenresultaten

De conclusie is dat pilotleerlingen op het havo gemiddeld hoger (+6.0) scoren dan reguliere leerlingen op overlappende vragen (vragen in de pilotexamens die exact gelijk zijn aan vragen in de reguliere examens) waarin tevens WDA getoetst worden. Op het vwo scoren de pilotleerlingen gemiddeld ook hoger (+4.8) dan de reguliere leerlingen op deze vragen. Uit het gemiddelde van de p-waarden van alle examenvragen waarin WDA getoetst worden is te concluderen dat pilotleerlingen gemiddeld juist lager scoren dan reguliere leerlingen, dit geldt voor zowel het havo als het vwo.

Verder is de conclusie dat de vragen die binnen de overlap tussen het pilot- en reguliere examen vallen, waarin WDA getoetst worden en waarvan het verschil in p-waarden tussen het pilot- en reguliere examen groot is, door pilotleerlingen beter gemaakt worden. De drie vragen in de examens waarvoor dit geldt, zijn voorbeelden van vragen waarbij leerlingen niet terug kunnen vallen op hun reproductieve kennis en vaardigheden, maar waar leerlingen productieve vaardigheden moeten inzetten om het probleem op te lossen. De betreffende pilotleerlingen slagen hier beter in dan de reguliere leerlingen die deze vragen gemaakt hebben. Hoewel het hier om slechts drie vragen gaat, kan voorzichtig gesteld worden dat dit een positief resultaat is van het denkactievere wiskundeonderwijs op de pilotscholen.

Naar aanleiding van deze conclusies zijn de volgende opmerkingen te noemen. Voorzichtigheid is geboden bij het trekken van conclusies naar aanleiding van het verschil in gemiddelde p-waarden. De gemiddelde p-waarde van vragen waarin WDA getoetst worden is een gemiddelde van verschillende vragen, die naast WDA ook andere (wiskunde)doelen toetsen. De p-waarde van een vraag wordt door veel verschillende factoren beïnvloed.

Een tweede opmerking is dat, voor het vergelijken van p-waarden van overlappende vragen tussen de pilot- en reguliere examens moet worden afgevraagd in hoeverre de voorkennis van pilotleerlingen en reguliere leerlingen voor deze vragen gelijk is. Immers, als de voorkennis verschillend is, kan een vraag voor de reguliere leerlingen reproductie zijn, terwijl het voor de pilotleerlingen een groter beroep doet op productieve vaardigheden.

Een kanttekening bij deze conclusies en opmerkingen is dat de resultaten van de kwantitatieve analyse zijn gebaseerd op een beperkt aantal pilotscholen en een beperkt aantal pilotleerlingen. Resultaten kunnen sterk beïnvloed worden door een enkele pilotschool, daarom kunnen vergaande conclusies niet getrokken worden, daarvoor is vervolgonderzoek nodig. In de kwalitatieve analyse zijn de resultaten uit de kwantitatieve analyse verder onderzocht.

Een tweede kanttekening is dat in dit onderzoek alleen gekeken is of en hoe een examenvraag een vorm van WDA toetst. Er is geen rekening gehouden met het niveau van de vraag, het niveau van WDA in de vraag, het wiskundedomein waarbinnen de vraag te plaatsen is en de invloed van het toetsen van WDA op de p-waarde van een vraag. Dit kan in vervolgonderzoek verder worden uitgediept.

5.2.2 Kwalitatieve analyse van leerlingenwerk

Wat betreft de overlappende vragen van het pilot- en reguliere examen waarin tevens WDA getoetst worden, is het de conclusie dat (a) pilotleerlingen meer alternatieve oplossingswegen volgen om een probleem op te lossen, (b) pilotleerlingen vaker een schets toevoegen om inzicht in het probleem te krijgen, (c) pilotleerlingen en reguliere leerlingen ongeveer even vaak een woordelijke conclusie opschrijven, ook als dat niet perse nodig is en (d) dat pilotleerlingen en reguliere leerlingen ongeveer evenveel fouten maken door gebrek aan parate voorkennis.

Wat betreft de nieuwe vragen in het pilotexamen waarin tevens WDA getoetst worden, is het de conclusie dat (a) pilotleerlingen regelmatig alternatieve oplossingswegen volgen om het probleem op te lossen, maar vaak vasthouden aan een ingeslagen oplossingsweg, (b) pilotleerlingen weinig moeite hebben met het vertalen tussen verschillende representaties in de wiskunde, (c) meerdere pilotleerlingen een vergelijking exact oplossen, waar het ook met de grafische rekenmachine mag en (d) dat de WDA vragen die betrekking hebben op een nieuw onderwerp minder goed gemaakt worden en dat dit sterk verschilt per klas.

Wat betreft de vragen in het reguliere examen, die niet in het pilotexamen zijn opgenomen en waarin tevens WDA getoetst worden, is het de conclusie dat leerlingen vragen in de Euclidische meetkunde oplossen door eerst zoveel mogelijk gegevens te bepalen en op te schrijven en vervolgens een oplossingsweg kiezen. Als een leerling vastloopt wordt een nieuwe oplossingsweg ingeslagen om het probleem toch op te lossen. Met WDA vragen die niet tot de Euclidische meetkunde behoren weten leerlingen minder goed raad, daarbij wordt vaak een onvolledige uitwerking opgeschreven.

Naar aanleiding van deze conclusies is de volgende opmerking te noemen. De vragen in het pilotexamen die betrekking hebben op de analytische meetkunde zijn slecht gemaakt door leerlingen. Hieruit is af te leiden dat de scores van leerlingen sterk van docenten afhangen. Naast goed ontwikkeld materiaal voor de behandeling van nieuwe onderwerpen, die passen bij de nieuwe curricula, is het ook belangrijk dat docenten bijgeschoold worden op het onderwijzen van deze nieuwe onderwerpen en op het onderwijzen van WDA. De manier waarop WDA goed een plek kan krijgen in wiskundelessen wordt onderzocht in het project *Wiskundige denkactiviteit in de praktijk3*.

Een kanttekening bij deze conclusies en opmerkingen is dat er één pilotschool niet mee heeft gewerkt aan de kwalitatieve analyse voor dit onderzoek. Deze school scoorde gemiddeld lager dan de andere pilotscholen en na tegenvallende resultaten heeft zij zich teruggetrokken van de pilot omtrent de nieuwe curricula. Wat betreft de reguliere scholen die mee hebben gewerkt met het kwalitatieve deel van dit onderzoek wijken sommige gemiddelde p-waarden voor vragen die WDA toetsen af van het landelijk gemiddelde. Doordat slechts drie reguliere scholen bezocht zijn voor dit onderzoek is voorzichtigheid geboden bij het generaliseren van getrokken conclusies.

Een tweede kanttekening is dat in deze kwalitatieve analyse uitsluitend gekeken is naar examenvragen die als WDA gecodeerd zijn. Vragen die niet als WDA zijn gecodeerd kunnen door leerlingen wel op een wiskundig denkactieve manier worden opgelost. In vervolgonderzoek kan het totale leerlingenwerk in kaart gebracht worden om ook deze mogelijk interessante gegevens op te nemen in het bepalen van het niveau van leerlingen met betrekking tot WDA.

Een derde kanttekening is dat in dit onderzoek uitsluitend het geschreven leerlingenwerk is onderzocht. Hierin is een belangrijk deel van het denken van leerlingen terug te zien, tegelijk geeft dit niet het volledige wiskundige denken van leerlingen weer. In vervolgonderzoek kan dit verder

3 Mogelijk gemaakt door het Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek, Projectnummer 405-14-502

onderzoek worden door leerlingen bijvoorbeeld hardop te laten denken bij het oplossen van een wiskundig denkactieve vraag.

In antwoord op de tweede onderzoeksvraag, of pilotleerlingen beter presteren dan reguliere leerlingen met betrekking tot WDA in examenvragen, is het volgende samenvattende antwoord te geven: Uit de kwantitatieve analyse van de leerlingenresultaten komen diverse verschillen naar voren die niet allemaal in dezelfde richting wijzen. Wat de overlappende vragen betreft waarin WDA getoetst worden, scoren de pilotleerlingen op de havo beter dan de reguliere leerlingen. Op het vwo is weinig verschil tussen pilotleerlingen en reguliere leerlingen op deze overlappende WDA vragen. Het totale gemiddelde van alle WDA vragen in de onderzochte examens ligt voor reguliere leerlingen juist hoger dan voor pilotleerlingen, zowel op het havo als op het vwo. Uit de kwalitatieve analyse van het leerlingenwerk komt naar voren dat pilotleerlingen iets meer WDA laten zien in hun antwoorden op de overlappende vragen. Wat de vragen betreft in het pilot- en reguliere examen die niet overlappen hangt de zichtbaarheid van WDA in het leerlingenwerk sterk af van het wiskundedomein waarbinnen de vraag te plaatsen is.

Referenties

Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (Eds.) (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives – Abridged edition*. New York: Longman.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Bergsma, S., Brouwers, A., van der Laan, E., Legierse, A.,Visser, T. (2006). *Het schriftelijk toetsen van denkvaardigheden.* Enschede: SLO nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling.

College voor Toetsen en Examens (2015). *Wiskunde B VWO. Syllabus Centraal Examen 2018 (bij het nieuwe examenprogramma).* Utrecht: CvTE.

Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (2007). *Rijk aan betekenis. Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*. Utrecht: cTWO.

Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (2012). *Lesmateriaal pilots*. http://www.fisme.science.uu.nl/ctwo/

Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (2013). *Denken en doen, wiskunde op havo en vwo per 2015*. Utrecht: cTWO.

Devlin, K. (2011). *Mathematics Education for a New Era: Video Games as a Medium for Learning*. Boca Raton, FLA: Taylor & Francis.

Doorman, M., Drijvers, P., Dekker, T., Van den Heuvel-Panhuizen, M., De Lange, J., & Wijers, M. (2007). Problem solving as a challenge for mathematics education in the Netherlands. *The International Journal on Mathematics Education 39(*5-6), 405-418.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1996). On different facets of mathematical thinking. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The Nature of Mathematical Thinking* (pp. 253-284). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Drijvers, P. (2012a). Wat bedoelen ze toch met... symbol sense? *Nieuwe wiskrant*, *Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 31*(3), 39-42.

Drijvers, P. (2012b). Wat bedoelen ze toch met… modelleren? *Nieuwe wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 31*(4), 34-37.

Drijvers, P. (2015a). Kernaspecten van wiskundig denken. *Euclides, 90*(5), 4-8.

Drijvers, P. (2015b). *Denken over wiskunde, onderwijs en ICT*. Oratie. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Drijvers, P., Van Streun, A., & Zwaneveld, B. (Red.) (2012), *Handboek Wiskundedidactiek*. Utrecht: Epsilon.

Ehrenfest-Afanassjewa, T. (1960). *Didactische opstellen wiskunde.* Zutphen: Thieme.

Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiental, and inquiry-based teaching. *Educational Psychologist, 41,* 75-86.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, *27*(1), 29-63.

Landis, J. R. and Koch, G. G. (1977). The measurement of observer agreement for categorical data. *Biometrics, 33,* 159-174.

Leikin, R., & Kawass, S. (2005). Planning teaching an unfamiliar mathematics problem: The role of teachers' experience in solving the problem and watching pupils solving it. *Journal of Mathematical Behaviour, 24,* 253–274.

Mason, J. (1989). Mathematical abstraction as the result of a delicate shift of attention. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 2-8.

Organisation for Economic Co-operation and Development (2009). PISA 2009 Mathematics framework In: *PISA 2009 Assessment Framework Key Competencies in Reading, Mathematics and Science.* Parijs: OECD Publishing

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton NJ: Princeton University Press.

Resnick, L. B. (1987). Higher order skills: a working definition and a historical perspective. In L. B. Resnick, *Education and learning to think.* Washington D.C.: The National Academy Press

Schoenfeld, A. H. (1985). Metacognitive and epistomological issues in mathematical understanding. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (p. 361-380). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1-36.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77*, 20-26

Spandaw, J., & Zwaneveld, B. (2012). Modelleren. In P. Drijvers, A. Van Streun, & B. Zwaneveld (Red.), *Handboek Wiskundedidactiek* (pp. 235-264). Utrecht: Epsilon.

Stodolsky, S. (1985). Telling math: Origins of math aversion and anxiety. *Educational psychologist, 20,* 125-133.

Tall, D. (1988). *The Nature of Advanced Mathematical Thinking. Discussion paper for the working group on advanced mathematical thinking.* PME-XII, Vezprém, Hungary.

Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E., & Simpson, A. (2000). What Is the Object of the Encapsulation of a Process? *Journal of mathematical behaviour, 18*(2), 223-241.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas project.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2013). Realistic Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education.* Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer.

Van der Kolk-den Heijer, T. (2014). Het effect van wiskundig onderzoek door leerlingen op de groei van hun probleemoplossend vermogen. *Tijdschrift voor Didactiek der β-wetenschappen, 31,* 51-74.

Van Streun, A. (2001). *Het denken bevorderen.* Oratie. Groningen: RUG.

Van Streun, A. (2014). *Onderwijzen en toetsen van Wiskundige Denkactiviteiten, implementatie examenprogramma's havo-vwo 2015.* Utrecht: SLO nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling.

Voogt, J. & Pareja Roblin, N. (2010). *21st century skills. Discussienota*. Enschede: Universiteit Twente.

Bijlagen

Bijlage 1: Model voor het coderen van examenvragen

In onderstaand model (Figuur 9) komen de belangrijkste punten uit de theorie naar voren met betrekking tot WDA in examens wiskunde B. Tegelijk biedt het concrete handvatten om te beoordelen of een examenvraag een vorm van WDA vraagt van de oplosser en welke vorm van WDA dat is. Ter verduidelijking zijn er voorbeelden van vragen toegevoegd.

Figuur 9: Kernaspecten van wiskundig denken weergegeven in een driehoek

Vragen die om een vorm van *productie* vragen van de leerlingen en een beroep doen op wiskundig denken kunnen binnen de driehoek geplaatst worden. Vragen die *reproductie* zijn voor de leerlingen vallen buiten deze driehoek, omdat er dan nauwelijks een beroep gedaan wordt op wiskundig denken.

Een vraag kan ook meerdere vormen van WDA bevatten. Bijvoorbeeld zowel *probleemoplossen (P)* als *modelleren als proces (Mp)*, dit wordt genoteerd als: P,Mp. Dit volgt uit het feit dat er een overlap is tussen probleemoplossen en modelleren en tussen probleemoplossen en abstraheren. Een examenvraag kan de volgende coderingen krijgen: P; Mp; Mo; Ap; Ao; P,Mp; P,Mo; P,Ap; P,Ao. Verschillende oplossingswegen bij een vraag kunnen verschillende vormen van WDA bevatten. De ene oplossingsweg is bijvoorbeeld een vorm van modelleren als proces, terwijl voor de andere oplossingsweg probleemoplossen nodig is. In dat geval wordt een vraag als volgt gecodeerd: Mp / P.

Hieronder wordt per vorm van WDA (probleemoplossen, modelleren en abstraheren) aangegeven wat er onder wordt verstaan en hoe deze vorm terug te zien is in examenvragen. Aansluitend worden een aantal voorbeelden van examenvragen gegeven, voor de verschillende vormen van WDA.

Probleemoplossen

Een vraag is voor een oplosser een probleem als deze niet onmiddellijk een oplossingsweg ziet. Voor het oplossen van het probleem kan de oplosser niet een bekend stappenplan volgen (reproductie), maar moet er een nieuwe oplossingsweg gecreëerd worden (productie). Hiertoe moet de oplosser, hetgene wat hij al kent en kan, flexibel kunnen inzetten en een probleem naar zijn hand kunnen zetten.

Bij een probleem kunnen meerdere oplossingswegenmogelijk zijn, die wezenlijk van elkaar verschillen. Een oplossingsweg kan uit meerdere denkstappen bestaan, waarbij de denkstappen op zichzelf gedeeltelijk reproductie kunnen zijn van bekende heuristieken. Het opstellen van een oplossingsstrategie door deze verschillende stappen te combineren vraagt om WDA. De oplossingsstrategie bestaat dan uit het opsplitsen van het probleem in reproductief oplosbare deelproblemen, die vervolgens eenvoudig opgelost kunnen worden.

Een belangrijke laatste stap in het proces van het oplossen van een probleem is het terugkijken. De gevonden oplossing moet naast het oorspronkelijke probleem worden gelegd, om te bepalen of het probleem daadwerkelijk is opgelost.

> Een vraag wordt gecodeerd als *Probleemoplossen* (P) als deze geen reproductievraag is voor de oplosser en er een oplossingsstrategie bepaald moet worden. Er kunnen meerdere oplossingswegen mogelijk zijn en een oplossingsweg bestaat mogelijk uit meerdere denkstappen.

Modelleren

Modelleren wordt hier opgesplitst in twee categorieën: Mp – M*odelleren als proces* en Mo – *Model als object*.

Mp – Modelleren als proces

Spandaw en Zwaneveld (2012) geven de verschillende aspecten van modelleren weer in een model, de modelleercyclus. Vanuit een situatie met een probleem wordt de vertaling naar een conceptueel model gemaakt (conceptualiseren), dit conceptuele model wordt vervolgens vertaald naar een wiskundig model (mathematiseren). Als de oplossing van het wiskundige model bepaald is, kan deze terugvertaald worden naar de oorspronkelijke situatie met het probleem (interpreteren). Het vertalen van een probleem in wiskundige termen en het terugvertalen van een gevonden oplossing naar het probleem in de geschetste context vatten we hier samen onder *modelleren als proces*. In een probleemsituatie of een set vragen naar aanleiding van een context behoeven niet alle aspecten van de modelleercyclus naar voren te komen (Van Streun, 2014), in examenvragen is dit zelfs meestal niet het geval.

> Een vraag is gecodeerd als *Modelleren als proces* (Mp) als een probleem vertaald moet worden naar wiskundige termen of de wiskundige resultaten terugvertaald moeten worden naar de probleemsituatie.

Mo – Model als object

Het model als object beschouwen en daarover redeneren komt niet specifiek in de eerder genoemde modelleercyclus naar voren, maar valt wel onder het begrip modelleren in onze definitie van WDA. Door een gegeven of gecreëerd model als object te beschouwen, kan er beredeneerd worden over de eigenschappen van dat model, kan een model worden aangepast en kunnen modellen onderling worden vergeleken.

Een vraag is gecodeerd als *Model als object* (Mo) als een model moet worden aangepast, wordt geanalyseerd op eigenschappen of wordt vergeleken met een ander model.

Abstraheren

Abstraheren wordt hier opgesplitst in twee categorieën: Ap – *Abstraheren als proces* en Ao – *Abstract object*.

Ap – Abstraheren als proces

Zoals cTWO (2007) schrijft in haar visiedocument gaat het bij abstraheren om het doorzien van onderliggende concepten in concrete situaties en omgekeerd, om het kunnen vertalen van abstracte noties naar concrete objecten en situaties. Bij abstraheren gaat het om het destilleren van overeenkomsten en verschillen in concrete probleemsituaties, die leiden tot de vorming van betekenisvolle wiskundige objecten (Drijvers, 2015). Omgekeerd gaat het ook om het toepassen van opgedane kennis in nieuwe concrete situaties. Deze processen vatten we hier samen onder *Abstraheren als proces*.

Een vraag is gecodeerd als *Abstraheren als proces* (Ap) als er uit een concrete situatie overeenkomsten en verschillen gedestilleerd moeten worden, die vervolgens leiden tot de vorming van betekenisvolle wiskundige objecten of omgekeerd, als opgedane kennis toegepast moet worden in nieuwe concrete situaties.

Ao – Abstract object

De betekenisvolle wiskundige objecten die gevormd worden door het abstraheren vanuit concrete probleemsituaties, zijn objecten met eigenschappen en relaties. cTWO (2007) beschrijft abstractie als het wezen en de kracht van wiskunde, wat het leren en begrijpen van wiskunde gemakkelijker maakt. Het denken over abstracte wiskundige objecten, eigenschappen daarvan en relaties daartussen is een vorm van WDA die hier als categorie onder abstraheren gebracht is. Het gaat hier om het redeneren op een hoger niveau over zaken en verbanden die nog steeds iets voor je betekenen (Drijvers, 2015). Het begrip symbol sense heeft hier alles mee te maken en legt een verbinding tussen wiskundige denkactiviteit en algebraïsche vaardigheid. Symbol sense verwijst naar die onderdelen van algebraïsche vaardigheid die de procedurele basisvaardigheden overstijgen en die te maken hebben met inzicht in de betekenis van algebra. Of, zoals Arcavi het zegt: "*Symbol sense is the algebraic component of a broader theme: sense-making in mathematics*" (Arcavi, 1994, p. 32).

Een vraag is gecodeerd als *Abstract object* (Ao) als er gedacht moet worden over wiskundige objecten, eigenschappen daarvan en relaties daartussen.

Hieronder volgen vier voorbeelden van de toepassing van het model op examenvragen.

Vb 2013-1 (pilot) vraag 11: Modelleren als proces (Mp)

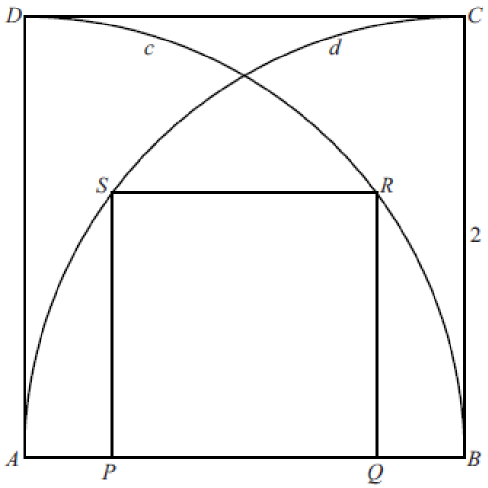
Rakende cirkel

Gegeven is het vierkant $ABCD$ met zijde 2. Zie figuur 1.
In dit vierkant zijn getekend:
- de kwartcirkel c met middelpunt A en eindpunten B en D;
- de kwartcirkel d met middelpunt B en eindpunten A en C;
- het vierkant $PQRS$ met P en Q op AB, R op c en S op d.

Er geldt: $PQ = \frac{6}{5}$

5p **11** Toon dit op algebraïsche wijze aan, bijvoorbeeld met behulp van driehoek AQR.

figuur 1



11 maximumscore 5

- Noem $PQ = x$. Dan geldt: ($AB = 2$ en $AP = QB$ dus) $AP = 1 - \frac{1}{2}x$ 1
- Hieruit volgt $AQ = 1 + \frac{1}{2}x$ 1
- De stelling van Pythagoras toepassen in driehoek AQR geeft $\left(1 + \frac{1}{2}x\right)^2 + x^2 = 2^2$ 1
- Dit geeft $5x^2 + 4x - 12 = 0$ 1
- Dan volgt $x = \frac{6}{5}$ ($x = -2$ vervalt) (en dus $PQ = \frac{6}{5}$) 1

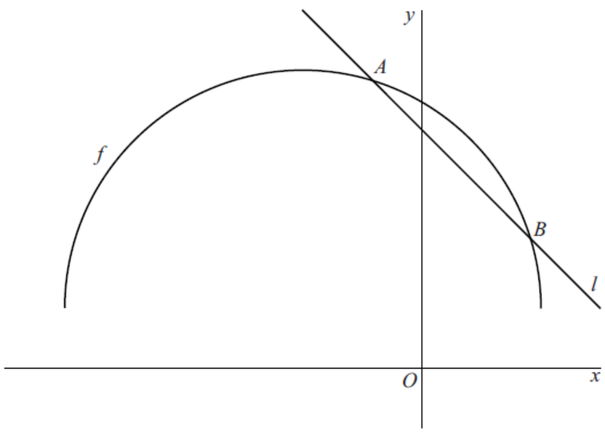
Het invoeren van de variabele x helpt om het meetkundige probleem om te schrijven naar een algebraïsch probleem (Mp). De oplossingsrichting is verder al gegeven, doordat er verwezen wordt naar driehoek *AQR*.

Hb 2013-1 (pilot) vraag 16: Probleemoplossen (P).

Een halve cirkel als grafiek

De functie f is gegeven door $f(x) = 1 + \sqrt{-x^2 - 4x + 12}$. Verder is de lijn l gegeven met vergelijking $y = -x + 4$. l snijdt de grafiek van f in de punten A en B. Zie de figuur.

figuur



5p **15** Bereken exact de x-coördinaten van A en B.

De grafiek van f is de helft van een cirkel.

5p **16** Bereken exact de coördinaten van het middelpunt en de straal van deze cirkel.

16 maximumscore 5

- De grafiek van f heeft als vergelijking $y = 1 + \sqrt{-x^2 - 4x + 12}$ 1
- Hieruit volgt $(y-1)^2 = -x^2 - 4x + 12$ 1
- Dit is te herleiden tot $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$ 1
- De coördinaten van het middelpunt zijn $(-2, 1)$ 1
- De straal is 4 1

of

- Voor de x-coördinaten van de randpunten van de grafiek geldt $-x^2 - 4x + 12 = 0$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking exact opgelost kan worden 1
- $x = -6$ of $x = 2$ 1
- (De grafiek van f is de helft van een cirkel, dus) de straal is $\frac{2 - -6}{2} = 4$ 1
- Het middelpunt heeft x-coördinaat $\frac{-6+2}{2} = -2$ en y-coördinaat ($f(-6) = $ (of $f(2) =$)) 1 1

Het is niet meteen duidelijk hoe het probleem opgelost moet worden en er zijn meerdere oplossingswegen mogelijk, de oplossingsweg moet door de leerling zelf gecreëerd worden (P). In het correctievoorschrift worden twee mogelijke oplossingswegen aangedragen, die wezenlijk verschillend zijn.

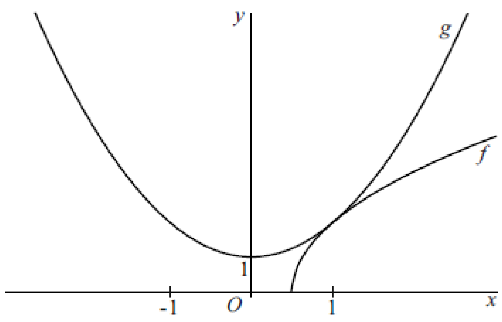
Oplossingsweg 1: het gegeven functievoorschrift moet omgeschreven worden naar een representatie van een cirkel, het bedenken en uitvoeren hiervan vraagt om een aantal denkstappen (P). Vervolgens moet de juiste conclusie getrokken worden over het middelpunt en de straal van de cirkel.
Oplossingsweg 2: door de randpunten van de grafiek te bepalen, kan de diameter van de cirkel berekend worden, dit is een belangrijke denkstap in de oplossingsweg. Vervolgens kan de straal van de cirkel en het middelpunt bepaald worden.

Hb 2013 (pilot) vraag 4: Geen WDA.

Wortel en parabool

De functies f en g zijn gegeven door $f(x)=\sqrt{8x-4}$ en $g(x)=x^2+1$.
In figuur 1 zijn de grafieken van f en g weergegeven.

figuur 1



De grafieken van f en g hebben het punt $(1, 2)$ gemeenschappelijk.

4p **4** Toon op algebraïsche wijze aan dat in dit punt de hellingen van de grafieken van f en g gelijk zijn.

4 maximumscore 4

• $f'(x)=\dfrac{8}{2\sqrt{8x-4}}$ (of een vergelijkbare vorm)	2
• $g'(x)=2x$	1
• Invullen van $x=1$ in de afgeleiden geeft $f'(1)=g'(1)=2$ (dus zijn in dit punt de hellingen van de grafieken van f en g gelijk)	1

Opmerking
Als een kandidaat bij het differentiëren de kettingregel niet of niet correct toepast, voor deze vraag maximaal 2 scorepunten toekennen.

Bij het opstellen van deze vraag zijn de vragen 4 en 5 uit het reguliere examen samengevoegd. Hierdoor is de vraag complexer. Hoewel een aantal stappen gemaakt moeten worden, is deze vraag geen WDA voor de leerlingen. De stappen die gemaakt moeten worden zijn reproductie voor de leerlingen en de oplossingsrichting wordt aangedragen.

Vb 2013-1 (pilot) vraag 9: Probleemoplossen (P) / Abstract object (Ao)

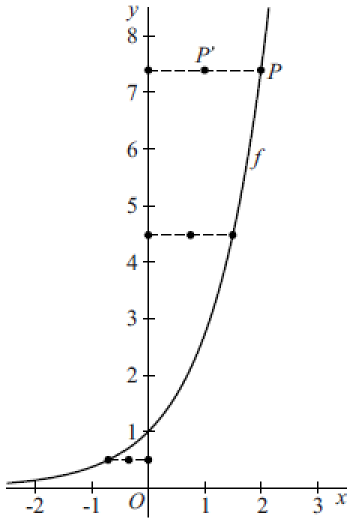
Halverwege

De functie f is gegeven door $f(x) = e^x$.

Bij elk punt P van de grafiek van f wordt het punt P' bepaald dat het midden is van P en de loodrechte projectie van P op de y-as.
Zie figuur 1.
De punten P' vormen de grafiek van een functie g die is gegeven door $g(x) = a^x$ voor zekere waarde van a.

4p 9 Bereken exact deze waarde van a.

figuur 1



9 **maximumscore 4**

- Noem de x-coördinaat van P' p, dan is de x-coördinaat van P $2p$ — 1
- De y-coördinaten van P' en P zijn gelijk, ofwel $g(p) = f(2p)$ — 1
- Dit geeft $g(p) = e^{2p}$ — 1
- Dus (omdat $e^{2p} = (e^2)^p$) $a = e^2$ — 1

of

- De grafiek van g is het beeld van de grafiek van f na vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{2}$ — 2
- Dus $g(x) = e^{2x}$ — 1
- Dus (omdat $e^{2x} = (e^2)^x$) $a = e^2$ — 1

Er zijn twee wezenlijk verschillende oplossingswegen, waarin verschillende vormen van WDA naar voren komen.
Oplossingsweg 1: Door verschillende gegevens te combineren en punten uit te drukken in gelijknamige coördinaten, kan een oplossingsstrategie gecreëerd worden (P).
Oplossingsweg 2: Door kennis en begrip van de grafiek die past bij het functievoorschrift, kan beredeneerd worden wat het functievoorschrift van de functie *g(x)* moet zijn; hiervoor moet kennis van de functie en de grafiek flexibel worden ingezet (Ao).

Bijlage 2: WDA vragen uit pilot- en regulier examen vwo wiskunde B 2014-1

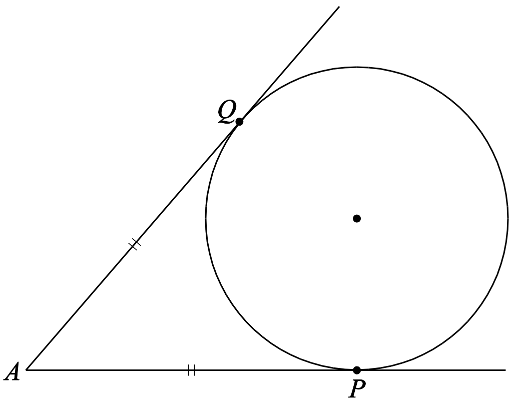
Pilotexamen vwo 2014-1- opgaven

Hieronder zijn alleen de vragen opgenomen die als WDA gecodeerd zijn.

Cirkels in een driehoek

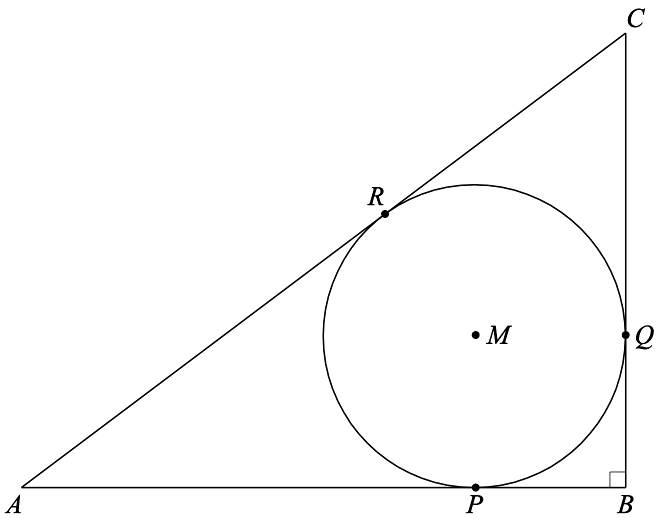
Als vanuit een punt A buiten een cirkel de twee raaklijnen aan die cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van A tot de twee raakpunten P en Q even groot. In figuur 1 geldt dus $AP = AQ$.
Deze eigenschap mag je in deze opgave gebruiken.

figuur 1



Gegeven is een rechthoekige driehoek ABC met rechthoekszijden $AB = 4$ en $BC = 3$.
De ingeschreven cirkel van driehoek ABC raakt de zijden van de driehoek in P, Q en R. M is het middelpunt van deze cirkel.
Zie figuur 2.

figuur 2

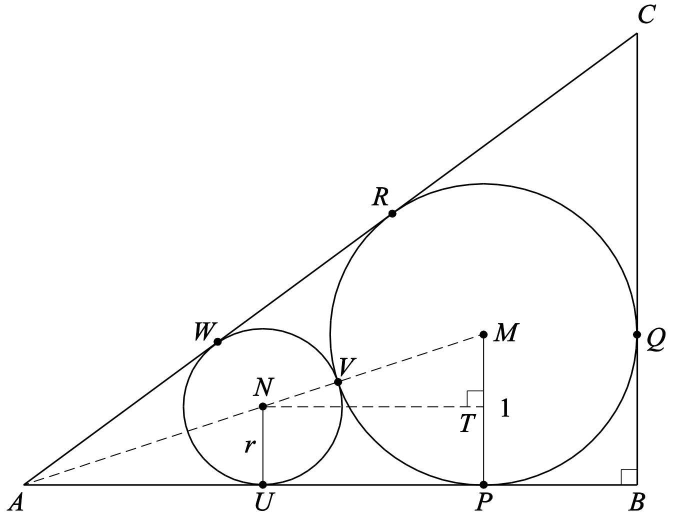


De straal van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC is 1.

4p **3** Bewijs dit.

Tussen de ingeschreven cirkel en de zijden AB en AC van de driehoek wordt een tweede cirkel met middelpunt N getekend. Deze tweede cirkel raakt de zijde AB in U, de ingeschreven cirkel in V en de zijde AC in W. De punten M, N en A liggen dus op één lijn. De straal NU van de tweede cirkel is r. De loodrechte projectie van N op MP is T. Zie figuur 3.

figuur 3



Er geldt: $AU = 3r$.

3p **4** Bewijs dit.

5p **5** Bereken r. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Gebroken goniometrische functie

Voor elke waarde van a, met $a \neq 0$, is de functie f_a gegeven door:

$$f_a(x) = \frac{\sin(ax)}{1 - 2\cos(ax)}$$

4p **6** Bereken exact voor welke waarden van a de lijn met vergelijking $x = \pi$ een verticale asymptoot is van de grafiek van f_a.

Boven en onder de lijn door de buigpunten

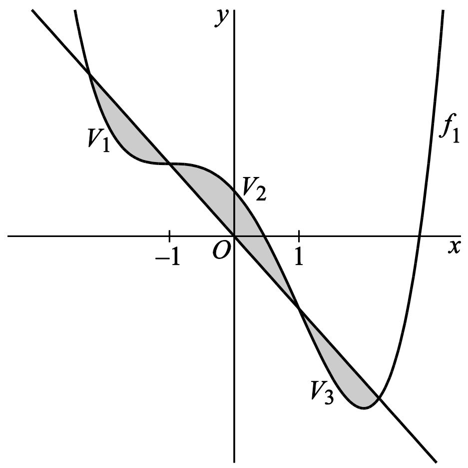
Voor elke waarde van *p* met $p \neq 0$ is een functie f_p gegeven waarbij voor de tweede afgeleide geldt: $f_p''(x) = 12(x-p)(x+p)$

Er geldt: $f_p(x) = x^4 - 6p^2x^2 + ax + b$ met *a* en *b* constanten.

4p **8** Toon dit aan met primitiveren.

Voor $a = -8$ en $b = 5$ wordt f_1 gegeven door $f_1(x) = x^4 - 6x^2 - 8x + 5$.
In de figuur zie je de grafiek van f_1. Deze grafiek heeft buigpunten voor $x = -1$ en $x = 1$. De lijn door deze buigpunten heeft vergelijking $y = -8x$.
Deze lijn en de grafiek van f_1 begrenzen drie vlakdelen V_1, V_2 en V_3 die om en om onder en boven de lijn liggen.

figuur



De lijn met vergelijking $y = -8x$ snijdt de grafiek van f_1 niet alleen in de twee buigpunten, maar ook in twee andere punten.

4p **9** Bereken exact de *x*-coördinaten van de twee andere snijpunten.

De vlakdelen V_1 en V_3 hebben gelijke oppervlakte, namelijk $3\frac{1}{5}$.

4p **10** Bewijs dat de gezamenlijke oppervlakte van V_1 en V_3 gelijk is aan de oppervlakte van V_2.

Vierkant op een driehoek

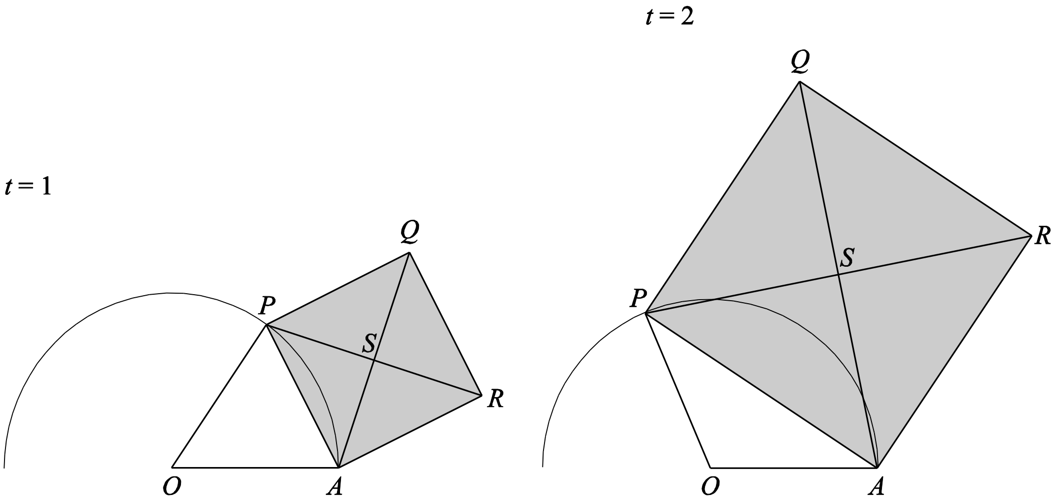
Gegeven zijn de punten $O(0, 0)$ en $A(2, 0)$.

Punt P beweegt over de halve cirkel met middelpunt O en straal 2 volgens de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\sin t \end{cases} \quad \text{met } 0 < t < \pi$$

Tegen de zijde AP van driehoek OAP ligt een vierkant $ARQP$. Dit vierkant ligt buiten driehoek OAP. Punt S is het snijpunt van de diagonalen van vierkant $ARQP$. In figuur 1 is de situatie op de tijdstippen $t = 1$ en $t = 2$ weergegeven.

figuur 1



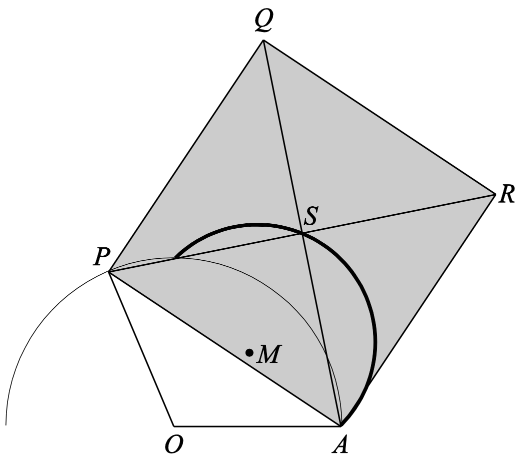
Er geldt: $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 + \cos t + \sin t \\ 1 - \cos t + \sin t \end{pmatrix}$

4p **11** Bewijs dit.

In figuur 2 is een deel getekend van de baan waarover S beweegt tijdens de beweging van punt P. Figuur 2 doet vermoeden dat de baan van S een cirkel is met middelpunt $M(1, 1)$.

4p **12** Bewijs dat de afstand van S tot het punt $M(1, 1)$ constant is.

figuur 2



Gespiegelde raaklijnen

Een lijn met vergelijking $ax + y = b$, met $a > 0$, wordt gespiegeld in de lijn met vergelijking $y = x$.

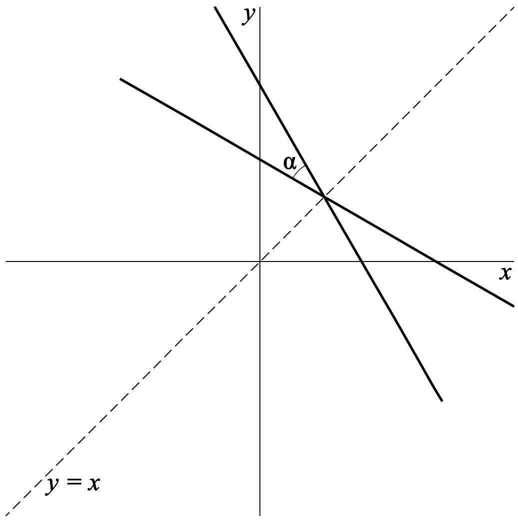
In figuur 1 zijn voor zekere waarden van a en b de lijn en zijn spiegelbeeld getekend.

De hoek tussen de twee lijnen is α.

Er geldt:

$$\cos\alpha = \frac{2a}{a^2 + 1}$$

figuur 1



4p **13** Bewijs dit.

Gegeven zijn de parabool p met vergelijking $x^2 = \frac{1}{2}y$ en de parabool q met vergelijking $y^2 = \frac{1}{2}x$.

p en q zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn met vergelijking $y = x$.

Op p ligt een punt P met een negatieve x-coördinaat.

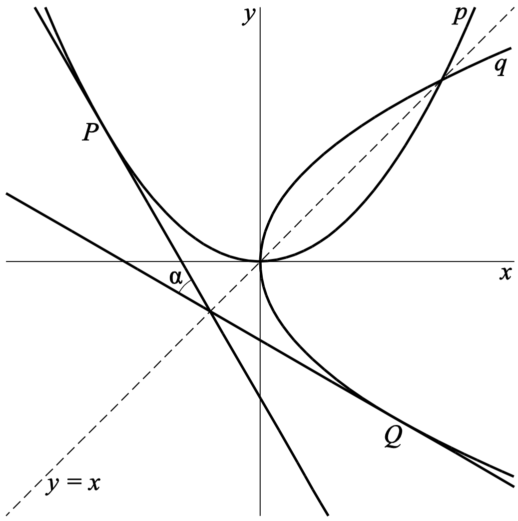
De raaklijn in P aan p wordt gespiegeld in de lijn met vergelijking $y = x$.

Dit spiegelbeeld raakt q in het punt Q.

De hoek tussen de twee raaklijnen is α.

In figuur 2 is een mogelijke situatie getekend.

figuur 2



Er zijn twee gevallen waarin de hoek tussen de twee raaklijnen gelijk is aan 30º.

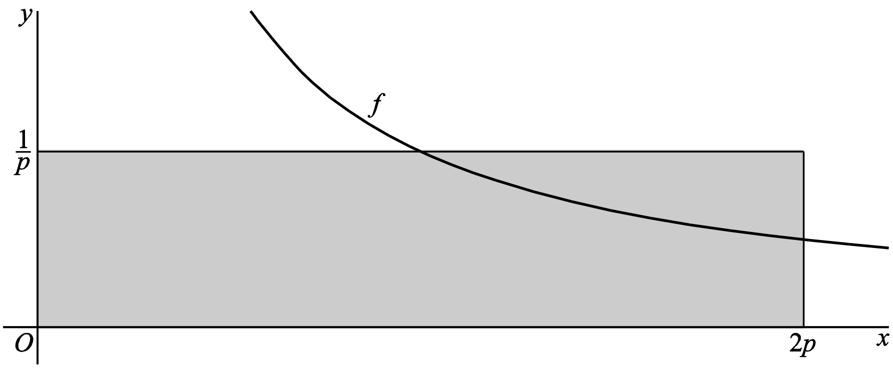
6p **14** Bereken exact de x-coördinaat van P in elk van deze gevallen.

Grafiek verdeelt rechthoek

Voor $x > 0$ is de functie *f* gegeven door $f(x) = \frac{1}{x}$.

In onderstaande figuur is voor $p > 0$ een rechthoek getekend die wordt begrensd door de lijnen met vergelijkingen $x = 2p$ en $y = \frac{1}{p}$, de *x*-as en de *y*-as.

figuur



Voor elke positieve waarde van *p* verdeelt de grafiek van *f* de rechthoek in twee stukken.

7p **15** Bewijs met behulp van integreren dat de oppervlakte van elk van deze stukken onafhankelijk is van de waarde van *p*.

Pilotexamen vwo 2014-1- correctievoorschrift

Hieronder zijn alleen de uitwerkingen van de vragen opgenomen die als WDA gecodeerd zijn.

Cirkels in een driehoek

3 maximumscore 4

- (Uit de stelling van Pythagoras of met 3-4-5 driehoek volgt) $AC = 5$ 1
- Noem de straal van de cirkel x, dan $BP = BQ = x$ 1
- $AR = AP = 4 - x$ en $CR = CQ = 3 - x$ 1
- ($AC = AR + CR$, dus) $(4 - x) + (3 - x) = 5$ geeft $x = 1$ 1

▪ of

- (Uit de stelling van Pythagoras of met 3-4-5 driehoek volgt) $AC = 5$ 1
- oppervlakte(ΔABC) = oppervlakte(ΔABM) + oppervlakte(ΔBCM) + oppervlakte(ΔCAM) 1
- Dit geeft $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot x + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot x + \frac{1}{2} \cdot CA \cdot x$ 1
- $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot x$ geeft $x = 1$ 1

4 maximumscore 3

- ($\Delta AUN \sim \Delta APM$, dus) $\frac{AU}{AP} = \frac{UN}{PM}$ (of $\frac{AU}{UN} = \frac{AP}{PM}$) 1
- $AP = AB - PB = 4 - 1 = 3$ 1
- $\frac{AU}{3} = \frac{r}{1}$ geeft $AU = 3r$ 1

▪ of

- ($\Delta AUN \sim \Delta NTM$, dus) $\frac{AU}{NT} = \frac{UN}{TM}$ 1
- $\frac{AU}{3 - AU} = \frac{r}{1 - r}$ 1
- De herleiding tot $AU = 3r$ 1

▪ *Opmerking*

▪ *De hierboven genoemde gelijkvormigheden hoeven niet te worden aangetoond.*

5 maximumscore 5

- $NT = UP = AB - AU - PB = 4 - 3r - 1 = 3 - 3r$ 1
- De stelling van Pythagoras in driehoek NTM toepassen geeft $(3 - 3r)^2 + (1 - r)^2 = (1 + r)^2$ (met $0 < r < 1$) 2
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden 1
- Het antwoord: $r \approx 0,52$ 1

Gebroken goniometrische functie

6 maximumscore 4

- Er moet gelden: $1-2\cos(a\pi)=0$, dus $\cos(a\pi)=\frac{1}{2}$ 1
- Dit geeft $a\pi=\frac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi$ of $a\pi=-\frac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi$ (met k geheel) 1
- Dus $a=\frac{1}{3}+k\cdot 2$ of $a=-\frac{1}{3}+k\cdot 2$ (met k geheel) 1
- Voor deze waarden van a geldt $\sin(a\pi)\neq 0$ (, dus voor deze waarden van a is de lijn met vergelijking $x=\pi$ een verticale asymptoot van de grafiek van f_a) 1

▪

▪ *Opmerking*

▪ *Als alleen de oplossingen $\frac{1}{3}$ en $-\frac{1}{3}$ gevonden zijn, voor deze vraag maximaal 2 scorepunten toekennen.*

Boven en onder de lijn door de buigpunten

10 maximumscore 4

- De oppervlakte van V_2 is gelijk aan $\int_{-1}^{1}\left((x^4-6x^2-8x+5)-(-8x)\right)\mathrm{d}x$, dus aan $\int_{-1}^{1}(x^4-6x^2+5)\,\mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van x^4-6x^2+5 is $\frac{1}{5}x^5-2x^3+5x$ 1
- $\left[\frac{1}{5}x^5-2x^3+5x\right]_{-1}^{1}=6\frac{2}{5}$ 1
- $6\frac{2}{5}=3\frac{1}{5}+3\frac{1}{5}$ (dus de gezamenlijke oppervlakte van V_1 en V_3 is gelijk aan de oppervlakte van V_2) 1

▪ of

- Omdat zowel V_1 als V_3 onder de lijn met vergelijking $y=-8x$ ligt en V_2 erboven, is de bewering juist indien geldt: $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\left((x^4-6x^2-8x+5)-(-8x)\right)\mathrm{d}x=0$, dus $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}(x^4-6x^2+5)\,\mathrm{d}x=0$ 2
- Een primitieve van x^4-6x^2+5 is $\frac{1}{5}x^5-2x^3+5x$ 1
- $\left[\frac{1}{5}x^5-2x^3+5x\right]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}=0$ (dus de gezamenlijke oppervlakte van V_1 en V_3 is gelijk aan de oppervlakte van V_2) 1

Vierkant op een driehoek

11 maximumscore 4

- $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR})$ 1
- $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t - 2 \\ 2\sin t \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{AR}$ is het beeld van $\overrightarrow{AP}$ bij een rotatie over $-90°$, dus $\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2 - 2\cos t \end{pmatrix}$ 1
- Dus $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2\cos t - 2 \\ 2\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2 - 2\cos t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 + \cos t + \sin t \\ 1 - \cos t + \sin t \end{pmatrix}$ 1

▪ of

- $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AR}$ 2
- $\overrightarrow{AR}$ is het beeld van $\overrightarrow{AP}$ bij een rotatie over $-90°$, dus $\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2 - 2\cos t \end{pmatrix}$ 1
- Dus $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2 - 2\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \cos t + \sin t \\ 1 - \cos t + \sin t \end{pmatrix}$ 1

▪

12 maximumscore 4

- $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 1 + \cos t + \sin t \\ 1 - \cos t + \sin t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ -\cos t + \sin t \end{pmatrix}$ 1
- $\left|\overrightarrow{MS}\right| = \sqrt{(\cos t + \sin t)^2 + (-\cos t + \sin t)^2}$ 1
- Herleiden tot $\left|\overrightarrow{MS}\right| = \sqrt{2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}$ 1
- Dus $\left|\overrightarrow{MS}\right| = \sqrt{2}$ (dus de afstand van S tot M is constant) 1

▪ of

- S moet dan liggen op een cirkel met middelpunt $M(1, 1)$ en straal r; deze heeft vergelijking $(x-1)^2 + (y-1)^2 = r^2$ 1
- Substitutie van de coördinaten van punt S geeft $(x-1)^2 + (y-1)^2 = (\cos t + \sin t)^2 + (-\cos t + \sin t)^2$ 1
- Herleiden tot $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 1
- Dus S ligt op een cirkel met middelpunt $M(1, 1)$ en straal $\sqrt{2}$ (en dus is de afstand van S tot M constant) 1

Gespiegelde raaklijnen

13 maximumscore 4

- Een vergelijking van het spiegelbeeld van de raaklijn is $ay + x = b$ 1
- Er geldt: $\cos\alpha = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}\right|}$ 1
- Dit geeft $\cos\alpha = \dfrac{|2a|}{a^2+1}$ 1
- Omdat $a > 0$ geldt $\cos\alpha = \dfrac{2a}{a^2+1}$ 1

▪

14 maximumscore 6

- $\dfrac{2a}{a^2+1} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ 1
- Dit geeft $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot a^2 - 2a + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$ 1
- Deze vergelijking exact oplossen geeft $a = \sqrt{3}$ of $a = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ 2
- $y = 2x^2$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = 4x$ 1
- $4x = -a$, dus $x = -\frac{1}{4}\sqrt{3}$ of $x = -\frac{1}{12}\sqrt{3}$ 1

Grafiek verdeelt rechthoek

▪

15 **maximumscore 7**

- De grafiek van *f* en de lijn met vergelijking $y = \frac{1}{p}$ snijden elkaar voor $x = p$ 1
- De oppervlakte van het stuk onder de grafiek is $1 + \int_{p}^{2p} \frac{1}{x}\,dx$ 1
- Een primitieve van $\frac{1}{x}$ is $\ln x$ 1
- De oppervlakte van het stuk onder de grafiek is $1 + \ln(2p) - \ln p$ 1
- $1 + \ln(2p) - \ln p = 1 + \ln 2 + \ln p - \ln p = 1 + \ln 2$
  (of: $1 + \ln(2p) - \ln p\ (= 1 + \ln\left(\frac{2p}{p}\right)) = 1 + \ln 2$) 1
- De oppervlakte van de rechthoek is $2p \cdot \frac{1}{p} = 2$ 1
- De oppervlakte van het stuk boven de grafiek is $1 - \ln 2$ (, dus de oppervlakte van elk van beide stukken is onafhankelijk van de waarde van *p*) 1

▪ of

- De grafiek van *f* en de lijn met vergelijking $y = \frac{1}{p}$ snijden elkaar voor $x = p$ 1
- De oppervlakte van het stuk boven de grafiek is $\int_{p}^{2p} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{x}\right) dx$ 1
- Een primitieve van $\frac{1}{p} - \frac{1}{x}$ is $\frac{1}{p}x - \ln x$ 1
- De oppervlakte van het stuk boven de grafiek is $1 - \ln(2p) + \ln p$ 1
- $1 - \ln(2p) + \ln p = 1 - \ln 2 - \ln p + \ln p = 1 - \ln 2$
  (of: $1 - \ln(2p) + \ln p\ (= 1 - \ln\left(\frac{2p}{p}\right)) = 1 - \ln 2$) 1
- De oppervlakte van de rechthoek is $2p \cdot \frac{1}{p} = 2$ 1
- De oppervlakte van het stuk onder de grafiek is $1 + \ln 2$ (, dus de oppervlakte van elk van beide stukken is onafhankelijk van de waarde van *p*) 1

▪

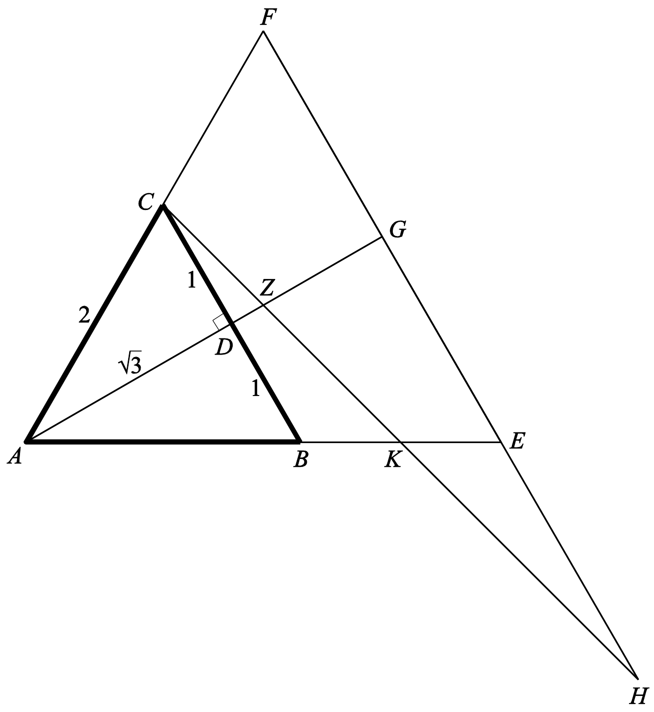
Regulier examen vwo 2014-1- opgaven

Hieronder zijn alleen de vragen opgenomen die als WDA gecodeerd zijn en buiten de overlap met het pilotexamen vallen.

Even lang

Gegeven is een gelijkzijdige driehoek *ABC* met zijden van lengte 2.
In driehoek *ABC* is *AD* hoogtelijn én zwaartelijn.
Daarom geldt: $BD = CD = 1$ en $AD = \sqrt{3}$
Ook is gegeven de gelijkzijdige driehoek *AEF* met zijden van lengte $2\sqrt{3}$, waarbij *E* en *F* op het verlengde van respectievelijk *AB* en *AC* liggen.
Lijn *AD* snijdt *EF* in *G*. *Z* is het zwaartepunt van driehoek *AEF*.
De lijn door *C* en *Z* snijdt *AE* in *K* en het verlengde van *FE* in *H*.
Zie onderstaande figuur. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur



De driehoeken *CDZ* en *HGZ* zijn gelijkvormig.

4p **10** Bewijs dit. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.

De lengte van *DZ* is $2 - \sqrt{3}$.

3p **11** Toon dit met een exacte berekening aan.

5p **12** Bewijs dat *EH* even lang is als *AB*. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.

Gemeenschappelijk met de x-as

Voor elke waarde van a met $a \neq 0$ is de functie f_a gegeven door $f_a(x) = 2\sin(ax) + \sin(2ax)$.

Het punt $(\frac{\pi}{a}, 0)$ is een gemeenschappelijk punt van de grafiek van f_a en de x-as.

4p **13** Bewijs dat voor elke waarde van a (met $a \neq 0$) de grafiek van f_a de x-as in $(\frac{\pi}{a}, 0)$ raakt.

Koordenvierhoek

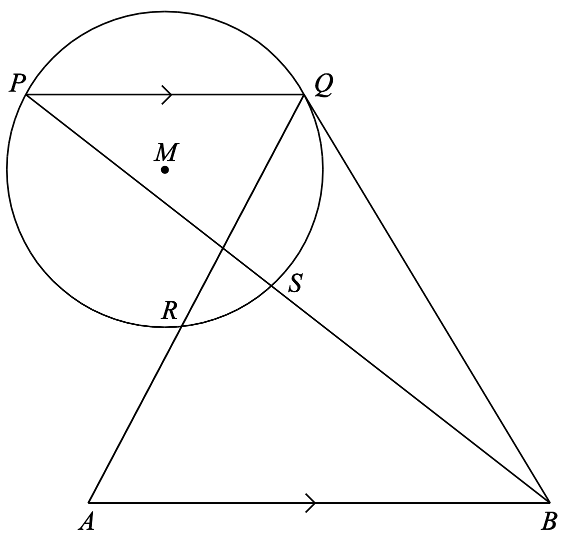
Gegeven zijn een cirkel met middelpunt *M* en een lijnstuk *AB* buiten de cirkel. De lijn door *A* en *B* snijdt de cirkel niet.

Punten *P* en *Q* worden zodanig op de cirkel gekozen dat aan de volgende voorwaarden is voldaan:

- koorde *PQ* is evenwijdig aan lijnstuk *AB*;
- lijnstuk *AQ* snijdt de cirkel in *R*;
- lijnstuk *BP* snijdt de cirkel in *S*;
- *AQ* snijdt *BP* binnen de cirkel.

Zie de figuur hieronder.

figuur



5p **18** Bewijs dat *ABSR* een koordenvierhoek is. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.

Regulier examen vwo 2014-1- correctievoorschrift

Hieronder zijn alleen de uitwerkingen van de vragen opgenomen die als WDA gecodeerd zijn en buiten de overlap met het pilotexamen vallen.

Even lang

10 maximumscore 4

- $\angle CZD = \angle HZG$; *overstaande hoeken* — 1
- $\angle ACB = \angle AFE = 60°$, dus $BC // HF$ (*gelijkzijdige driehoek, F-hoeken*) — 1
- Hieruit volgt $\angle DCZ = \angle GHZ$; *Z-hoeken* — 1
- Dus zijn de driehoeken CDZ en HGZ gelijkvormig; *hh* — 1

▪ of

- $\Delta ADB \cong \Delta ADC$; *ZZZ* (of *ZZR*, of *ZHZ*), dus $\angle EAG = \angle FAG$ — 1
- Dus $\angle AGE = 180° - \angle EAG - \angle AEG = 180° - 30° - 60° = 90°$; *hoekensom driehoek,* (*gelijkzijdige driehoek*) — 1
- $\angle CZD = \angle HZG$; *overstaande hoeken* — 1
- (Uit $\angle CDZ = \angle HGZ$ $(= 90°)$ en $\angle CZD = \angle HZG$ volgt:) de driehoeken CDZ en HGZ zijn gelijkvormig; *hh* — 1

11 maximumscore 3

- $AG = \sqrt{3} \cdot AD = 3$ — 1
- Dus $AZ = \frac{2}{3} \cdot AG = 2$ (*zwaartelijnen driehoek*) — 1
- $DZ = AZ - AD = 2 - \sqrt{3}$ — 1

12 **maximumscore 5**

- Uit de genoemde gelijkvormigheid volgt $\frac{GH}{ZG} = \frac{CD}{ZD}$ — 1
- Met $ZG = 3 - 2 = 1$ geeft dit $\frac{GH}{1} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ — 1
- $EH = GH - EG = \frac{1}{2-\sqrt{3}} - \sqrt{3}$ — 1
- $EH = \frac{1 - 2\sqrt{3} + 3}{2-\sqrt{3}} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{2-\sqrt{3}} = 2$ (dus EH is even lang als AB) — 2

▪ of

- Uit de genoemde gelijkvormigheid volgt $\frac{GH}{ZG} = \frac{CD}{ZD}$ — 1
- Met $ZG = 3 - 2 = 1$ geeft dit $\frac{GH}{1} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ — 1
- $GH = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$ — 2
- $EH = GH - EG = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 2$ (dus EH is even lang als AB)

Gemeenschappelijk met de x-as

13 **maximumscore 4**

- $f_a'(x) = 2a\cos(ax) + 2a\cos(2ax)$ 2
- De grafiek van f_a raakt de x-as in het punt $(\frac{\pi}{a}, 0)$ als $f_a'\left(\frac{\pi}{a}\right) = 0$ 1
- $f_a'\left(\frac{\pi}{a}\right) = 2a\cos\pi + 2a\cos(2\pi) = 0$ (dus de grafiek van f_a raakt de x-as in het punt $(\frac{\pi}{a}, 0)$) 1

Opmerking
Als voor a een waarde is ingevuld, voor deze vraag geen scorepunten toekennen.

Koordenvierhoek

18 **maximumscore 5**

- $\angle PQR = \angle PSR$; *constante hoek* 1
- $\angle PQR = \angle BAR$; *Z-hoeken* 1
- $\angle RSB = 180^\circ - \angle PSR$; *gestrekte hoek* 1
- Uit het voorgaande volgt: $\angle RAB + \angle RSB = 180^\circ$ 1
- Dus vierhoek *ABSR* is een koordenvierhoek (*koordenvierhoek*) 1

Bijlage 3: overzicht van WDA in examenvragen

Tabel 24

Overzicht van WDA in examenvragen. Examen vwo wiskunde B 2012-1; pilot en regulier

Overlap (O), Aangepast (A), Nieuw (N) of Regulier (R)	Vraag in pilotexamen	Vraag in regulier examen	Vorm van WDA
N	1		P
R		1	-
A	2		P
A		2	P
O	3	3	-
A	4		P
A		4	-
O	5	5	-
N	6		P
N	7		P
O	8	8	-
O	9	9	P
A	10		P, Mp *
A		10	P
N	11		P
N	12		P, Ao *
O	13	13	-
O	14	14	-
O	15	15	-
R		6	P
R		7	P
R		11	-
R		12	-
R		16	P
R		17	P

* Beide vormen van WDA worden in de vraag getoetst

Tabel 25
Overzicht van WDA in examenvragen.
Examen vwo wiskunde B 2013-1; pilot en regulier

Overlap (O), Aangepast (A), Nieuw (N) of Regulier (R)	Vraag in pilotexamen	Vraag in regulier examen	Vorm van WDA
O	1	1	-
O	2	2	Ao
O	3	3	-
O	4	4	-
O	5	5	-
A	6		P
A		6	-
A	7	7	-
O	8	8	-
N	9		P / Ao *
N	10		Ao
N	11		Mp
N	12		P
O	13	11	-
O	14	12	-
N	15		Ao
R		13	P
O	16	14	P
N	17		P
R		9	P
R		10	-
R		15	-
R		16	Ao
R		17	-
R		18	-
R		19	P

* In de verschillende oplossingswegen zijn verschillende vormen van WDA van toepassing.

Tabel 26

Overzicht van WDA in examenvragen.
Examen vwo wiskunde B 2014-1; pilot en regulier

Overlap (O), Aangepast (A), Nieuw (N) of Regulier (R)	Vraag in pilotexamen	Vraag in regulier examen	Vorm van WDA
O	1	1	-
O	2	2	-
N	3		Mp, P *
N	4		P
N	5		P
N	6		P, Ao *
R		13	P, Ao *
A	7	14	-
O	8	3	-
O	9	4	-
O	10	5	- / P**
N	11		P
N	12		P / Mp **
N	13		P
N	14		P
O	15	6	P
N	16		-
R		7	-
O	17	8	-
O	18	9	-
R		10	-
R		11	P
R		12	-
R		15	-
R		16	-
R		17	-
R		18	P

* Beide vormen van WDA worden in de vraag getoetst

** In de verschillende oplossingswegen zijn verschillende vormen van WDA van toepassing.

Tabel 27
Overzicht van WDA in examenvragen.
Examen vwo wiskunde B 2015-1; pilot en regulier

Overlap (O), Aangepast (A), Nieuw (N) of Regulier (R)	Vraag in pilotexamen	Vraag in regulier examen	Vorm van WDA
O	1	1	-
N	2		P
O	3	2	-
O	4	3	P
N	5		Mp
N	6		-
N	7		P
N	8		P
N	9		-
N	10		-
O	11	12	-
O	12	13	-
O	13	14	P
O	14	15	-
N	15		-
N	16		-
R		4	-
R		5	-
R		6	-
R		7	-
R		8	P
R		9	P
R		10	-
R		11	-
R		16	P
R		17	P

Tabel 28

Overzicht van WDA in examenvragen.

Examen havo wiskunde B 2011-1; pilot en regulier

Overlap (O), Aangepast (A), Nieuw (N) of Regulier (R)	Vraag in pilotexamen	Vraag in regulier examen	Vorm van WDA
O	1	1	-
O	2	2	-
O	3	3	Mp
N	4		Ap
A	5	4	-
N	6		-
N	7		P
N	8		P
O	9	5	-
O	10	6	-
O	11	10	-
A	12		P
A		11	-
O	13	12	-
N	14		-
R		13	-
R		14	-
A	15	15	-
N	16		P
R		16	-
R		17	-
O	17	18	Ao
O	18	19	Ao
N	19		-
R		7	-
R		8	-
R		9	-

Tabel 29
Overzicht van WDA in examenvragen.
Examen havo wiskunde B 2012-1; pilot en regulier

Overlap (O), Aangepast (A), Nieuw (N) of Regulier (R)	Vraag in pilotexamen	Vraag in regulier examen	Vorm van WDA
O	1	1	-
O	2	2	-
A	3		-
R		3	-
R		4	-
O	4	10	-
A	5		P
A		11	-
O	6	12	-
N	7		-
N	8		P
N	9		-
N	10		-
N	11		-
A	12	16	-
N	13		P
R		17	-
O	14	7	P
O	15	8	-
O	16	9	-
N	17		-
N	18		-
N	19		P
R		5	-
R		6	-
R		13	-
R		14	-
R		15	-
R		18	-
R		19	-

Tabel 30

Overzicht van WDA in examenvragen en van bijhorende P-waarden.
Examen havo wiskunde B 2013 (1e tijdvak); pilot en regulier

Overlap (O), Aangepast (A), Nieuw (N) of Regulier (R)	Vraag in pilotexamen	Vraag in regulier examen	Vorm van WDA
O	1	1	-
O	2	2	-
A	3		P
A		3	-
N	4		-
R		5	-
R		4	-
A	5	6	-
N	6		-
N	7		-
A	8		P
A		10	-
O	9	11	-
O	10	12	-
O	11	13	-
O	12	14	-
O	13	15	-
O	14	16	-
N	15		-
N	16		P
N	17		P
R		7	-
R		8	-
R		9	P
R		17	-
R		18	-
R		19	-

Tabel 31

Overzicht van WDA in examenvragen en van bijhorende p-waarden.
Examen havo wiskunde B 2014 (1e tijdvak); pilot en regulier

Overlap (O), Aangepast (A), Nieuw (N) of Regulier (R)	Vraag in pilotexamen	Vraag in regulier examen	Vorm van WDA
O	1	1	-
O	2	2	-
O	3	3	-
O	4	4	-
A	5	5	-
A	6	6	-
A	7	7	-
N	8		P
O	9	11	-
A	10	12	-
O	11	13	P
O	12	14	-
O	13	15	-
N	14		-
N	15		P
N	16		P
A	17	18	-
N	18		P
R		19	-
N	19		P
R		8	-
R		9	-
R		10	P
R		16	-
R		17	-

Tabel 32

Overzicht van WDA in examenvragen.
Examen havo wiskunde B 2015-1; pilot en regulier

Overlap (O), Aangepast (A), Nieuw (N) of Regulier (R)	Vraag in pilotexamen	Vraag in regulier examen	Vorm van WDA
O	1	1	-
O	2	2	-
O	3	3	P
N	4		-
R		4	-
R		5	P
O	5	6	-
N	6		P
N	7		P
N	8		P
R		10	-
N	9		P
R		11	P
O	10	12	-
O	11	13	-
O	12	14	-
N	13		-
O	14	15	-
O	15	16	-
N	16		P
R		7	-
R		8	-
R		9	-
R		17	-
R		18	-
R		19	Mp

Bijlage 4: overzicht van WDA-examenvragen met bijbehorende p-waarden

Tabel 33

Overzicht van WDA in examenvragen en van bijhorende p-waarden.
Examen vwo wiskunde B 2012-1; pilot en regulier

Overlap (O), Aangepast (A), Nieuw (N) of Regulier (R)	Vraag in pilotexamen	Vraag in regulier examen	Vorm van WDA	p-waarde pilot	p-waarde regulier
N	1		P	52.3	
A	2		P	39.5	
A		2	P		69.2
A	4		P	39.8	
N	6		P	100**	
N	7		P	34.5	
O	9	9	P	100	43.1
A	10		P, Mp *	67.2	
A		10	P		67.4
N	11		P	39.4	
N	12		P, Ao *	100**	
R		6	P		61.6
R		7	P		37.5
R		16	P		45.7
R		17	P		32.8

* Beide vormen van WDA worden in de vraag getoetst
** De p-waarde is op 100 gesteld, omdat er twijfels waren over gelijke kansen voor leerlingen

Tabel 34

Overzicht van WDA in examenvragen en van bijhorende p-waarden.
Examen vwo wiskunde B 2013-1; pilot en regulier

Overlap (O), Aangepast (A), Nieuw (N) of Regulier (R)	Vraag in pilotexamen	Vraag in regulier examen	Vorm van WDA	p-waarde pilot	p-waarde regulier
O	2	2	Ao	60.3	56.7
A	6		P	41.6	
N	9		P / Ao ***	51.1	
N	10		Ao	51.2	
N	11		Mp	100**	
N	12		P	100**	
N	15		Ao	34.4	
R		13	P		80.7
O	16	14	P	50.5	50.4
N	17		P	29.8	
R		9	P		81.0
R		16	Ao		38.1
R		19	P		46.9

** De p-waarde is op 100 gesteld, omdat er twijfels waren over gelijke kansen voor leerlingen
*** In de verschillende oplossingswegen zijn verschillende vormen van WDA van toepassing.

Tabel 35

Overzicht van WDA in examenvragen en van bijhorende p-waarden.
Examen vwo wiskunde B 2014-1; pilot en regulier

Overlap (O), Aangepast (A), Nieuw (N) of Regulier (R)	Vraag in pilotexamen	Vraag in regulier examen	Vorm van WDA	p-waarde pilot	p-waarde regulier
N	3		Mp, P *	64.5	
N	4		P	57.0	
N	5		P	58.8	
N	6		P, Ao *	38.7	
R		13	P, Ao *		20.6
O	10	5	- / P**	64.5	57.2
N	11		P	13.6	
N	12		P / Mp **	33.6	
N	13		P	43.4	
N	14		P	32.8	
O	15	6	P	65.6	70.3
R		11	P		41.1
R		18	P		61.5

* Beide vormen van WDA worden in de vraag getoetst
** In de verschillende oplossingswegen zijn verschillende vormen van WDA van toepassing

Tabel 36

Overzicht van WDA in examenvragen en van bijhorende p-waarden.
Examen vwo wiskunde B 2015-1; pilot en regulier

Overlap (O), Aangepast (A), Nieuw (N) of Regulier (R)	Vraag in pilotexamen	Vraag in regulier examen	Vorm van WDA	p-waarde pilot	p-waarde regulier
N	2		P	38.9	
O	4	3	P	57.2	55.9
N	5		Mp	41.4	
N	7		P	73.1	
N	8		P	70.9	
O	13	14	P	61.1	34.6
R		8	P		52.4
R		9	P		31.1
R		16	P		40.2
R		17	P		56.2

Tabel 37

Overzicht van WDA in examenvragen en van bijhorende p-waarden.
Examen havo wiskunde B 2011-1; pilot en regulier

Overlap (O), Aangepast (A), Nieuw (N) of Regulier (R)	Vraag in pilotexamen	Vraag in regulier examen	Vorm van WDA	p-waarde pilot	p-waarde regulier
O	3	3	Mp	40.1	41.9
N	4		Ap	28.1	
N	7		P	46.2	
N	8		P	21.4	
A	12		P	29.2	
N	16		P	4.75	
O	17	18	Ao	70.0	59.9
O	18	19	Ao	61.4	47.7

Tabel 38

Overzicht van WDA in examenvragen en van bijhorende p-waarden.
Examen havo wiskunde B 2012-1; pilot en regulier

Overlap (O), Aangepast (A), Nieuw (N) of Regulier (R)	Vraag in pilotexamen	Vraag in regulier examen	Vorm van WDA	p-waarde pilot	p-waarde regulier
A	5		P	50.1	
N	8		P	56.8	
N	13		P	54.7	
O	14	7	P	87.2	79.4
N	19		P	51.9	

Tabel 39

Overzicht van WDA in examenvragen en van bijhorende p-waarden.
Examen havo wiskunde B 2013-1; pilot en regulier

Overlap (O), Aangepast (A), Nieuw (N) of Regulier (R)	Vraag in pilotexamen	Vraag in regulier examen	Vorm van WDA	p-waarde pilot	p-waarde regulier
A	3		P	28.7	
A	8		P	45.7	
N	16		P	30.7	
N	17		P	53.3	
R		9	P		50.8

Tabel 40

Overzicht van WDA in examenvragen en van bijhorende p-waarden.
Examen havo wiskunde B 2014-1; pilot en regulier

Overlap (O), Aangepast (A), Nieuw (N) of Regulier (R)	Vraag in pilotexamen	Vraag in regulier examen	Vorm van WDA	p-waarde pilot	p-waarde regulier
N	8		P	59.2	
O	11	13	P	37.7	35.0
N	15		P	53.8	
N	16		P	23.5	
N	18		P	23.4	
N	19		P	51.1	
R		10	P		29.4

Tabel 41

Overzicht van WDA in examenvragen en van bijhorende p-waarden.
Examen havo wiskunde B 2015-1; pilot en regulier

Overlap (O), Aangepast (A), Nieuw (N) of Regulier (R)	Vraag in pilotexamen	Vraag in regulier examen	Vorm van WDA	p-waarde pilot	p-waarde regulier
O	3	3	P	79.1	76.0
R		5	P		48.6
N	6		P	68.0	
N	7		P	22.2	
N	8		P	53.4	
N	9		P	33.4	
R		11	P		42.1
N	16		P	38.5	
R		19	Mp		58.2

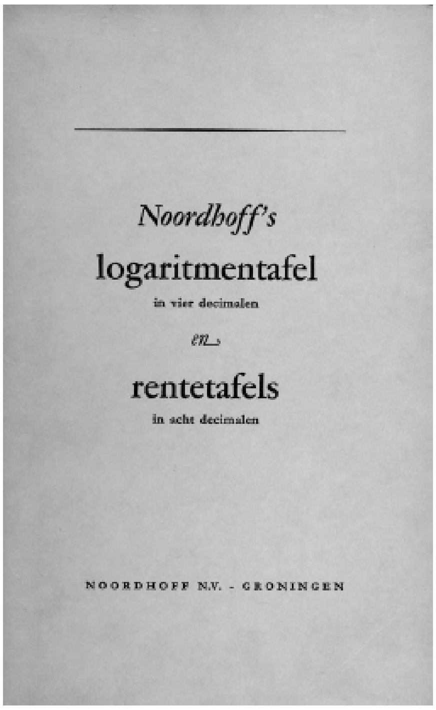
Bijlage 5: Overlappende WDA vragen in havo en vwo examens met een groot verschil in p-waarden

Figuur 10: Vragen 18 en 19 uit het reguliere examen voor havo wiskunde B 2011-1

Logaritmentafel

Wanneer de uitkomst van een logaritme geen geheel getal is, wordt de waarde vaak berekend met behulp van de rekenmachine. 50 jaar geleden waren er nauwelijks rekenmachines. De middelbare scholieren van toen gebruikten tabellenboekjes om de waarde van een logaritme te bepalen. Zie de foto. In de tabel staat een stukje uit zo'n tabellenboekje.

foto



tabel

n	$\log n$
1	0
2	0,3010
3	0,4771
4	0,6021
5	0,6990
6	0,7782
7	0,8451
8	0,9031
9	0,9542
10	1
100	2
1000	3

Met behulp van de tabel en de rekenregels voor logaritmen is het mogelijk om logaritmische of exponentiële vergelijkingen op te lossen. Hierbij kan, zonder de log-toets van de (grafische) rekenmachine te gebruiken, een benadering van het antwoord gevonden worden.

Voorbeeld: $\log 1\frac{1}{2} = \log \frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 \approx 0,4771 - 0,3010 \approx 0,176$.

3p **18** Bereken $\log 24$ op algebraïsche wijze met behulp van de tabel, dus zonder gebruik te maken van de log-toets op je rekenmachine.

Gegeven is de vergelijking $7^x = 25$.

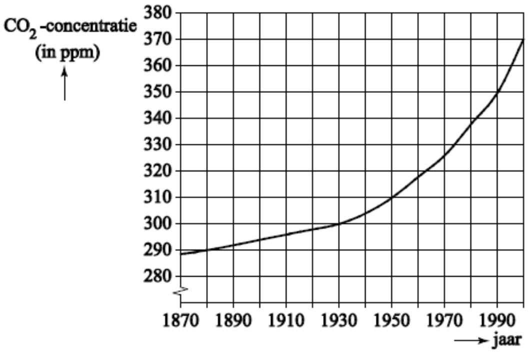
4p **19** Los deze vergelijking op algebraïsche wijze op met behulp van de tabel, dus zonder gebruik te maken van de log-toets op je rekenmachine. Rond je antwoord af op drie decimalen.

Figuur 11: Vraag 7 uit het reguliere examen voor havo wiskunde B 2012-1

CO_2

Sinds 1870 meet men de CO_2-concentratie in de atmosfeer. De CO_2-concentratie wordt uitgedrukt in parts per million (ppm). Dit is het aantal CO_2-deeltjes per miljoen deeltjes. In de figuur kun je zien hoe de CO_2-concentratie in de atmosfeer is veranderd in de periode 1870-2000. Deze figuur is vergroot op de uitwerkbijlage weergegeven.

figuur



In het jaar 1900 veronderstelde de latere Nobelprijswinnaar Arrhenius dat de lineaire groei van de CO_2-concentratie zoals die toen al sinds 1880 optrad, zich op dezelfde manier zou voortzetten. Hij voorspelde hiermee hoeveel de CO_2-concentratie tussen 1900 en 2000 zou toenemen. De toename zoals die door Arrhenius is voorspeld, is veel kleiner dan de werkelijke toename tussen 1900 en 2000.

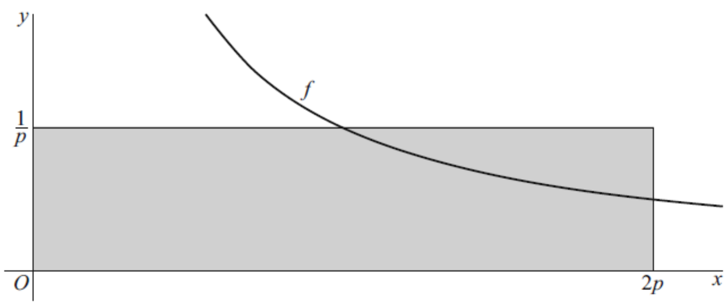
3p **7** Bepaal met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage hoeveel ppm de door Arrhenius voorspelde toename te klein uitviel.

Figuur 12: Vraag 6 uit het reguliere examen voor vwo wiskunde B 2014-1

Grafiek verdeelt rechthoek

Voor $x > 0$ is de functie f gegeven door $f(x) = \frac{1}{x}$.
In onderstaande figuur is voor $p > 0$ een rechthoek getekend die wordt begrensd door de lijnen met vergelijkingen $x = 2p$ en $y = \frac{1}{p}$, de x-as en de y-as.

figuur



Voor elke positieve waarde van p verdeelt de grafiek van f de rechthoek in twee stukken.

7p **6** Bewijs met behulp van integreren dat de oppervlakte van elk van deze stukken onafhankelijk is van de waarde van p.

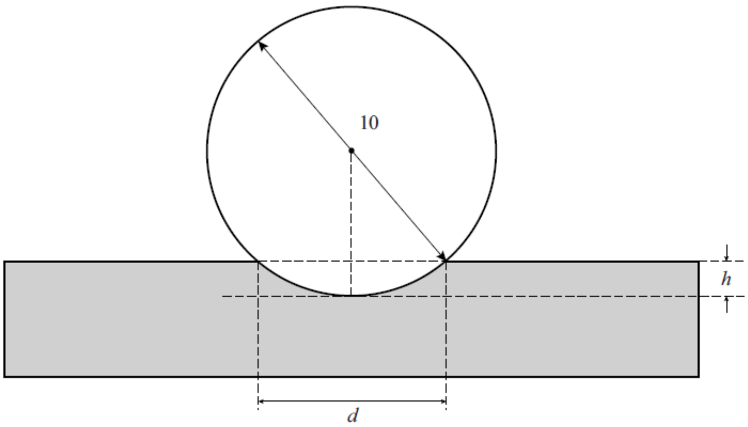
Figuur 13: Vraag 13 uit het reguliere examen voor vwo wiskunde B 2015-1

De opgave *Hardheid* bestaat uit de vragen 11, 12, 13 en 14. Hieronder is alleen vraag 13 opgenomen.

Hardheid

Deze kracht mag niet zo groot zijn dat de kogel vervormt of voor meer dan de helft in het materiaal wordt gedrukt.
In de praktijk wordt bij de hardheidsmeting volgens Brinell de diameter d (in mm) van de cirkelvormige rand van de indruk gemeten. In figuur 3 is een dwarsdoorsnede getekend van een kogel met diameter 10 mm die een stukje in het materiaal is gedrukt. De diepte van de indruk is h (in mm).

figuur 3



Met behulp van figuur 3 kan het volgende verband tussen h en d worden gevonden:

$$h = \frac{10 - \sqrt{100 - d^2}}{2}$$

5p **14** Bewijs de juistheid van deze formule.

Bijlage 6: Verantwoording voor beoordeling van WDA in examenvragen ter voorbereiding op de kwalitatieve analyse

Pilotexamen vwo wiskunde B 2014-1

Vraag 1: Geen WDA.
Er wordt een parameter toegevoegd bij het rekenen met een omwentelingslichaam, maar de gevraagde formule is verder via een procedure te bepalen die reproductie is voor de leerlingen. Er moet worden aangetoond dat de gegeven formule klopt, door de integraal (zelf opstellen) te berekenen, dit is reproductie voor de leerlingen.

Vraag 2: Geen WDA.
Je zou kunnen zeggen dat hier een probleem moet worden vertaald naar de wiskunde (M1), maar de vergelijking ligt hier voor de hand en wordt grotendeels weggegeven, dus het is een reproductieve vraag voor de leerlingen.

Vraag 3: Modelleren als proces (Mp) en probleemoplossen (P).
Het invoeren van de variabele *x*, waardoor het meetkundige probleem een algebra probleem wordt is modelleren (Mp).
Er wordt een stelling gegeven, die gebruikt mag worden. Dit stuurt de leerling richting een bepaalde oplossingsweg. Door verschillende gegevens te combineren creëert de leerling een oplossingsweg (P), welke van te voren niet meteen zichtbaar was.
Er zijn twee wezenlijk verschillende oplossingswegen (P): de eerste manier maakt gebruik van lengtes en de tweede manier maakt gebruik van het berekenen van de oppervlakte.

Correctievoorschrift
P: oplossingsweg 1 / oplossingsweg 2
oplossingsweg 1 Mp: Het stellen van variabele *x* (onderdeel van bolletje 2)
oplossingsweg 1 P: alle vier de bolletjes vormen samen de oplossingsstrategie
oplossingsweg 2 Mp: Het stellen van variabele *x* (onderdeel van bolletje 3)
oplossingsweg 2 P: alle vier de bolletjes vormen samen de oplossingsstrategie

Vraag 4: Probleemoplossen (P).
In de vraag worden veel gegevens gegeven, waaruit de leerling moet kiezen en zo een oplossingsweg moet creëren (P). Als gezien wordt welke driehoeken gelijkvormig zijn, dan is de vraag verder redelijk eenvoudig op te lossen.
De twee mogelijke oplossingswegen maken beide gebruik van gelijkvormige driehoeken, dit zijn geen 'wezenlijke' verschillen.

Correctievoorschrift
P: alle drie de bolletjes vormen samen de oplossingsstrategie

Vraag 5: Probleemoplossen (P).
De verschillende zijden van driehoek NTM kunnen worden uitgedrukt in *r*, elke zijde vraagt hier om een eigen denkstap (P). Ook het gebruiken van de stelling van Pythagoras is een denkstap. Als de

vergelijking is opgesteld, mag deze worden opgelost met de GRM, wat in dit geval eigenlijk geen wiskundige denkstappen meer vereist.

Correctievoorschrift
P: De oplossingsstrategie bestaat uit 4 denkstappen, samengenomen in de bolletjes 1 en 2:
Denkstap 1: stelling van Pythagoras toepassen op driehoek *NTM* (bolletje 2)
Denkstap 2: *NT* uitdrukken in *r* (bolletje 1)
Denkstap 3: *MT* uitdrukken in *r* (bolletje 2)
Denkstap 4: *NM* uitdrukken in *r* (bolletje 2)

Vraag 6: Probleemoplossen (P) en abstract object (Ao).
Nieuw is de combinatie van parameter en verticale asymptoot (P), wat in een volledig abstracte context geplaatst wordt (Ao). Als bekend is hoe een verticale asymptoot berekend moet worden (zonder parameter is dit reproductie), kan dit verder uitgevoerd worden en kan vervolgens de waarde voor parameter a bepaald worden.
Vervolgens moet gecontroleerd worden of deze waarde van a niet een nulpunt van de teller is (wat op zichzelf reproductie is), en kan de conclusie getrokken worden voor welke waarde van a de vraag beantwoord is (P).

Correctievoorschrift
P, Ao: Het stellen van de vergelijking: $1 - 2\cos(a\pi) = 0$ (bolletje 1) en vervolgens het bepalen van *a* (bolletje 2 en 3)
P: De conclusie die getrokken wordt (tussen haakjes in bolletje 4)

Vraag 7: Geen WDA.
Het bewijzen van puntsymmetrie is een bekend probleem voor de leerlingen. Dan hoeft alleen de formule ingevuld te worden. Dit vraagt wel om algebraïsche vaardigheid, maar niet in de vorm van Symbol sense.

Vraag 8: Geen WDA.
De oplossingsweg wordt aangedragen en is reproductie, dit hoeft alleen uitgevoerd te worden.

Vraag 9: Geen WDA.
Het berekenen van snijpunten van twee grafieken is reproductie voor de leerlingen en daarvoor kennen zij een standaard aanpak/oplossingsweg.

Vraag 10: Geen WDA / probleemoplossen (P).
Er worden twee mogelijke oplossingswegen aangedragen. Voor de eerste geldt: Het berekenen van een oppervlakte tussen twee grafieken is reproductie voor leerlingen. De extra stap die gevraagd wordt (het bewijzen dat de oppervlaktes gelijk zijn) vraagt wel om een extra stap maar niet zo zeer om een extra DENKstap, dit is dus geen vorm van WDA.
In de tweede oplossingsweg wordt de integraal bepaald van de drie gebieden samen, die dan op 0 uit moet komen. Het opstellen van de integraal, met deze argumentatie is een denkstap en laat daarmee een vorm van WDA zien (P). Vervolgens moet de verkregen vergelijking worden opgelost, wat reproductie is voor de leerlingen.

Correctievoorschrift
oplossingsweg 1 (geen vorm van WDA) / oplossingsweg 2 (P)
oplossingsweg 2 P: Het combineren van de oppervlaktes V1, V2 en V3 tot een integraal en die gelijkstellen aan 0. Het opstellen van de integraal is niet zo zeer de denkstap, wel de combinatie van de drie oppervlaktes tot 1 integraal die gelijkgesteld wordt aan 1. (deel 1 van bolletje 1)

Vraag 11: Probleemoplossen (P).
De vector OS moet worden opgesteld als combinatie van een aantal andere vectoren. Welke vectoren dit zijn en wat de coördinaten van deze vectoren zijn vraagt om verschillende denkstappen (P).
De twee mogelijke oplossingswegen hebben een vergelijkbare aanpak en verschillen niet wezenlijk van elkaar. Voor het correctievoorschrift splits ik wel de twee opties.

Correctievoorschrift
Oplossingsweg 1 P: OS opstellen als lineaire combinatie van andere vectoren (bolletje 1); stap 2: AP opstellen als lineaire combinatie van OP en OA (bolletje 2); stap 3: AR opstellen (bolletje 3).
Oplossingsweg 2 P: OS opstellen als lineaire combinatie van andere vectoren (bolletje 1); stap 2: AP opstellen als lineaire combinatie van OP en OA (bolletje 1); stap 3: AR opstellen (bolletje 2).

Vraag 12: Probleemoplossen (P) / modelleren als proces (Mp).
Er zijn twee wezenlijk verschillende oplossingswegen mogelijk. Oplossingsweg 1: De vector MS moet worden opgesteld (P). De lengte van deze vector blijkt constant te zijn, de berekening hiervan is reproductie voor leerlingen.
Oplossingsweg 2: Bij het opstellen van de vergelijking van een cirkel wordt een vertaalslag gemaakt van analytische meetkunde naar algebra (Mp). Vervolgens kan door substitutie (Mp) worden aangetoond dat r gelijk is aan $\sqrt{2}$. Dit moet daarna weer terugvertaald (Mp) worden, om te kunnen concluderen dat de afstand van S tot M constant is.

Correctievoorschrift
Oplossingsweg 1 / Oplossingsweg 2
Oplossingsweg 1 P: stap 1:MS opstellen (bolletje 1); stap 2: lengte van MS berekenen (bolletje 2)
Oplossingsweg 2 Mp: stap 1: opstellen van vergelijking van cirkel (bolletje 1); stap 2: substitutie van coördinaten van punt S (bolletje 2); stap 3: resultaat terugvertalen naar conclusie dat de afstand MS constant is (bolletje 3)

Vraag 13: Probleemoplossen (P).
Het opstellen van het spiegelbeeld van de lijn is een denkstap, het opstellen van kentallen is ook een denkstap (P), het berekenen van de hoek tussen twee lijnen en het gebruiken van de formule hiervoor is reproductie.

Correctievoorschrift
P: stap 1: opstellen vgl van spiegelbeeld van de raaklijn (bolletje 1); stap 2: kentallen opstellen (onderdeel van bolletje 2).

Vraag 14: Probleemoplossen (P).
De vraag is voor de leerlingen ‘out of the box’, er moet dan ook een oplossingsweg gecreëerd worden (P), door eerst het probleem goed te begrijpen. De oplossingsweg bestaat uit verschillende denkstappen die gecombineerd moeten worden (P): Het berekenen van a wordt grotendeels weggegeven, het kan berekend worden met de gegeven formule in de voorgaande opdracht (= denkstap 1). Vervolgens moet de afgeleide van p (= denkstap 2) gelijkgesteld worden aan $-a$ (= denkstap 3); gelijkstellen aan $-a$ is een opvallende denkstap.

Correctievoorschrift
P: stap 1: a berekenen (bolletje 1 t/m 3); stap 2: afgeleide van p opstellen (bolletje 4); stap 3: afgeleide gelijkstellen aan $-a$ (bolletje 5).

Vraag 15: Probleemoplossen (P).
Het probleem moet herkend worden en vervolgens moet een meerstaps-strategie opgesteld worden en uitgevoerd (P): snijpunt bepalen; oppervlakte onder grafiek berekenen; oppervlakte rechthoek; oppervlakte boven grafiek berekenen.
De twee verschillende oplossingswegen die gegeven worden zijn niet wezenlijk verschillend, alleen de oppervlakte waar een integraal voor wordt opgesteld is de oppervlakte boven of juist onder de grafiek.
Op het einde moet (in het cv tussen haakjes) een conclusie getrokken, dat de oppervlaktes inderdaad onafhankelijk van p zijn.

Correctievoorschrift
Hier is rekening gehouden met de eerste optie van het correctievoorschrift, de tweede optie komt hier grotendeels mee overeen.
P: stap 1: snijpunt bepalen (bolletje 1); stap 2: oppervlakte onder grafiek berekenen (bolletje 2); stap 3: totale oppervlakte rechthoek berekenen (bolletje 6); stap 4: oppervlakte boven grafiek berekenen (bolletje 7).

Vraag 16: Geen WDA.
Het berekenen van de snelheid in een punt bij gegeven formules voor de coördinaten is voor de leerlingen reproductie.

Vraag 17: Geen WDA.
De vergelijking die opgesteld moet worden en met de GRM mag worden opgelost vraagt geen bijzondere handelingen of stappen, en is voor de leerlingen reproductie.

Vraag 18: Geen WDA.
Voor deze vraag moet het maximum van r berekend worden, dit staat aangegeven in de tekst. Als de formule herschreven is, kan de vergelijking exact worden opgelost. Het oplossen van zo’n vergelijking is reproductie voor de leerlingen.

Regulier examen vwo wiskunde B 2014-1

Hieronder worden alleen de vragen besproken die anders zijn t.o.v. het pilotexamen.

Vraag 7: Geen WDA.
De vergelijking van y(t) moet gelijkgesteld worden aan 0, wat verder niet ingewikkeld is en reproductie is voor de leerlingen.

Vraag 10: Geen WDA.
Er wordt gevraagd om gelijkvormigheid van twee driehoeken aan te tonen. Dit is voor de leerlingen reproductie, omdat een hoek al meteen duidelijk is vanwege overstaande hoeken. Van de andere twee hoeken is ook vrij eenvoudig te bepalen dat ze gelijk zijn. Het bepalen van gelijkvormige driehoeken is op deze manier reproductie voor de leerlingen.

Vraag 11: Probleemoplossen (P).
Hoewel bekend is waar de leerling op uit moet komen, is de oplossingsweg niet meteen duidelijk. Er zijn meer gegevens beschikbaar dan nodig, waardoor de leerling de juiste gegevens moet gebruiken (P).
|AG| kan berekend worden met behulp van de gegevens, |AD| is gegeven, dus het berekenen van |DZ| is nog maar een kleine stap. Hoewel bedacht moet worden dat |AG| door Z verdeeld wordt in de verhouding 1:2, omdat Z het zwaartepunt is.

Correctievoorschrift
P: |AG| kan berekend worden met behulp van de gegevens, |AD| is gegeven, dus het berekenen van |DZ| is nog maar een kleine stap. Hoewel bedacht moet worden dat |AG| door Z verdeeld wordt in de verhouding 1:2, omdat Z het zwaartepunt is. (bolletje 1 en 2)

Vraag 12: Geen WDA.
De juiste gegevens moeten gedestilleerd worden uit alles wat gegeven is, maar door de vragen 10 en 11 wordt de oplossingsrichting al aangegeven. De oplossingsweg is dus reproductie voor de leerlingen. De lengte van AB is al gegeven. Nu hoeft alleen aangetoond te worden dat EH ook lengte 2 heeft. De gevonden uitkomsten van vraag 10 en 11 kunnen gecombineerd worden, wat vervolgens tot het antwoord leidt.
De verschillende oplossingswegen die gegeven worden, zijn niet wezenlijk verschillend. In beide gevallen wordt gebruik gemaakt van dezelfde driehoeken die gelijkvormig zijn.

Vraag 13: Probleemoplossen (P) en abstract object (Ao).
Heeft een overlap met vraag 6 uit het pilotexamen. Hierin is de combinatie van parameter en het raakpunt van een goniometrische functie aan de x-as bepalen nieuw (P, Ao). Het kan vervolgens wel eenvoudig (zonder parameter is dit reproductie) worden teruggebracht tot een bekend probleem, waardoor de oplossingsweg niet moeilijk meer is.
De conclusie dat het gevonden punt ook inderdaad het raakpunt is dat gevraagd werd is een belangrijke stap als denkactiviteit (P).

Correctievoorschrift
P, A2: het bepalen van de afgeleide met parameter *a* er nog in (bolletje 1) en vervolgens het invullen van en bepaald punt waardoor de afgeleide inderdaad 0 is, onafhankelijk van *a* (bolletje 2 en 3).
P: de conclusie die getrokken wordt (tussen haakjes in bolletje 3)

Vraag 15: Geen WDA.
Uit de tekst is eenvoudig de gevraagde vergelijking af te leiden, welke vervolgens met *plot, intersect* op de GRM mag worden opgelost. Dit is reproductie voor de leerlingen.

Vraag 16: Geen WDA.
De tekst is misschien wat ingewikkeld, waardoor niet direct duidelijk is wat er wiskundig gezien opgelost moet worden. Dit lijkt op een vorm van modelleren, maar de vorm van de vraag is wel reproductie voor de leerlingen, dus geen vorm van WDA.

Vraag 17: Geen WDA.
Hier moeten twee vergelijkingen opgesteld worden met twee onbekenden, waardoor vervolgens de onbekenden berekend kunnen worden. Gegeven wordt welke twee vergelijkingen opgesteld moeten worden, wat een kwestie wordt van 'invullen'. Daarom is het totaal van de vraag voor leerlingen een vorm van reproductie.

Vraag 18: Probleemoplossen (P).
In de vraag is niet meteen duidelijk welke oplossingsweg genomen moet worden. De leerling moet dus een oplossingsweg creëren (P). Dit kan gedaan worden door verschillende bekende stellingen (constante hoek, Z-figuur, som overstaande hoeken in koordenvierhoek, gestrekte hoek) toe te passen op de figuur, waardoor uiteindelijk aangetoond kan worden dat de gevraagde vierhoek een koordenvierhoek is.

Correctievoorschrift
P: stap 1: constante hoek (bolletje 1); stap 2: Z-hoeken (bolletje 2); stap 3: gestrekte hoek (bolletje 3); stap 4: gegevens combineren en conclusie trekken (bolletje 4 en 5)