Euclidische meetkunde: passer en liniaal vs. vouwen

Wat is er allemaal (on)mogelijk?

28-6-2014
Universiteit Utrecht
Jeroen Nagtegaal (0441872)

INHOUDSOPGAVE

0. Inleiding

Sinds de tijd van de oude Grieken zijn er vele wiskundigen geweest die zich bezig hebben gehouden met meetkunde. We zullen in dit boekje kijken naar een specifiek soort meetkunde: de euclidische meetkunde.
De euclidische meetkunde is vernoemd naar Euclides, een Grieks wiskundige die geprobeerd heeft een basis te leggen voor (onder andere) de meetkunde.
Het idee van de euclidische meetkunde is simpel: je hebt een passer en een liniaal (zonder schaalverdeling). Deze twee hulpmiddelen mag je gebruiken om punten, lijnen, cirkels, etc. te construeren. Euclides heeft dertien boeken volgeschreven met verschillende meetkundige figuren en eigenschappen. Daarnaast is ons beeld van meetkunde in de eeuwen ontwikkeld, en zijn er nieuwe denkbeelden of mogelijkheden ontstaan. We zullen niet deze hele euclidische meetkunde behandelen.
Wel zullen we de manier van bewijzen gebruiken die door Euclides is geïntroduceerd. In zijn boeken gebruikt Euclides een manier van bewijzen in de meetkunde die de huidige wiskundigen nog steeds gebruiken om stellingen te bewijzen.

Hoewel het idee van de euclidische meetkunde simpel is, roept het toch een belangrijke vraag op: wat is er allemaal mogelijk binnen de euclidische meetkunde? Welke punten, lijnen, afstanden, etc. zijn er nu eigenlijk construeerbaar? Of anders gesteld: wat is er *niet* mogelijk binnen de euclidische meetkunde?
Is het bijvoorbeeld mogelijk om een hoek in drie gelijke delen te splitsen? Is het mogelijk om een vierkant te tekenen die dezelfde oppervlakte heeft als een cirkel met straal 1?

Dit boekje gaat over de euclidische meetkunde. We zullen de spelregels behandelen, en kijken wat daar de gevolgen van zijn. Ook zullen we kijken naar de mogelijkheden die de passer en de liniaal ons bieden om dingen te construeren. Hierbij zullen we soms verder gaan dan Euclides dat deed omdat er in de loop van de geschiedenis nieuwe inzichten zijn ontstaan.

We zullen deze euclidische meetkunde vergelijken met een vorm van meetkunde die is opgebouwd uit vouwconstructies. Door papier te vouwen ontstaat namelijk ook een soort meetkunde. Dit vouwen levert ons ook lijnen, punten en figuren op. We zullen kijken naar de verschillen en overeenkomsten van deze twee typen meetkunde. Uiteindelijk zullen we kijken wat er wel of niet construeerbaar of vouwbaar is.

In hoofdstuk 1 zullen we de euclidische meetkunde behandelen. Hierin zullen we de spelregels bepalen die we gaan gebruiken. We zullen ook kijken naar de gevolgen en mogelijkheden van deze spelregels.

In hoofdstuk 2 zullen we vervolgens kijken naar de construeerbaarheid binnen de euclidische meetkunde. Hierin zullen we bepalen wat er wel of niet mogelijk is met behulp van passer en liniaal.

In hoofdstuk 3 zullen we de vouwconstructies toelichten. In dit hoofdstuk zal gekeken worden naar de spelregels rond het vouwen, en de mogelijkheden die dit vouwen oplevert.

In hoofdstuk 4 zullen we dan deze twee vormen van meetkunde met elkaar vergelijken. We zullen kijken of alles wat met passer en liniaal mogelijk is ook met vouwconstructies mogelijk is.

Tenslotte zullen we ons in hoofdstuk 5 richtten op hoeken. Uiteindelijk zullen we in dit hoofdstuk in gaan op de vraag: Is de driedeling van een hoek mogelijk?

Hoe moet je dit boekje lezen?

Dit boekje bestaat uit een lopende tekst waarin een aantal dingen wordt uitgelegd en toegelicht. In deze lopende tekst zullen verschillende voorbeelden behandeld worden.
Tussen deze lopende tekst door vind je opdrachten. Deze opdrachten zijn niet bedoeld ter controle of als huiswerk, maar dienen vooral om actief na te denken over de onderwerpen die in de lopende tekst behandeld worden. Door de opgave te maken zul je na gaan denken over het onderwerp, dingen zelf ontdekken, of bijzondere uitzonderingssituaties onder de loep nemen. Je wordt dan ook aangeraden om deze opdrachten te maken tijdens het lezen van de tekst.

Om deze tekst te kunnen lezen, en om de opdrachten te kunnen maken, gaan we uit van de basiskennis van een middelbare scholier in de bovenbouw van het VWO met wiskunde B in zijn/haar pakket. Sommige onderdelen zullen begrijpelijk zijn voor een groter publiek, maar er zitten onderwerpen in die toch een bepaalde voorkennis van bijvoorbeeld functies of formules veronderstelt.
Zelfs met die voorkennis kan het zijn dat je niet uit alle opgaven komt. Daarom zijn er hints opgenomen die je een stapje op weg moeten helpen om de oplossing te vinden. Ook zijn de uitwerkingen van de opgaven opgenomen. De uitwerkingen zijn slechts een mogelijke manier om tot de oplossing te komen. Het is heel goed mogelijk dat je tijdens het maken van de opgaven een andere oplossing hebt gevonden. Laat je dus niet afschrikken als je zelf een andere uitwerking gevonden hebt.

Veel plezier bij het lezen van deze tekst, en veel succes bij het maken en begrijpen van de opdrachten. We hopen dat je na afloop een beetje meer hebt ontdekt van de wereld van de meetkunde, en inziet hoe mooi, complex, precies en bijzonder deze meetkunde in elkaar zit.

1. Meetkunde met passer en liniaal

In dit hoofdstuk zullen we het gaan hebben over de meetkunde met passer en liniaal. Euclides heeft in zijn boeken een aantal 'spelregels' opgesteld die we kunnen gebruiken om meetkunde te bedrijven. Van daaruit gaat hij verder, en bepaalt zo welke complexere constructies er allemaal mogelijk zijn.
Wij zullen dit op dezelfde manier doen. Eerst zullen we ons richten op de 'spelregels' om vervolgens te kijken wat er allemaal mogelijk is.

Vijf procedures

Wanneer we het hebben over construeren in de meetkunde, dan bedoelen we over het algemeen het construeren met behulp van passer en liniaal (zonder schaalverdeling).
Het idee is op zich simpel: Je begint met een vlak, met daarin twee punten. Vervolgens maak je met een passer of liniaal nieuwe lijnen en punten. Op deze manier kun je verschillende punten en figuren opbouwen. Hierbij mag je de volgende vijf procedures uitvoeren.

(P1) Bij twee (verschillende) punten P en Q kan je met een liniaal de unieke rechte lijn l tekenen die door beide punten gaat.

Deze lijn is uniek en bestaat alleen als de punten P en Q verschillend zijn. Als P en Q samen vallen dan heb je eigenlijk maar één punt, en kan je de lijn niet tekenen.

(P2) Bij twee (verschillende) punten P en Q kan je met een passer de unieke cirkel c tekenen met P als middelpunt zodat Q op de cirkel ligt.

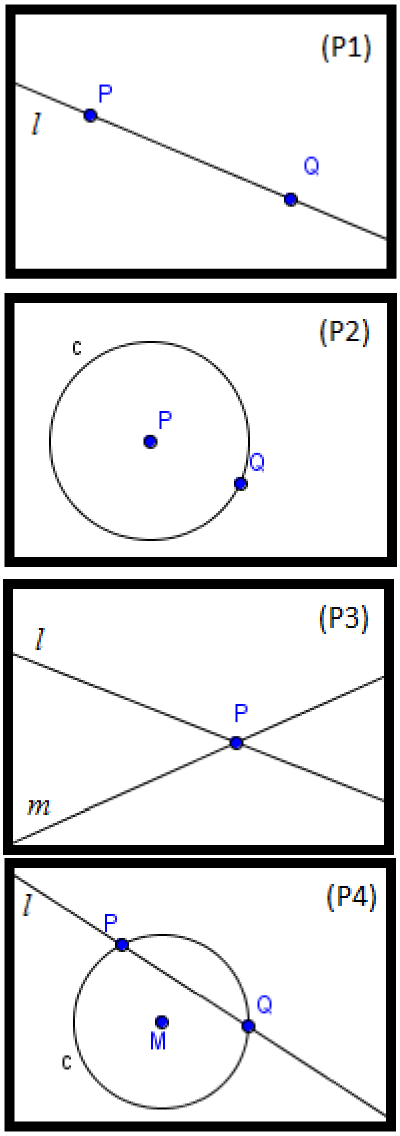
Deze cirkel is uniek en de straal van deze cirkel is de afstand tussen P en Q. Alle punten op deze cirkel liggen even ver van P af als Q.

(P3) Bij twee (verschillende) snijdende lijnen l en m kan je het unieke snijpunt P van deze lijn bepalen.

Dit snijpunt is uniek en bestaat alleen als de lijnen verschillend zijn en niet evenwijdig lopen. Soms moet je (een van) beide lijnen doortrekken om het snijpunt te vinden.

(P4) Bij een cirkel c en een rechte lijn l kan je de twee snijpunten P en Q van c en l bepalen.

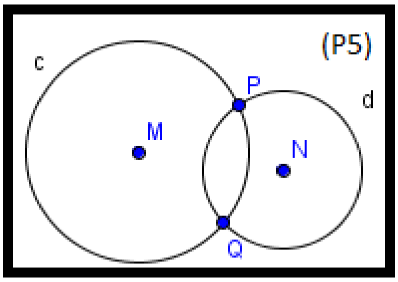
Het kan zijn dat er geen snijpunten zijn. Het kan ook voorkomen dat er maar één snijpunt is. Het aantal snijpunten hangt af van de afstand van de lijn l tot het middelpunt M van de cirkel.



Figuur 1.1a: (P1) t/m (P4)

(P5) Bij twee cirkels c en d kan je de twee snijpunten P en Q van deze cirkels bepalen.

Er zijn maximaal twee snijpunten. Het aantal snijpunten hangt af van de afstand tussen de middelpunten M en N van de cirkels en de stralen van deze twee cirkels.



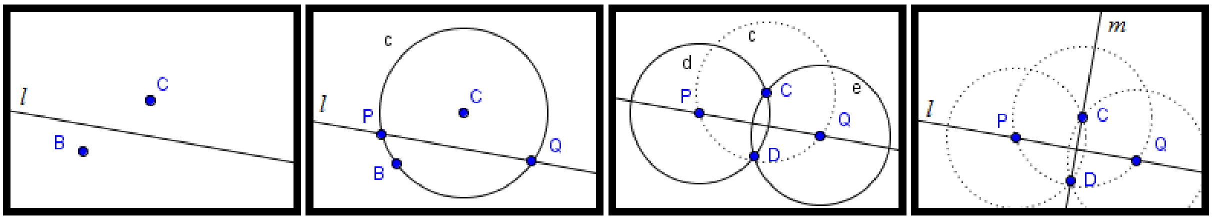
Figuur 1.1b: (P5)

Met behulp van deze vijf procedures is het mogelijk om nieuwe constructies te maken.

Nieuwe constructies maken

Voorbeeld 1.1:
Gegeven een lijn l en een punt C niet op de lijn l. Construeer de lijn m, die loodrecht staat op l en door C gaat.

Stap 1:	Kies een willekeurig punt B, zodat C en B niet aan dezelfde kant van l liggen.	
Stap 2:	Construeer de cirkel c met middelpunt C, zodat B op de cirkel ligt.	(P2)
Stap 3:	c snijdt l in twee punten. Noem het ene punt P en het andere punt Q.	(P4)
Stap 4:	Construeer de cirkel d met middelpunt P, zodat C op de cirkel ligt.	(P2)
Stap 5:	Construeer de cirkel e met middelpunt Q, zodat C op de cirkel ligt.	(P2)
Stap 6:	Cirkels d en e zullen twee snijpunten hebben. Het ene snijpunt is C. Noem het ander snijpunt D.	(P5)
Stap 7:	Construeer de lijn m door C en D	(P1)



Figuur 1.2: De constructie van een loodlijn

De lijn die je bij stap 7 construeert is de gezochte loodlijn. Dat dit inderdaad zo is, moet nog wel bewezen worden.

In voorbeeld 1.1 is er in stap 1 een willekeurig punt gekozen. Dit kun je altijd doen. In voorbeeld 1.1 is gekozen voor een punt B zodat B en C niet aan dezelfde kant van l liggen. Je kunt altijd een extra hulppunt willekeurig kiezen, maar onthoud dat dit punt geen extra informatie geeft.

<u>Opdracht 1.1</u>
Kijk eens naar voorbeeld 1.1. In stap 3 wordt er van uitgegaan dat er twee snijpunten zijn. Normaal gesproken is het niet altijd zo dat een lijn en een cirkel twee snijpunten hebben. Leg uit dat je in dit geval wel altijd twee snijpunten hebt.

<u>Opdracht 1.2</u>
Kijk eens naar de constructie van de loodlijn. Bewijs nu dat de lijn m inderdaad loodrecht staat op l.

Op deze manier hebben we een nieuwe constructie gemaakt die je kunt gebruiken:

(C1) Bij een lijn l en een punt C, niet op l, kan je de unieke loodlijn m op l tekenen die door C gaat.

Het is dus, met behulp van (C1), mogelijk om een loodlijn m op l te construeren door een punt C dat niet op l ligt.Het is ook mogelijk om de loodlijn m te construeren als punt C wel op de lijn l ligt. Deze constructie lijkt heel erg op de constructie van voorbeeld 1.1. Je kiest een willekeurig punt B, niet op l. Daarna construeer je een cirkel met middelpunt C zodat de cirkel door B gaat. Deze cirkel zal twee snijpunten hebben met de lijn l. Noem deze snijpunten P en Q.
Als je daarna de stappen volgt, zoals in voorbeeld 1.1, dan krijg je de volgende constructie:

(C2) Bij een lijn l en een punt C op l kan je de unieke loodlijn m op l tekenen die door C gaat.

<u>Opdracht 1.3</u>
Schrijf de constructie (C2) uit in de losse procedures (zoals in voorbeeld 1.1) en geef een bewijs dat de gevonden lijn inderdaad de gezochte loodlijn is.

Op deze manier kan je complexere constructies maken door de procedures te combineren. Je mag vanaf nu ook (C1) en (C2) gebruiken om nog complexere constructies te maken. Het is vanaf nu niet meer nodig om de hele constructie van een loodlijn uit te schrijven in de losse procedures. We weten dat het mogelijk is om een loodlijn te construeren met passer en liniaal. Als je dus ergens een loodlijn wil construeren mag je daarvoor (C1) of (C2) gebruiken.

<u>Opdracht 1.4</u>
Construeer een vierkant $ABCD$ als je alleen de hoekpunten A en B hebt.
Hierbij mag je gebruik maken van de vijf procedures, en de constructies (C1) en (C2).

<u>Opdracht 1.5</u>
Gegeven twee punten $\boldsymbol{P}$ en $\boldsymbol{R}$. Ook heb je een lijn $\boldsymbol{l}$, die door $\boldsymbol{P}$ maar niet door $\boldsymbol{R}$ loopt. Construeer nu $\boldsymbol{Q}$ op $\boldsymbol{l}$, en $\boldsymbol{S}$ niet op $\boldsymbol{l}$ zodat $\boldsymbol{PQRS}$ een rechthoek is.
Schrijf de constructie uit in losse stappen**.** Hierbij mag je gebruik maken van de vijf procedures, en de constructies (C1) en (C2**).**

Opdrachten 1.4 en 1.5 laten zien dat het mogelijk is om vierkanten en rechthoeken te construeren.

<u>Opdracht 1.6</u>
Gegeven een lijn $\boldsymbol{l}$ en een punt $\boldsymbol{P}$ dat niet op deze lijn ligt. Construeer een lijn $\boldsymbol{m}$ die evenwijdig is aan $\boldsymbol{l}$ en door punt $\boldsymbol{P}$ gaat. Geef de constructie en bewijs dat deze constructie werkt.

Het is nu na opdracht 1.6 mogelijk om evenwijdige lijnen te construeren.

(C3) Bij een lijn $\boldsymbol{l}$ en een punt P niet op l kan je de unieke evenwijdige lijn m tekenen die door P gaat.

De vijf procedures kun je dus combineren om nieuwe constructies te maken. Er zijn nog veel meer constructies mogelijk. We zullen er in de loop van dit boekje nog een aantal tegenkomen. Voordat we dit doen, zullen we kijken naar het gebruik van de passer.

Het gebruik van de passer

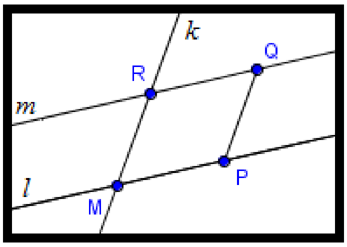
Een passer gebruik je om cirkels mee te tekenen. Als je (P2) uitvoert, heb je hier mee te maken. Je tekent dan een cirkel met een middelpunt, zodat een ander punt op de cirkel ligt. In voorbeeld 1.1 tekenden we bijvoorbeeld een cirkel c met middelpunt C zodat B op de cirkel lag.

Stel nu de volgende situatie voor: Gegeven een punt M, en een lijnstuk PQ met lengte r. Is het dan mogelijk om een cirkel te teken met middelpunt M en straal r?
In de praktijk is dit zeker mogelijk. Je stelt de passer in op de juiste straal (door lijnstuk PQ te gebruiken) en verplaatst dan de passer zodat de passer met de scherpe punt op punt M staat.
Volgens Euclides was dit echter niet toegestaan. Hij gebruikte namelijk een passer die inklapt op het moment dat je de passer van het papier haalt. Hij kon dus niet de afstand r op zijn passer overnemen, om deze ergens anders te gebruiken. Het verplaatsen van de passer staat daarom ook niet in de vijf toegestane procedures. We willen dit in de praktijk wel gebruiken. In voorbeeld 1.2 laten we zien dat dit geen probleem is:

Voorbeeld 1.2:
Gegeven een punt $\boldsymbol{M}$, en een lijnstuk PQ met lengte r, zodat M niet op het verlengde van PQ ligt. Construeer een punt R, zodat lijnstuk MR ook lengte r heeft.

Stap 1:	Construeer de lijn $\boldsymbol{l}$ door M en P.	(P1)
Stap 2:	Construeer de lijn m evenwijdig aan l door Q.	(C3)
Stap 3:	Construeer de lijn k evenwijdig aan PQ door M.	(C3)
Stap 4:	Noem R het snijpunt van de lijnen k en m.	(P3)

Nu geldt dat MR ook lengte r heeft:
Vierhoek $MPQR$ is een parallellogram (vanwege de evenwijdige zijden). De overstaande zijden zijn dan even lang. Dus $MR = PQ = r$.



Figuur 1.3: Een verplaatsing

Voorbeeld 1.2 laat zien dat het mogelijk is om een lijnstuk te "verplaatsen". In de praktijk zal je dit zo waarschijnlijk nooit doen, maar neem je gewoon de afstand op je passer over. Maar dankzij voorbeeld 1.2 weet je nu wel dat het ook volgens de vijf procedures kan.
Euclides kon met zijn passer de afstanden niet overnemen. Wij kunnen dat wel, en zullen dit ook gebruiken in onze verdere constructies.

<u>Opdracht 1.7</u>
In voorbeeld 1.2 gingen we er van uit dat M niet op het verlengde ligt van PQ, anders krijg je geen parallellogram. Geef zelf een constructie hoe je PQ verplaatst als M *wel* op het verlengde ligt van PQ.

Voorbeeld 1.2 en opdracht 1.7 laten zien dat het mogelijk is om een lijnstuk te verplaatsen. Als je dit combineert met (P2) dan krijg je de volgende constructie:

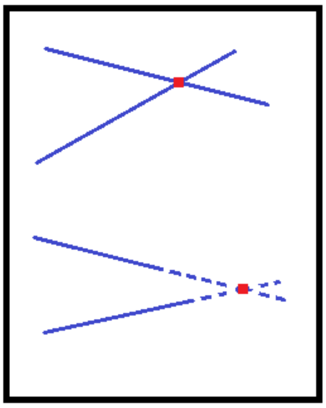
(C4) Bij een punt M en een lijnstuk met lengte r kan je een cirkel construeren met middelpunt M en straal r.

Constructie (C4) zorgt er voor dat we cirkels kunnen tekenen met een gegeven straal. Vervolgens kan je dan de snijpunten van deze cirkel met een lijn of een andere cirkel bepalen. Deze snijpunten vormen een belangrijk onderdeel van de meetkunde. Snijpunten zijn namelijk dé manier om nieuwe punten te construeren. Laten we daarom eens kijken naar de snijpunten van lijnen en cirkels.

Snijpunten

Tijdens het construeren is het mogelijk om nieuwe punten te maken. Deze punten ontstaan als snijpunten van figuren, zoals lijnen of cirkels.

Twee lijnen hebben altijd precies één snijpunt, behalve als de lijnen evenwijdig lopen. Als twee lijnen niet evenwijdig lopen is er dus altijd één snijpunt. Als je te maken hebt met lijnstukken die niet evenwijdig lopen dan kan het zijn dat ze geen snijpunt hebben, maar als je de lijnstukken verlengt (tot lijnen) dan zullen ze een snijpunt hebben.
We gaan er eigenlijk van uit dat het papier wat we gebruiken oneindig groot is. In de praktijk zal dit natuurlijk niet het geval zijn. In dat geval kan het zijn dat het snijpunt van twee lijnen buiten het papier valt. Toch hebben de lijnen dan een snijpunt, welke we met (P3) kunnen vinden.



Figuur 1.4:Snijpunten van lijnen

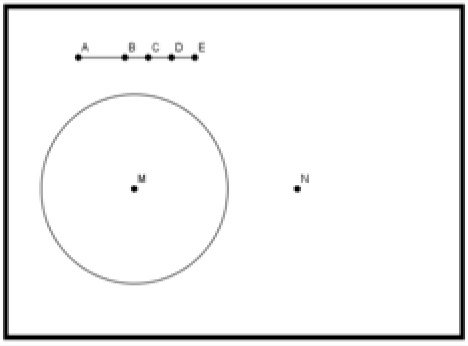
Ook van twee cirkels kunnen we snijpunten bepalen, met behulp van (P4). Voor twee cirkels ligt het net iets anders dan bij twee lijnen. Er zijn dan drie mogelijkheden:

- Twee cirkels hebben twee snijpunten
- Twee cirkels hebben één snijpunt
- Twee cirkels hebben geen snijpunt

In opdracht 1.8 wordt hier dieper op ingegaan.

<u>Opdracht 1.8</u>
In figuur 1.5 (dit figuur staat ook op werkblad A) zie je een cirkel c met middelpunt M en straal 4.
Daarnaast heb je een punt N, zodat $MN = 7$.
Ook heb je vier lijnstukken gekregen met verschillende lengten: $AB = 2, AC = 3, AD = 4, AE = 5$
Teken in één figuur de volgende vier cirkels en markeer de snijpunten van elke cirkel met c.

a) Cirkel met middelpunt N en straal 5
b) Cirkel met middelpunt N en straal 4
c) Cirkel met middelpunt N en straal 3
d) Cirkel met middelpunt N en straal 2



Figuur 1.5: Opdracht 1.8

Zoals je in opdracht 1.8 hebt kunnen zien, hebben twee cirkels soms twee snijpunten, soms één snijpunt, en soms helemaal geen snijpunten.

<u>Opdracht 1.9</u>
In het geval van twee cirkels zijn er drie mogelijkheden:

- Twee cirkels hebben twee snijpunten
- Twee cirkels hebben één snijpunt
- Twee cirkels hebben geen snijpunt

Noem de straal van de ene cirkel r, de straal van de andere cirkel s. Noem de afstand tussen beide middelpunten p.

Geef een relatie tussen r, s en p in elk van de drie mogelijkheden.

Voor twee cirkels geldt het volgende:

- Als de twee stralen samen groter zijn dan de afstand tussen de middelpunten, dan zijn er twee snijpunten.
- Als de twee stralen samen even groot zijn als de afstand tussen de middelpunten, dan is er maar één snijpunt.
- Als de twee stralen samen kleiner zijn dan de afstand tussen de middelpunten, dan zijn er geen snijpunten.

Opdracht 1.10
Controleer deze conclusie bij de cirkels van opdracht 1.8.

In opdracht 1.8 zijn we er van uit gegaan dat het middelpunt N buiten de cirkel c ligt. Het zou ook kunnen zijn dat het middelpunt N binnen de cirkel ligt. Ook in dat geval zijn er drie mogelijkheden:

- Twee cirkels hebben twee snijpunten
- Twee cirkels hebben één snijpunt
- Twee cirkels hebben geen snijpunt

Opdracht 1.11
Ook als het middelpunt N zich binnen de cirkel c bevindt, is het mogelijk om in elk van de drie mogelijkheden een relatie aan te geven tussen r (de straal van de ene cirkel), s (de straal van de andere cirkel) en p (de afstand tussen de middelpunten)
Geef deze relaties.

Bij een cirkel met middelpunt M en straal r, en een andere cirkel met middelpunt N en straal s, waarbij $MN = p$, met $p < r$ geldt:
Als $s + p > r$ dan zijn er twee snijpunten
Als $s + p = r$ dan is er één snijpunt
Als $s + p < r$ dan zijn er geen snijpunten

Opdracht 1.9 en 1.11 laten zien dat het niet zo vanzelfsprekend is dat twee cirkels snijpunten hebben. Bij het construeren zie je normaal gesproken of er snijpunten zijn, maar als je een bepaalde constructie wil bewijzen dan moet je dit in gedachten houden. Je mag niet zomaar aannemen dat twee cirkels altijd twee snijpunten hebben.

Dit waren de ‘spelregels’. In dit hoofdstuk hebben we vooral gekeken naar de regels en de mogelijkheden die de passer en liniaal ons bieden. We zullen in het volgende hoofdstuk kijken naar construeerbaarheid. We zullen dan in gaan op de vraag: ‘wat is construeerbaar met behulp van passer en liniaal?’

2.Construeerbaarheid

In hoofdstuk 1 hebben we de ‘spelregels’ waarmee we gaan werken uitgelegd. In dit hoofdstuk zullen we kijken naar de gevolgen hiervan. We zullen kijken naar de figuren, punten en lijnen die construeerbaar zijn met passer en liniaal. Met andere woorden: we willen weten wat er allemaal mogelijk is met behulp van passer en liniaal.

Getallen maken

Voordat we het gaan hebben over meetkunde, willen we kijken naar getaltheorie. In de getaltheorie wordt uitgegaan van getallen. Deze getallen kun je dan combineren tot nieuwe getallen. Door getallen bij elkaar op te tellen of te vermenigvuldigen ontstaan nieuwe getallen. Deze nieuwe getallen zijn op hun beurt weer te gebruiken om nieuwere getallen te maken. Op deze manier is het getalsysteem uit te breiden.
In de meetkunde doen we iets soortgelijks. Met passer en liniaal gaan we altijd uit van punten, lijnen en cirkels. Met behulp van een constructie maken we nieuwe punten die ontstaan als snijpunten van deze figuren. Op deze manier maken we steeds nieuwe punten, die op hun beurt weer gebruikt kunnen worden om andere punten te maken. Zo breiden we de verzameling van construeerbare punten uit.

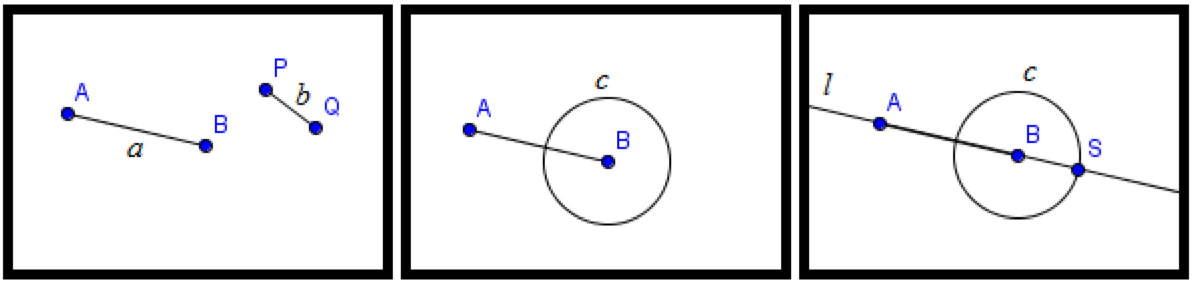
Op dit moment zullen we ons gaan richten op lijnstukken. Een lijnstuk is een deel van een lijn dat aan beide kanten begrensd wordt door een punt. Je kunt dan praten over een lijnstuk AB. Dit is het gedeelte van de lijn door A en B dat tussen deze twee punten ligt.
Bij elk lijnstuk kan je praten over een lengte. De lengte van een lijnstuk is de afstand tussen de twee eindpunten. Deze lengten zijn getallen. Met behulp van een passer en een liniaal kunnen we met deze‘getallen’ nieuwe getallen maken.
We beginnen dan altijd met een basislijnstuk AB met lengte 1. Van daar uit kunnen we constructies gebruiken om nieuwe lengten te maken.

Optellen en aftrekken

Stel dat we twee lijnstukken hebben: AB met lengte a en PQ met lengte b.
Je kunt, met behulp van (C4), een lijnstuk verplaatsen. Dit kan je op de volgende manier gebruiken:

Voorbeeld 2.1:
Gegeven lijnstuk AB met lengte *a* en lijnstuk PQ met lengte *b*.

Stap 1: Teken de cirkel$c$ met middelpunt B en straal b. (C4)
Stap 2: Verleng lijnstuk AB door lijn l, door A en B, te tekenen. (P1)
Stap 3: Noem S het snijpunt van c met l. (P4)
(Kies S zo dat A en S niet aan de zelfde kant van B liggen).



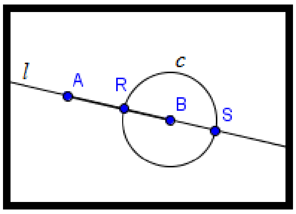
Figuur 2.1: Constructie van (O1)

Nu geldt: $AS = a + b$.

Het is hiermee mogelijk om een lijnstuk te maken met lengte $a + b$. Met andere woorden: je kunt de lengten van lijnstukken bij elkaar optellen.
Op die manier krijg je de volgende operatie:

(O1) Bij een lijnstuk $AB = a$ en een lijnstuk $PQ = b$ is het mogelijk een punt S te construeren zodat $AS = a + b$

Kijk eens naar voorbeeld 2.1. Stel dat we twee lijnstukken hebben: AB met lengte a en PQ met lengte b. De cirkel c die je construeert in stap 3 heeft dan twee snijpunten met de lijn l. Het ene snijpunt hebben we S genoemd. Stel we noemen het andere snijpunt R. Als $a > b$ dan ligt R tussen A en B.



Figuur 2.2: AR = a - b

<u>Opdracht 2.1</u>
Kijk naar figuur 2.2. Wat weet je in deze situatie van de afstand AR?

Door punt R te construeren, zoals in figuur 2.2, krijg je de volgende operatie:

(O2) Bij twee lijnstukken $AB = a$ en $PQ = b$ zodat $a > b$, is het mogelijk een punt R te construeren zodat $AR = a - b$

Met behulp van (O1) en (O2) is het nu mogelijk om lijnstukken bij elkaar op te tellen of van elkaar af te trekken.

De basis van getallen

Wat betekent de lengte van een lijnstuk eigenlijk? Wat wil het bijvoorbeeld zeggen als we een lijnstuk AB hebben met lengte 3?
Normaal gebruiken we in constructiemeetkunde geen eenheden. De afstand is dus niet 3 cm of 5 m of 17 dam, maar wordt enkel als getal aangeven. Een lijnstuk AB heeft bijvoorbeeld lengte 3, of 5 of 17. Om dit te kunnen doen heb je wel een referentiekader nodig. Daarom begin je altijd met een basislengte. Je begint met een standaardlijnstuk AB met lengte 1. Op basis van dit lijnstuk kan je alle andere lijnstukken een lengte geven. Als bijvoorbeeld een lijnstuk CD twee keer zo lang is als AB (waarvan de lengte 1 is), dan is de lengte van CD dus 2.

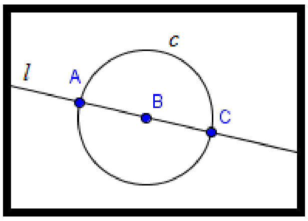
Het is belangrijk om te beseffen dat je altijd een standaardlijnstuk met lengte 1 nodig hebt om over lengten te kunnen praten. Dit is vergelijkbaar met de opbouw van het getalsysteem. Ook daar begin je met het getal 1, en van daaruit maak je andere getallen, door getallen bij elkaar op te tellen of van elkaar af te halen. In de meetkunde werken we alleen niet met getallen, maar met lijnstukken die een bepaalde lengte hebben.
Omdat we lijnstukken bij elkaar op kunnen tellen (O1) en van elkaar af kunnen halen (O2) kunnen we dus nieuwe lijnstukken maken. De vraag is nu: welke lijnstukken kunnen we allemaal maken?

<u>Opdracht 2.2</u>
Bedenk een aantal lengten van lijnstukken die we nu kunnen construeren vanuit een basislijnstuk $AB = 1$.

Stelling 2.1:
Stel dat we beginnen met een vlak met daarin twee punten A en B, met $AB = 1$.
Dan is het mogelijk om een lijnstuk te maken met lengte n. Hierin is n een willekeurig geheel positief getal.

Bewijs:
Je kunt het lijnstuk AB bij zichzelf optellen. Dit gaat als volgt:

Stap 1: Verleng lijnstuk AB door l te tekenen. (P1)
Stap 2: Teken cirkel c met middelpunt B, zodat A op de cirkel ligt. (P2)
Stap 3: Cirkel c snijdt lijn l in twee punten.
Het ene punt is A, noem het andere punt C. (P4)



Figuur 2.3: Stelling 2.1

Nu geldt: $BC = AB$.
Dus: $AC = AB + BC = 1 + 1 = 2$

Met behulp van (O1) kan je nu lijnstuk AB en AC bij elkaar optellen. Dan krijg je een lijnstuk met lengte 3. Op deze manier kan je altijd, als je een lijnstuk met een bepaalde lengte hebt, daar 1 bij optellen. Met een lijnstuk met lengte 3 kan je een lijnstuk met lengte 4 maken, enz.

Daarom het is mogelijk om alle positieve gehele getallen te construeren, vanuit een lijnstuk met lengte 1.

Het is belangrijk om een basislijnstuk met lengte 1 te hebben. Op basis van dit lijnstuk kun je andere lengten construeren met behulp van passer en liniaal.

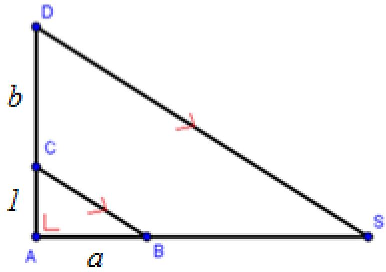
Hoewel het mogelijk is om elk positief geheel getal te construeren, kan het vaak sneller dan zoals in stelling 2.1 is beschreven. Om bijvoorbeeld een lijnstuk met lengte 4 te maken, is het niet nodig om eerst een lijnstuk met lengte 3 te maken, maar je kunt meteen het lijnstuk met lengte 2 bij zichzelf optellen. Zo is een lijnstuk met lengte 7 makkelijker te maken door eerst een lijnstuk van lengte 2 bij zichzelf op tellen, zodat je een lijnstuk van lengte 4 hebt. Als je vervolgens dit lijnstuk bij zichzelf optelt heb je een lijnstuk van lengte 8. Tenslotte gebruik je (O2) om een lijnstuk met lengte 7 te maken, door 1 van 8 af te trekken.

<u>Opdracht 2.3</u>
Construeer nu zelf een lijnstuk met lengte 15. Begin hierbij met een basislijnstuk AB met lengte 1. Probeer het zo efficiënt mogelijk te doen.

Met behulp van een basislijnstuk en (O1) en (O2) kunnen we nu dus allerlei lijnstukken maken. Tot nu toe zijn dit alleen lijnstukken waarvan de lengte een positief geheel getal is. Een lijnstuk met lengte ½ is bijvoorbeeld (nog) niet mogelijk.
We zullen kijken of er nog andere operaties (naast optellen en aftrekken) zijn, die we kunnen toepassen op lijnstukken. Op deze manier willen we onze verzameling construeerbare lengten verder uitbreiden.

Vermenigvuldigen

Omdat vermenigvuldigen eigenlijk herhaaldelijk optellen is, zou het ook mogelijk moeten zijn om (de lengten van) twee lijnstukken met elkaar te vermenigvuldigen.
Het is al mogelijk om te laten zien dat je kunt vermenigvuldigen met het getal 2. Door een lijnstuk bij zichzelf op te tellen verdubbel je namelijk de lengte.



Figuur 2.4: AS = ab

Om ook met andere getallen te kunnen vermenigvuldigen gebruiken we figuur 2.4.
In figuur 2.4 geldt: $AB = a$, $AD = b$ en $AC = 1$.
Ook zijn DS en BC evenwijdig.

<u>Opdracht 2.4</u>
Leg uit hoe punt S in figuur 2.4 geconstrueerd kan worden als je begint met drie lijnstukken: $AB = a$, $PQ = b$, en $XY = 1$

<u>Opdracht 2.5</u>
Leg uit hoe figuur 2.4 gebruikt kan worden om een lijnstuk met lengte $a \cdot b$ te maken.

Opdracht 2.5 laat de volgende operatie zien.

(O3) Bij twee lijnstukken $AB = a$ en $PQ = b$ kun je een punt S construeren zodat $AS = a \cdot b$

Operatie (O3) werkt alleen als we uitgaan van een basislijnstuk met lengte 1.

Het vermenigvuldigen van lijnstukken zorgt er niet voor dat we nu meer getallen kunnen construeren. Elke getal dat je kunt maken door te vermenigvuldigen kan je ook maken door getallen bij elkaar op te tellen. Het kan door vermenigvuldigen alleen wel vaak efficiënter.
Om met vermenigvuldigen efficiënt getallen te maken, moet je eerst de juiste delers zien te vinden. Het getal 9 is bijvoorbeeld deelbaar door 3. Door eerst het getal 3 te construeren kun je daarna het getal 9 maken (3 · 3 = 9).

<u>Opdracht 2.6</u>
Construeer nogmaals een lijnstuk met lengte 15. Begin met een basislijnstuk AB met lengte 1. Gebruik (O3) om het efficiënter te doen dan in opgave 2.3.

Om snel een bepaalde lengte te construeren is de eerste stap op zoek te gaan naar de delers van de gezochte lengte. Deze delers kun je vanaf het basislijnstuk maken door optellen en aftrekken. Je zult zien dat met kleine getallen het vermenigvuldigen slechts een beetje efficiënter is, maar pas bij grotere getallen is het verschil echt duidelijk. Probeer eens het getal 6561 te construeren, dan zul je zien dat je met vermenigvuldigen toch een stuk sneller bent.

Zelfs bij priemgetallen (dit zijn getallen die alleen deelbaar zijn door zichzelf en door 1, en verder geen delers hebben) kan vermenigvuldigen vaak een efficiënte manier zijn om deze getallen te maken. Omdat een priemgetal geen echte delers heeft, is het hierbij beter om een getal te maken dat dicht bij het priemgetal zit, en deze te construeren door te vermenigvuldigen. Vervolgens kun je met optellen (of aftrekken) op het priemgetal zelf uitkomen.

Een voorbeeld van een priemgetal is 257. Dit getal heeft dus geen echte delers. Maar het getal 256 is makkelijker te construeren:

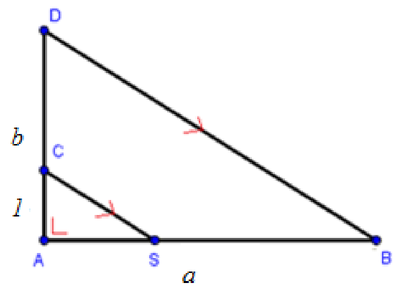
Stap 1: Construeer eerst een lijnstuk met lengte 2:	1 + 1 = 2.	(O1)
Stap 2: Construeer een lijnstuk met lengte 4:	2 + 2 = 4.	(O1)
Stap 3: Construeer een lijnstuk met lengte 16:	4 x 4 = 16.	(O3)
Stap 4: Construeer een lijnstuk met lengte 256:	16 x 16 = 256.	(O3)
Stap 5: Construeer een lijnstuk met lengte 257:	256 +1 = 257.	(O1)

Opdracht 2.7
Bedenk hoe je het getal 79 makkelijk kan construeren. Dit kan door 80 te construeren, maar het kan nog sneller door een ander getal te kiezen.

Vermenigvuldigen levert geen extra construeerbare lijnstukken op. Het is nu bijvoorbeeld nog steeds niet mogelijk om een lijnstuk met lengte ½ te construeren. Laten we daarom eens kijken of er nog meer operaties zijn die we kunnen toepassen op lijnstukken.

Delen

Met behulp van passer en liniaal is figuur 2.5 te maken. Dit figuur lijkt heel erg op figuur 2.4. Alleen in plaats van de lijn door C en B en de evenwijdige lijn door D, teken je nu de lijn door D en B en de evenwijdige lijn door C.
Dit levert opnieuw een punt S op.
In dit plaatje ligt punt S nu tussen A en B, in plaats van op het verlengde van AB. Dit komt omdat $b > 1$.



Figuur 2.5: AS = a/b

Opdracht 2.8
Als $b < 1$, dan ziet figuur 2.5 er iets anders uit. Maak een schets van figuur 2.5 in het geval $b < 1$

Met figuur 2.5 kun je de volgende operatie laten zien.

(O4) Bij twee lijnstukken $AB = a$ en $PQ = b$ kun je een punt S construeren zodat $AS = a/b$

Opdracht 2.9
Gebruik figuur 2.5 om te laten zien dat (O4) inderdaad mogelijk is.

Met behulp van (O4) is het mogelijk om twee lijnstukken door elkaar te delen. Hierdoor is het mogelijk om nieuwe lijnstukken te maken. Tot nu toe konden we alleen de positieve gehele getallen construeren. Door te kunnen delen zijn er nu ook andere getallen die we kunnen maken.

Opdracht 2.10
Geef drie voorbeelden van getallen die we kunnen construeren met (O4) die we daarvoor nog niet konden maken.

Het kunnen delen van lijnstukken levert wel een aantal problemen op.
In de eerste plaats maakt bij delen, net als bij aftrekken, de volgorde uit. Bij vermenigvuldigen en optellen maakt de volgorde niet uit. Immers: 3 x 2 = 6 en 2 x 3 = 6. Dit betekent voor de constructie van een vermenigvuldiging dat het niet uitmaakt op welke manier je de lijnstukken in figuur 2.4 gebruikt. Je kunt in figuur 2.4 de rol van a en b omdraaien, zonder het resultaat te veranderen.
Bij delen is dat niet het geval, want 6 / 3 = 2, maar 3 / 6 = ½. Het maakt bij deling dus wel uit op welke manier je de lijnstukken gebruikt. In figuur 2.5 ligt de teller (AB) horizontaal, en staat de noemer (AD) daar loodrecht op. Deze kun je niet zomaar met elkaar uitwisselen.

Een ander opmerking is dat de operatie (O4) alleen echte breuken oplevert. Omdat je deelt krijg je breuken als $^5/_6$, $^3/_4$, $^{12}/_{134}$ etc.... Toch is het ook mogelijk om bijvoorbeeld $2^3/_5$ te construeren. Dit kan natuurlijk door $^3/_5$ te construeren en dan deze bij een lijnstuk met lengte 2 op te tellen, maar het kan met (O4) in één keer.

Opdracht 2.11
Leg uit dat hoe je een getal als $2^3/_5$maakt met behulp van (O4).

Operatie (O4) maakt het dus mogelijk om getallen te construeren die tot nu toe niet mogelijk waren.
Met de vier operaties die we tot nu toe hebben is het mogelijk om, uitgaande van het getal 1 (ons basislijnstuk) alle positieve gehele getallen en alle positieve breuken te maken. Toch zijn er nog steeds getallen die we hiermee nog niet kunnen construeren.

Worteltrekken

Een voorbeeld van een getal dat niet te construeren is met behulp van (O1) t/m (O4) is √2.
Om te laten zien dat √2 niet te construeren is met behulp van (O1) t/m (O4) is het nodig om te bewijzen dat √2 niet als breuk of geheel getal te schrijven is.
Dat √2 geen geheel getal is, valt direct op als je dit probeert uit te rekenen met een rekenmachine.
Om te laten zien dat √2 geen breuk is, is meer nodig. Dit is een bewijs uit het ongerijmde. Met andere woorden: we proberen te bewijzen dat √2 wel een breuk is, en komen dan tot een tegenspraak.

Stelling 2.2:
√2 is niet te schrijven als breuk

Bewijs:
Stel dat √2 wel te schrijven zou zijn als breuk.
Dan bestaan er dus twee gehele positieve getallen p en q zodat $\sqrt{2} = p/q$.
Deze breuk is zo ver mogelijk vereenvoudigd. Dit betekent dat p en q dan niet allebei deelbaar door hetzelfde getal (behalve natuurlijk het getal 1).

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ kwadrateren geeft:

$2 = \frac{p^2}{q^2}$ Vermenigvuldigen met q^2 geeft:

$2q^2 = p^2$

Met andere woorden: p^2 is een even getal. En dus is p zelf ook een even getal.
Er bestaat dan een k zodat p te schrijven is als: $p = 2k$

$2q^2 = p^2$ Invullen van $p = 2k$

$2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$ Delen door 2 geeft:

$q^2 = 2k^2$

Met andere woorden: q^2 is een even getal. En dus is q zelf ook een even getal.
Als p en q allebei even zijn, dan zijn ze allebei deelbaar door 2.
Dit is in tegenspraak met de aanname dat p en q niet deelbaar zijn door hetzelfde getal.
Daarom is √2 niet te schrijven als breuk.

Stelling 2.2 geldt ook voor andere wortels. Sommige wortels, zoals √9, leveren mooie getallen op. Een wortel die niet op een geheel getal uitkomt, zoals √2, is ook niet te schrijven als breuk. Met behulp van (O1) t/m (O4) is het niet mogelijk om deze getallen (dus lijnstukken) te construeren.
Als we zouden kunnen worteltrekken, dan zou het dus mogelijk zijn om nog meer lijnstukken te construeren.

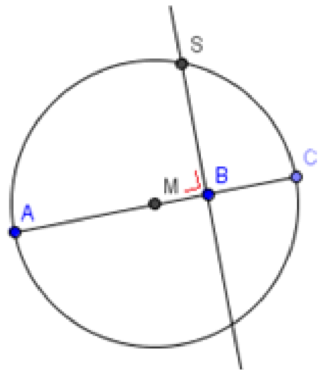
Opdracht 2.12
Geef een constructie voor een lijnstuk met lengte √2.
Begin hierbij met een basislijnstuk AB met lengte 1.

Deze √2 is niet de enige construeerbare wortel. Eigenlijk zijn alle wortels te construeren. Dit kan bijvoorbeeld met behulp van de stelling van Pythagoras. Zo is het met behulp van een lijnstuk met lengte √2 en een lijnstuk met lengte 1 mogelijk om een lijnstuk met lengte √3 te maken.

Je kunt altijd de stelling van Pythagoras gebruiken om wortels te construeren. Alleen is het gebruik van de stelling van Pythagoras op deze manier een omweg. Als je bijvoorbeeld √35 wil construeren, dan moet je eerst 35 schrijven als de som of verschil van twee kwadraten. Een mogelijke manier om 35 te schrijven is: $35 = 6^2 - 1^2$.
Dus door een rechthoekige driehoek te construeren met schuine zijde 6 en rechthoek zijde 1, is het mogelijk om een zijde van √35 te construeren.

Dit is redelijk omslachtig. Gelukkig kan het ook directer. Het is mogelijk om direct $\sqrt{a}$ te construeren als je een lijnstuk met lengte a hebt.

Om te kunnen worteltrekken gebruiken we figuur 2.6.
In dit figuur is $AB = a$, en $BC = 1$.
Het punt M is het midden van AC.



Figuur 2.6: BS = √a

Opdracht 2.13
Leg uit hoe in figuur 2.6 punt S geconstrueerd wordt als je begint met een lijnstuk AB en een lijstuk met lengte 1.

Opdracht 2.14
Bewijs dat ΔABS en ΔSBC gelijkvormig zijn, en gebruik dit om iets te zeggen over de lengte van BS.

In opdracht 2.13 en 2.14 heb je laten zien dat de volgende operatie mogelijk is:

(O5) Bij een lijnstuk $AB = a$ kun je een punt S construeren zodat $BS = \sqrt{a}$

Omdat het mogelijk is om te worteltrekken (met behulp van (O5)) zijn er nu meer lijnstukken te construeren die eerst niet mogelijk waren.
De constructie (O5) laat niet alleen toe om $\sqrt{a}$ te construeren, maar ook $\sqrt[4]{a}$ is mogelijk.

Opdracht 2.15
Leg uit waarom $\sqrt[4]{a}$ te construeren is met (O5)

Er is nu een flink aantal lengten te construeren. Het is mogelijk om (O1) t/m (O5) te combineren tot nieuwe lengten. Het is niet alleen mogelijk om gehele positieve getallen te construeren, ook breuken zijn mogelijk en zelfs wortels zijn nu construeerbaar.

Opdracht 2.16
Bedenk bij de volgende lengten of je ze nu met behulp van (O1) t/m (O5) al kan construeren.

a) $5 + \sqrt[4]{3 + \frac{6}{\sqrt{2}}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{6+\sqrt{2}}}{4}$ c) $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ d) $\frac{5}{6+\sqrt[6]{4}}$

Met behulp van operaties (O1) t/m (O5) en de constructies en procedures is het nu mogelijk om alle getallen te maken die zijn opgebouwd uit gehele positieve getallen, breuken en/of wortels. Maar is een derdemachtswortel construeerbaar? Is een zesdemachtswortel construeerbaar?
Hoewel we al een eind op weg zijn om te bepalen welke getallen construeerbaar zijn, weten we nog niet welke getallen niet construeerbaar zijn. Laten we daarom eens kijken of er misschien operaties zijn die we kunnen uitvoeren.

Uitbreiden

Met behulp van de operaties (O1) t/m (O5) is het mogelijk om een aantal lengten te construeren. Tot nu toe is het niet mogelijk om bijvoorbeeld bij een lijnstuk met lengte *a*, een lijnstuk van lengte $\sqrt[3]{a}$ te construeren. Maar waarom zou dit niet kunnen? Tot nu toe zorgden de nieuwe operaties ervoor dat we steeds meer nieuwe lengten konden construeren. Door te kunnen delen was het bijvoorbeeld mogelijk om een lijnstuk met lengte ½ te maken, iets dat zonder (O4) niet mogelijk was. Op dezelfde manier zorgde (O5) ervoor dat het mogelijk was om bijvoorbeeld √5 te construeren. Het ligt dan voor de hand om te denken dat het toevoegen van nieuwe operaties er ook voor kan zorgen dat we onze verzameling van construeerbare lengten verder uit te breiden is.
Laten we dit eens onderzoeken.

Kijk nog eens terug naar de vijf procedures die zijn toegestaan. Eigenlijk zeggen de vijf procedures het volgende:

Het is mogelijk om lijnen en cirkels te construeren,
en het is mogelijk om de snijpunten van deze figuren te bepalen.

Deze snijpunten zijn dé manier om nieuwe punten toe te voegen. Dat is ook precies wat we met behulp van de operaties doen: door nieuwe getallen te maken, maken we nieuwe lijnstukken. Deze lijnstukken hebben een lengte. Door nieuwe punten te maken, worden er eigenlijk dus nieuwe getallen geconstrueerd. De snijpunten van cirkels en lijnen zijn daarom belangrijk in de constructie van nieuwe getallen.

Laten we eens kijken welke operaties we nodig hebben voor het bepalen van de snijpunten van lijnen en cirkels.

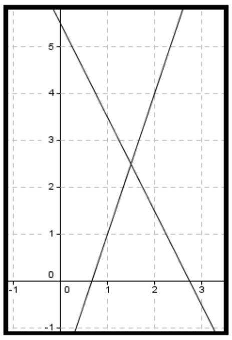
Laten we simpel beginnen en kijken naar een rechte lijn:

Als we kijken naar een assenstelsel, dan wordt een rechte lijn gegeven door de formule $y = ax + b$. Hierin is a het hellingsgetal, en b het startgetal van deze lijn. Het hellingsgetal a bepaalt hoe 'steil' de lijn loopt. Bijna alle rechte lijnen kunnen op deze manier met zo'n formule worden weergegeven. De enige uitzondering hierop zijn lijnen die verticaal lopen. Als een lijn verticaal loopt dan is er sprake van een oneindig grote helling, en dan ook een oneindig groot hellingsgetal. Verticale lijnen hebben dan ook als formule: $x = p$, waarbij p de positie van de lijn aangeeft.

Stel dat we nu twee lijnen hebben. Dan hebben we ook twee formules. Volgens (P3) is het nu mogelijk, als beide lijnen niet evenwijdige lopen, om het unieke snijpunt van deze lijnen te bepalen.

<u>Opdracht 2.17</u>
Gegeven zijn de lijnen $l: y = 3x - 2$ en $m: y = -2x + 5{,}5$.
a) Leg uit waarom deze lijnen niet evenwijdig lopen.

b) Gebruik de balansmethode om het snijpunt van beide lijnen te vinden.
(geef zowel de x - als de y-coördinaat)



Figuur 2.7: Opdracht 2.17

In opdracht 2.17 heb je een vergelijking opgelost om de snijpunten van twee lijnen te vinden. Bij de balansmethode gebruik je alleen optellen, aftrekken, en delen. Bij het bepalen van het snijpunt van twee lijnen heb je dus voldoende aan de operaties die we tot nu toe hebben.

We gaan nu kijken naar een cirkel.
In een assenstelsel wordt een cirkel gegeven door de formule $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$. Hierin is (p, q) het middelpunt van de cirkel, en r de straal.
Deze formule is om te schrijven tot: $y = \pm\sqrt{r^2 - (x-p)^2} + q$.

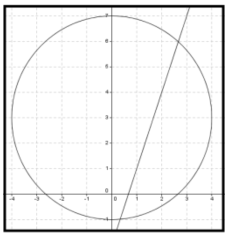
<u>Opdracht 2.18</u>
Laat zien hoe je $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ omschrijft tot $y = \pm\sqrt{r^2 - (x-p)^2} + q$.

Bij de formule van de cirkel ontstaan er bij worteltrekken altijd twee wortels: de positieve en negatieve wortel. In een assenstelsel geeft de positieve wortel de bovenste helft van de cirkel, en de negatieve wortel de onderste helft van de cirkel.
Als we nu een lijn en een cirkel hebben, dan is het mogelijk om met behulp van (P4) de snijpunten te bepalen.

Let hierbij dat er drie mogelijkheden zijn:
- Er zijn twee snijpunten
- Er is maar één snijpunt
- Er zijn geen snijpunten

<u>Opdracht 2.19</u>
Gegeven zijn de lijn $l: y = 3x - 2$ en de cirkel $c: x^2 + (y-3)^2 = 16$

Bepaal de snijpunten (geef zowel de x - als de y -coördinaten van deze snijpunten. Rond je antwoord af op twee decimalen)



Figuur 2.8: Opdracht 2.19

Bij het bepalen van de snijpunten van een lijn en een cirkel heb je de abc-formule nodig gehad.
Bij het gebruik van de abc-formule heb je te maken met een discriminant D. Deze discriminant bepaalt het aantal oplossingen van de vergelijking:
Als D > 0, dan zijn er twee oplossingen.
Als D = 0, dan is er één oplossing.
Als D < 0, dan zijn er geen oplossingen.
Dit klopt ook met de drie mogelijkheden voor het aantal snijpunten van een lijn en een cirkel.

De abc-formule maakt gebruik van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en worteltrekken. Deze vijf operaties zijn allemaal mogelijk (met behulp van (O1) t/m (O5)). Ook bij het bepalen van de snijpunten van een lijn een cirkel zijn er daarom geen extra operaties nodig.

Tot nu toe hebben we voor het bepalen van de snijpunten nog geen andere operaties nodig gehad dan de vijf operaties die we tot nu toe al hebben.

Stel nu dat we twee cirkels hebben.
Ook dan is het mogelijk om de snijpunten te bepalen (P5).

Voorbeeld 2.2:
Gegeven zijn de twee cirkels $c: (x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$ en de cirkel $d: x^2 + (y-3)^2 = 16$

Het wegwerken van de haakjes geeft:

$$c: x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 16$$
$$d: x^2 + y^2 - 6y + 9 = 16$$

Als we nu de vergelijking van d van de vergelijking van c afhalen dan krijgen we:

$c - d$: $-6x + 10y + 4 = 0$ en dat is weer te schrijven als: $y = 0.6x - 0.4$

<u>Opdracht 2.20</u>
Kijk eens naar het voorbeeld hierboven.
Vervang $y = 1 - 1{,}5x$ in de formule voor de cirkel d, en los de vergelijking op.

We hebben nu laten zien dat de snijpunten van lijnen en cirkels te vinden zijn met optellen, vermenigvuldigen, delen, aftrekken en worteltrekken. Voor het maken van nieuwe punten (met passer en liniaal) zijn de vijf operaties voldoende.

Wat betekent dit nu voor de getallen die construeerbaar zijn? Sommige getallen kunnen we met behulp van de vijf operaties construeren. In opdracht 2.16 heb je hier al over nagedacht.
Hoe zit dan met getallen die niet construeerbaar zijn? Is bijvoorbeeld $\sqrt[3]{2}$ construeerbaar?
We hebben geen operatie die direct $\sqrt[3]{2}$ geeft, maar is het misschien niet mogelijk om dit getal te construeren door een combinatie van operaties te gebruiken? Er is immers ook geen constructie voor $\sqrt[4]{2}$, maar toch is dit getal te construeren door twee keer (O5) toe passen.

Laten we eens kijken naar de $\sqrt[3]{2}$.

De derdemachtswortel

Er gaat een legende rond de derdemachtswortel van twee:

Toen er eens een plaag was op het Griekse eiland Delos, wendden de inwoners zich tot de goden. De goden wilden de plaag wel afwenden als de inwoners een altaar zouden bouwen dat twee keer zo groot was als het huidige altaar, dat de vorm van een kubus had. Eerst was er onenigheid over de betekenis van deze opdracht. Wat bedoelden de goden met een altaar dat twee keer zo groot moest worden? Bedoelden ze dat de hoogte twee keer zo groot moet worden, of dat alle zijden twee keer zo groot gemaakt moesten worden? Uiteindelijke besloten ze om een altaar te maken dat twee keer zo hoog, twee keer zo lang en twee keer zo breed was. De inhoud van het altaar was nu acht keer zo groot als het origineel.
Hoewel de inwoners dit gedaan hadden, bleef de plaag volhouden. Dit kwam omdat de goden een altaar wilden waarvan de inhoud twee keer zo groot was als het origineel.

<u>Opdracht 2.21</u>
Lees de legende hierboven. Stel dat het oorspronkelijke altaar een kubus was van 1 meter hoog. Leg uit, wat deze legende te maken heeft met $\sqrt[3]{2}$.

Veel wiskundigen hebben zich sinds de legende van het eiland Delos bezig gehouden met de vraag of $\sqrt[3]{2}$ te construeren is met passer en liniaal. Het is pas sinds de ontwikkeling van de Galoistheorie dat echt bewezen is dat $\sqrt[3]{2}$ niet te construeren is met passer en liniaal. Het gaat te ver om deze theorie hier nu tot te lichten, maar het gevolg van de Galoistheorie is wel dat we alleen lijnstukken kunnen construeren die zijn opgebouwd met de vijf operaties.

Construeerbaarheid

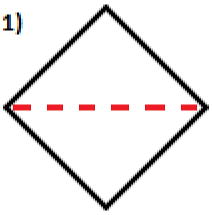
We hebben nu genoeg informatie om iets te zeggen over de construeerbaarheid van lengten van lijnstukken. Dankzij de operaties (O1) t/m (O5) kunnen we alle getallen construeren die zijn opgebouwd uit wortels, vermenigvuldigingen, optellingen en breuken.

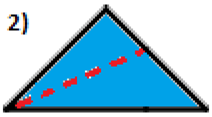
<u>Opdracht 2.22</u>
De gulden snede is een getal: $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$
Leg uit dat een lijnstuk met lengte φ te construeren is.
Geef een constructie beginnend bij een lijnstuk met lengte 1.

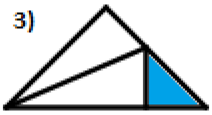
3. Vouwen

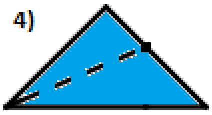
Opdracht 3.1

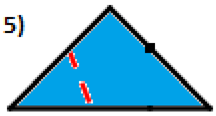
Hier zie je een manier om een emmer te vouwen. Vouw deze emmer. Je hebt hiervoor een vierkant vouwblaadje nodig. . Als de voor- en achterkant van het vouwblaadje verschillende kleuren heeft, dan krijgt de emmer een gekleurd patroon.

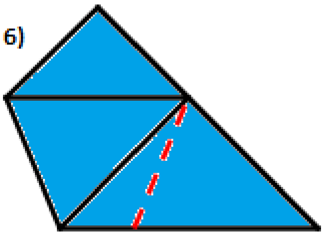
1)

Vouw het blad diagonaal door midden.

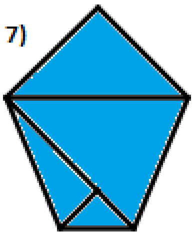
2)

Vouw de voorste flap zodat de linkerkant op de onderkant valt.

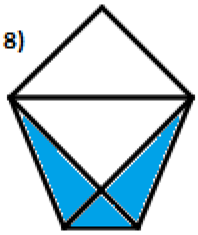
3)

Vouw weer terug.

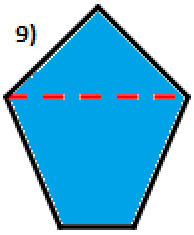
4)

Markeer het snijpunt van de vouw met de rechterkant.

5)

Vouw het linker hoekpunt naar dit snijpunt.

6)

Vouw het rechter hoekpunt op dezelfde manier naar links.

7)

Vouw de voorste flap naar beneden.

8)

Draai het figuur om.

9)

Vouw de flap naar beneden.

10)

De emmer is klaar.

Op deze manier is het mogelijk om een emmer te vouwen.

Naast het feit dat deze vouwkunst figuren en object oplevert, zit er ook een wiskundige component aan het vouwen van papier. Aan de hand van het voorbeeld van deze emmer zullen deze wiskundige aspecten aan het licht komen.

Objecten op elkaar vouwen

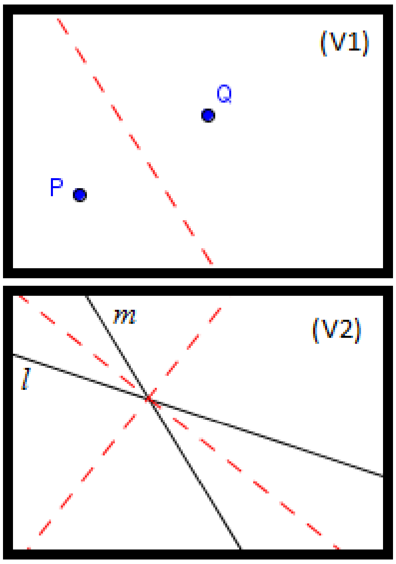
Het vouwen van de emmer vergt in het begin twee technieken:

- Je moet punten op elkaar kunnen vouwen. In stap 1 en 6 vouw je bijvoorbeeld twee hoekpunten op elkaar. In stap 5 vouw je een hoekpunt op een kruispunt.
- Je moet lijnen op elkaar kunnen vouwen. In stap 2 vouw je de rand van het blaadje op de onderkant.

Dit brengt ons tot twee vouwconstructies die mogelijk zijn:

(V1) Gegeven twee (verschillende) punten P en Q. Het is dan mogelijk om punt P op punt Q te vouwen.

(V2) Gegeven twee snijdende lijnen l en m. Het is dan mogelijk om l op m te vouwen.



Figuur 3.1: (V1) en (V2)

In het voorbeeld van de emmer was één van de punten altijd een hoekpunt. Hierdoor is het makkelijker te zien waar je punt terecht komt. Als punt P (of Q) niet op de rand van je figuur ligt is het wat lastiger om de goede vouw voor elkaar te krijgen. Het is dan het beste een beetje te schuiven en proberen totdat je de goede vouw gevonden hebt.
Ook als één van de lijnen (l of m) niet de rand van het papier is, maar halverwege het papier loopt, is het soms wat lastig om de goede vouw te vinden. Als je zo'n vouw maakt buig je het papier dubbel, en je probeert een beetje tot dat je de goede vouw gevonden hebt, dan pas maak je de vouw scherp.

De twee vouwconstructies (V1) en (V2) hebben iets gemeenschappelijk: De vouw is een conflictlijn.
Een conflictlijn is de verzameling van punten die op gelijke afstand van twee objecten liggen. Zo is bijvoorbeeld een middelloodlijn van twee punten A en B een conflictlijn, want elk punt op de middelloodlijn ligt even ver van A als van B.
(V1) vouwt een middelloodlijn. Dit is te zien als je papier dubbelgevouwen hebt. In dichtgevouwen toestand liggen beide punten op elkaar. Dan heeft de vouw gelijke afstand tot beide punten (want de punten liggen op elkaar). Als je het papier weer open klapt dan blijven alle punten op de vouw gelijke afstand hebben tot beide punten.
(V2) vouwt een bissectrice (ofwel deellijn).

Opdracht 3.2
Leg uit dat vouw (V2) inderdaad een bissectrice oplevert.

Er zijn twee manieren om l en m op elkaar te vouwen. Dit levert dan ook twee verschillende vouwen op. In de praktijk zal je vaak maar één van de twee vouwen maken. Maar beide vouwen zijn (met behulp van (V2)) mogelijk.

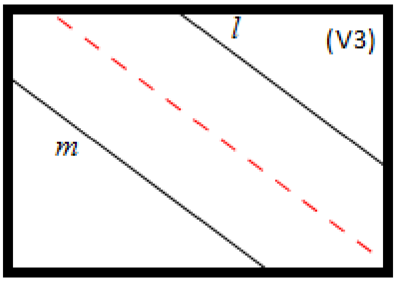
Twee lijnen op elkaar vouwen

We hebben al gezien dat het mogelijk is om twee lijnen op elkaar te vouwen: (V2).
Stel nu dat we twee lijnen hebben die evenwijdig lopen, zoals de boven en onderkant van een vouwblaadje.

> <u>Opdracht 3.3</u>
> Gebruik een rechthoekig stuk papier om te laten zien dat je ook twee evenwijdige lijnen op elkaar kan vouwen.

Opdracht 3.3 geeft de volgende vouwconstructie:

(V3) Gegeven twee evenwijdige lijnen l en m. Het is dan mogelijk om l op m te vouwen.



Figuur 3.2: (V3)

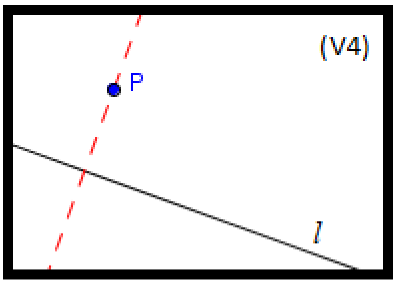
In opdracht 3.3 heb je de randen van het papier gebruikt om (V3) te laten zien. Ook als de lijnen halverwege je papier lopen is het nog steeds mogelijk om beide lijnen op elkaar te vouwen. Alleen is het dan wat meer werk om de juiste vouw te vinden.
Net als bij (V1) en (V2) kun je de vouw het beste vinden door het papier voorzichtig dubbel te klappen en proberen te schuiven totdat je de juiste vouw gevonden hebt.

Er is nog een bijzondere situatie met twee lijnen. Wat gebeurt er als de twee lijnen samenvallen?
Met andere woorden: wat gebeurt er met (V2) als l en m dezelfde lijn zijn?
In dat geval vouw je met (V2) de lijn l op zichzelf. Eigenlijk vouw je de lijn dubbel. Dit levert dan een vouw op die loodrecht staat op de gegeven lijn l.

> <u>Opdracht 3.4</u>
> Als je een lijn l op zichzelf vouwt, dan staat deze vouw loodrecht op lijn l.
> Leg uit waarom dit altijd zo is.

Deze loodlijn is niet uniek. Je kunt een lijn op elke plek dubbel vouwen. Als je nu naast de lijn l nog een punt P hebt, dan is het mogelijk om de lijn op zichzelf te vouwen, zodat de vouw door punt P gaat.
Dit levert de volgende vouwconstructie op:

(V4) Gegeven lijn l en een punt P. Het is dan mogelijk om l op zichzelf te vouwen zodat de vouw door P gaat.



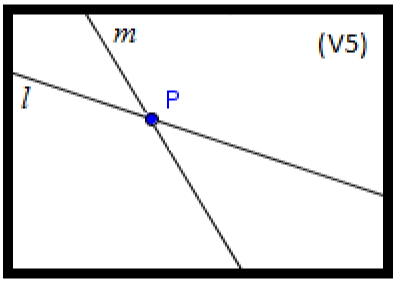
Figuur 3.3: (V4)

In de praktijk is deze vouw te vinden door uit te proberen. Je vouw lijn l dubbel en schuift een beetje, net zolang tot de vouw door P gaat. Dit punt P mag zowel op de lijn als buiten de lijn liggen. Als punt P op lijn l ligt, dan is (V4) vergelijkbaar met (C2), en als punt P niet op lijn l ligt, dan is (V4) vergelijkbaar met (C1).
De vouw die je maakt met (V4) bestaat altijd, en is uniek.

Nieuwe punten en lijnen

Kijk nog eens terug naar de gevouwen emmer van opdracht 3.1. In stap 2 en 3 maak je een vouw door het papier te vouwen en weer open te klappen. Deze vouw gebruik je om in stap 4 een punt te hebben zodat je in stap 5 het hoekpunt daar naartoe kunt vouwen.
Eigenlijk is dit een constructie die we allang kennen: (P3). Bij twee snijdende lijnen kunnen we het (unieke) snijpunt bepalen. Dit kan ook bij het vouwen.

(V5) Gegeven twee verschillende snijdende lijnen l en m. Het is dan mogelijk om het unieke snijpunt P van deze lijnen te bepalen (als deze bestaat).

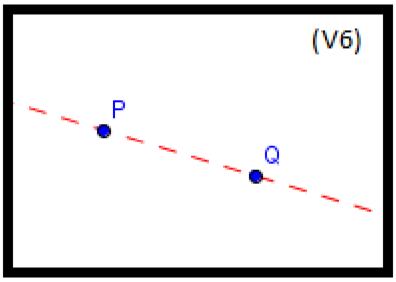


Figuur 3.4: (V5)

Dit snijpunt is (zoals eerder gezegd) te vinden zonder een vouw te maken. Toch is het goed dit als vouwconstructie te definiëren, zodat we straks een lijst met 'spelregels' hebben voor het kunnen vouwen van objecten en figuren.

Eigenlijk zorgt (V5) ervoor dat je met behulp van twee lijnen een nieuw punt maakt. Analoog hieraan willen we ook met twee punten een lijn kunnen maken. Dit kan ook. Je kunt met behulp van twee punten een nieuwe lijn maken. Dit hebben we al gezien in (P1). Met behulp van een liniaal kun je de unieke lijn door twee punten construeren. Dit kan ook met een vouw.

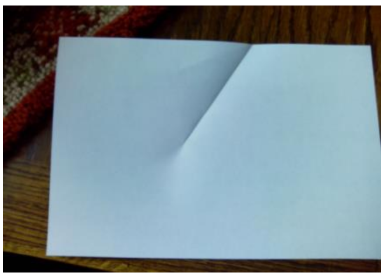
(V6) Gegeven twee (verschillende) punten P en Q. Dan is het mogelijk om de unieke rechte lijn l te vouwen die door beide punten gaat.



Figuur 3.5: (V6)

Hoewel deze constructie ook mogelijk was met (P1), willen we deze constructie ook graag toevoegen aan onze 'spelregels' voor het vouwen.

Het resultaat van (V6) is een rechte lijn. Dit is altijd het geval als je een vouw maakt: elke vouw levert een rechte lijn op. Maar het is niet altijd nodig om de hele vouw te maken. Als je het papier buigt, en tevreden bent met de vouw, dan is het niet nodig om het papier helemaal glad te strijken, maar je kan ook maar een gedeelte van de vouw glad strijken. Dit levert dan een halve lijn, of een lijnstuk op. Voor de wiskunde achter het vouwen, maakt dit geen verschil uit, omdat je elk lijnstuk kan verlengen tot een hele lijn (door (V6)). In de praktijk kan het soms handig zijn om alleen dat gedeelte van de lijn te vouwen dat je nodig hebt.


Figuur 3.6: Deel van een lijn.

Met twee punten kunnen we een lijn maken (V6) en met twee lijnen kunnen we een nieuw punt maken (V5). Dus als we punten combineren krijgen we een lijn, en als we lijnen combineren, dan krijgen we een punt. Wat gebeurt er als we punten en lijnen gaan combineren?

Punten op lijnen vouwen

Opdracht 3.5
Gegeven een lijn r, en twee punten P en Q die allebei niet op r liggen. Het is nu mogelijk om de cirkel c, met middelpunt Q en door P te construeren met een passer (P2).

Er zijn dan drie situaties mogelijk:
- De cirkel c snijdt de lijn r in twee punten.
- De cirkel c raakt de lijn r in één punt.
- De cirkel c snijdt de lijn r helemaal niet.

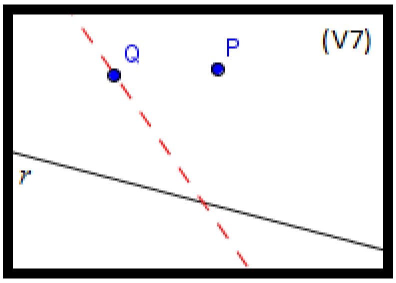
Maak van elk van deze drie situaties een schets.
Wat weet je van de afstand tussen Q en P en tussen Q en r in deze drie situaties?

Opdracht 3.6
Kijk eens naar de drie situaties van opdracht 3.5. In de eerste situatie zijn er twee snijpunten. Noem deze snijpunten A en B, dit kan bet behulp van (P4). Vouw nu P op A en P op B.
Dit levert twee vouwen op. Wat valt je op aan deze vouwen?
Geldt dit ook voor de vouw die je maakt in de tweede situatie van opdracht 3.5?

Opdracht 3.7
Leg uit waarom Q altijd op de vouw ligt.

In opdracht 3.6 vouw je eigenlijk een punt op een lijn zodat de gevonden vouw door een ander punt gaat. In deze opdracht heb je eerst met een passer de punten A en B gezocht, zodat je weet waar je punt P naar toe moet vouwen.
Het is niet noodzakelijk om die punten A en B van te voren te bepalen. Je kunt het punt P op de lijn r vouwen zodat de vouw door punt Q gaat, zonder eerst de cirkel te tekenen:

(V7) Gegeven een lijn r en twee punten P en Q niet op deze lijn. Dan kan je het punt P op de lijn r vouwen zodat de vouw door Q gaat.

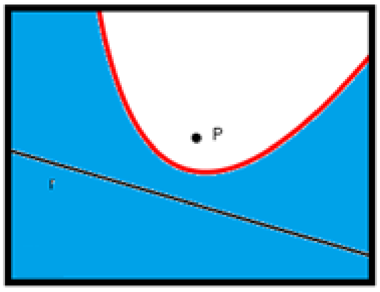


Figuur 3.7: (V7)

In de praktijk zal deze vouw niet in één keer te vinden zijn. Deze vouw vind je door het te proberen. Je zorgt er voor dat punt P op de lijn terecht komt, en dan 'schuif' je punt P over de lijn net zolang tot de vouw door Q gaat. In sommige gevallen is er maar één vouw, in sommige gevallen zijn er twee vouwen, en in sommige gevallen zijn er geen vouwen. Dit hangt af van de afstand tussen P en Q en tussen Q en r. (Zie opdracht 3.5)

In figuur 3.8 zie je een lijn r, en een punt P.
Het vlak is in drie delen verdeeld:

- Blauw: Als Q in dit gebied ligt, dan zijn er twee vouwen te maken met (V7)
- Rood: Als Q in dit gebied ligt, dan is er maar één vouw te maken met (V7)
- Wit: Als Q in dit gebied ligt, dan zijn er geen vouwen te maken met (V7)



Figuur 3.8: Een parabool?

Bij het rode gebied heeft de cirkel met middelpunt Q door P precies één snijpunt met de lijn r.
Met andere woorden: De afstand van Q tot P is gelijk aan de afstand van Q tot r.

<u>Opdracht 3.8</u>
Het rode gebied lijkt de vorm van een parabool te hebben. Leg uit dat dit inderdaad een parabool is.

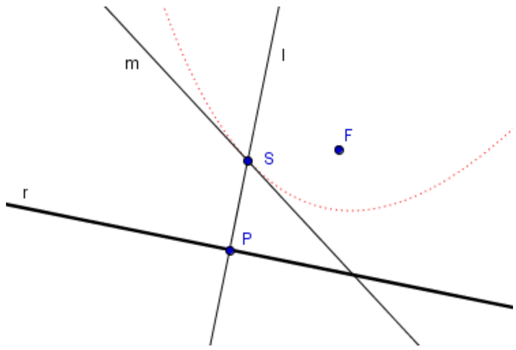
Als je een parabool met een passer en liniaal wil construeren, dan doe je dat niet, zoals een lijn of een cirkel, in één keer, maar punt voor punt. Hieronder zie je hoe zo'n punt van de parabool vindt.

Constructie van een parabool (met passer en liniaal)

Gegeven een brandpunt F en een richtlijn r.
Construeer de parabool (als conflictlijn van F en r)

1) Kies een willekeurig punt P op r.
2) Construeer de loodlijn l op r door P.
3) Construeer de middelloodlijn$m$ van P en F
4) Noem S het snijpunt van l en m.

Het punt S ligt op de parabool. Door verschillende punten P op de lijn r te kiezen, wordt op deze manier (punt voor punt) de parabool geconstrueerd.



Figuur 3.9: Constructie van een parabool.

Met vouw (V7) vouw je lijn m in de constructie hierboven.
Deze vouw blijkt een raaklijn te zijn aan de parabool.

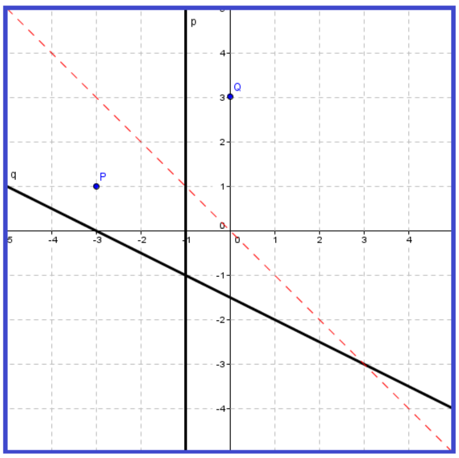
<u>Opdracht 3.9</u>
Leg uit waarom de vouw van (V7) een raaklijn is.

Een laatste vouwconstructie

<u>Opdracht 3.10</u>
Hiernaast zie je een assenstelsel.
De x- en y as lopen van -5 tot 5
In dit assenstelsel staan de volgende 4 figuren:
- De punten P (-3, 1) en Q (0, 3)
- De lijn q door (-3, 0) en (3, -3)
- De lijn p: $x = -1$

Dit assenstelsel staat ook op werkblad B.
Gebruik dit figuur op werkblad B. Vouw dit figuur diagonaal (langs de rode stippellijn) doormidden.

Laat zien dat door deze vouw P op p gevouwen wordt, en tegelijk Q op q terecht komt.



Figuur 3.10: Opdracht 3.10

Opdracht 3.11
Op werkblad B staat een tweede assenstelsel.
De x - en y- as lopen van -5 tot 5.
Hierin staan de volgende 4 figuren:
- De punten P (-3, -1) en Q (3, 1)
- De lijn q door (-4, 2) en (0, -2)
- De lijn p: $y = 3$

Probeer het figuur op het werkblad met één vouw zo te vouwen zodat P op p en Q op q terecht komt.

De vouwconstructie die we in opdracht 3.10 en 3.11 uitvoeren kunnen we als volgt omschrijven:

(V7+) Gegeven twee punten P en Q en twee lijnen p en q. Dan is het mogelijk om P op p en Q op q te vouwen met dezelfde vouw.

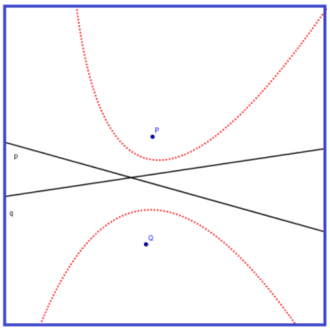
Eigenlijk is (V7) een bijzonder geval van deze vouwconstructie:

Opdracht 3.12
Leg uit waarom (V7) een bijzonder geval is van (V7+)

Met (V7) vouw je eigenlijk de raaklijn aan een parabool. In het geval van (V7+) heb te je maken met twee punten en twee lijnen. Je kunt dan ook twee parabolen construeren. Je hebt dan te maken met een parabool tussen p en P en een parabool tussen q en Q.

Opdracht 3.13
Hiernaast zie je twee punten P en Q en twee lijnen p en q.
Ook zijn de parabolen die daarbij horen gegeven. Dit figuur staat ook op werkblad C.
Vouw P op p, en Q op q (met (V7+)). Er zijn in dit geval twee vouwen te maken.

Wat is er bijzonder aan deze vouwen?



Figuur 3.11: Opdracht 3.13

Dit alles levert ons zeven (of eigenlijk acht) vouwconstructies op. Met deze 'spelregels' kan je, net als bij de vijf procedures met passer en liniaal nieuwe complexere constructies maken.

Spelregels bij het vouwen

Dit alles levert de volgende vouwconstructies op:

(V1) Gegeven twee (verschillende) punten P en Q. Het is dan mogelijk om punt P op punt Q te vouwen.

(V2) Gegeven twee snijdende lijnen l en m. Het is dan mogelijk om l op m te vouwen.

(V3) Gegeven twee evenwijdige lijnen l en m. Het is dan mogelijk om l op m te vouwen.

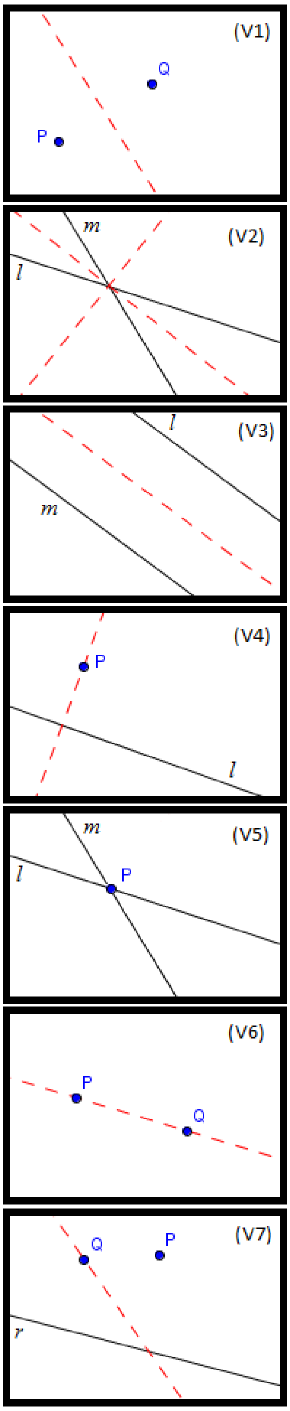
(V4) Gegeven lijn l en een punt P. Het is dan mogelijk om l op zichzelf te vouwen zodat de vouw door P gaat.

(V5) Gegeven twee verschillende snijdende lijnen l en m. Het is dan mogelijk om het unieke snijpunt P van deze lijn te bepalen (als deze bestaat).

(V6) Gegeven twee (verschillende) punten P en Q. Dan is het mogelijk om de unieke rechte lijn l te vouwen die door beide punten gaat.

(V7) Gegeven een lijn r en twee punten P en Q niet op deze lijn. Dan kan je het punt P op de lijn r vouwen zodat de vouw door Q gaat.

(V7+) Gegeven twee punten P en Q en twee lijnen p en q. Dan is het mogelijk om P op p en Q op q te vouwen met dezelfde vouw.



Figuur 3.11: Vouwconstructies

Deze acht vouwconstructies kun je combineren tot complexere constructies, net zoals (P1) t/m (P5) gecombineerd konden worden tot complexere constructies. Van de constructies met passer en liniaal hebben we inmiddels een aardig beeld van wat er allemaal mogelijk is. We zullen nu kijken of we ook iets kunnen zeggen over de mogelijkheden die er zijn met vouwconstructies.

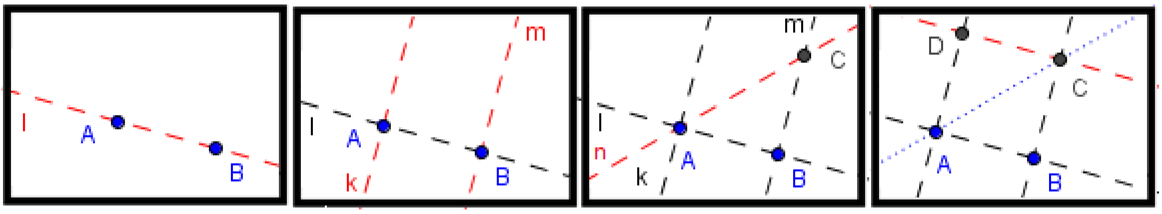
4. Passer en liniaal door te vouwen

Een vierkant

In hoofdstuk 1 hebben we vijf procedures opgesteld die mogelijk zijn met passer en liniaal. Aan de hand daarvan hebben we in hoofdstuk 2 laten zien welke operaties er nu allemaal mogelijk zijn met die vijf procedures. Aan het eind van hoofdstuk 2 hebben we iets kunnen zeggen over welke lijnstukken er construeerbaar zijn met passer en liniaal.
In hoofdstuk 3 hebben we acht vouwconstructies opgesteld. Hiermee kan je natuurlijk ook allerlei complexere figuren vouwen maken. In het voorbeeld hieronder zie je een manier om een vierkant te vouwen.

Voorbeeld 4.1
Gegeven een vlak met daarin twee punten: A en B.
Dan is het mogelijk om vierkant $ABCD$ te vouwen.

Stap 1: Vouw de lijn l door A en B. (V6)
Stap 2: Vouw lijn m, door l op zichzelf te vouwen door B. (V4)
Stap 3: Vouw lijn k, door l op zichzelf te vouwen door A. (V4)
Stap 4: Vouw lijn n, door k op l te vouwen. (V2)
Hier ontstaan eigenlijk twee vouwen.
Het is voldoende om er slechts één te vouwen.
Stap 5: Noem C het snijpunt van n en m. (V5)
Stap 6: Vouw lijn p, door m op zichzelf te vouwen door C (V4)
Stap 7: Noem D het snijpunt van p en k (V5)



Figuur 4.1: De constructie van een vierkant.

Vierhoek ABCD is een vierkant.

Opgave 4.1
Een vierhoek is een vierkant als alle hoeken 90^0 zijn, en alle zijden even lang zijn. Bekijk voorbeeld 4.1 en bewijs dat vierhoek $ABCD$ inderdaad een vierkant is.

Opgave 4.2
Het is ook mogelijk om, beginnend met een lijnstuk AB een vierkant $APBQ$ te vouwen zodat AB een diagonaal van dit vierkant is.
Geef een stappenplan voor het vouwen van dit vierkant.

Het is (zie opgave 4.1 en 4.2) mogelijk om een vierkant te vouwen. Dit was ook mogelijk met passer en liniaal (zie opdracht 1.4). Zo zijn er nog meer constructies die zowel met passer en liniaal als met behulp van vouwconstructies mogelijk zijn. Denk ook bijvoorbeeld aan loodlijnen. Dit kon met passer en liniaal (zie (C1) en (C2)), maar ook met vouwconstructies (zie (V4)).

Het zou mooi zijn als we konden aangeven wat er allemaal mogelijk is met vouwconstructies. We hebben met passer en liniaal al laten zien dat het mogelijk is om bijvoorbeeld (de lengten van) lijnstukken bij elkaar op te tellen (O1) of met elkaar te vermenigvuldigen (O4). Zijn dit soort operaties ook mogelijk met vouwen?

Voordat we gaan kijken wat er nu precies allemaal mogelijk is met vouwconstructies, zullen we kijken naar welke constructies met passer en liniaal ook te doen zijn door papier te vouwen. Dit doen we door te laten zien dat de vijf procedures (P1) t/m (P5) allemaal mogelijk zijn met behulp van vouwconstructies. Als we elk van deze procedures ook kunnen 'nabootsen' met vouwen, dan kunnen ook alle combinaties van deze procedures (zoals de constructies (C1) t/m (C4) en de operaties (O1) t/m (O5)) met behulp van vouwconstructies gemaakt worden. Kortom: als alle vijf de procedures mogelijk zijn met vouwconstructies, dan is alles wat mogelijk is met passer en liniaal ook mogelijk met vouwconstructies.

(P1) als combinatie van vouwconstructies

Bij twee (verschillende) punten P en Q kan je met een liniaal de unieke rechte lijn l tekenen die door beide punten gaat.

(P1) is mogelijk met vouwconstructies. Dit is dezelfde constructie als (V6).
In plaats van (P1) is het ook daarom mogelijk om (V6) te gebruiken.

(P2) als combinatie van vouwconstructies

Bij twee (verschillende) punten P en Q kan je met een passer de unieke cirkel c tekenen met P als middelpunt zodat Q op de cirkel ligt.

Het is niet mogelijk een cirkel in zijn geheel te vouwen. Een vouw levert een (deel van een) rechte lijn op, en een cirkel is een gebogen lijn. Toch kun je met vouwconstructies een heel eind komen. Het idee is dat we met behulp van de vouwconstructies een cirkel nabootsen. Dit gaan we doen door te laten zien dat het mogelijk is om de eigenschappen van een passer met behulp van vouwen uit te voeren.

Een van de eigenschappen van een passer is dat het mogelijk is om lijnstukken te verplaatsen.
Dit willen we graag ook kunnen doen met vouwconstructies.

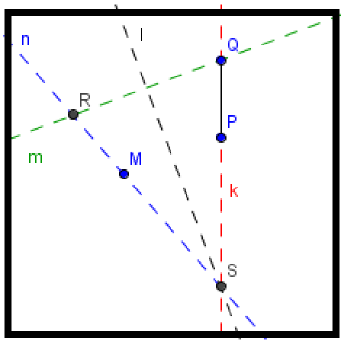
Dus: Gegeven een punt M, en een lijnstuk PQ, (zodat M niet op het verlengde van PQ ligt). We willen dan lijnstuk PQ verplaatsen zodat P op M terecht komt. We zoeken dus een punt R, met behulp van vouwconstructies, zodat $MR = PQ$

Een manier om dit te doen, is door P op M te vouwen.

Voorbeeld 4.2
Gegeven een punt M, en een lijnstuk PQ,
zodat M niet op het verlengde van PQ ligt

Stap 1: Vouw lijn l, door M op P te vouwen. (V1)
Stap 2: Vouw lijn k, door P en Q. (V6)
Stap 3: Noem S het snijpunt van k en l. (V5)
Stap 4: Vouw lijn n, door S en M. (V6)
Stap 5: Vouw lijn m, door l op zichzelf te vouwen door Q. (V4)
Stap 6: Noem R het snijpunt van l en n. (V5)

In het voorbeeld geldt dat $MR = PQ$



Figuur 4.2: MR = PQ.

Opdracht 4.3
Kijk naar voorbeeld 4.2. Bewijs dat in dit geval geldt $MR = PQ$.

In het voorbeeld is er vanuit gegaan dat k en l een snijpunt S hebben. Dit hoeft echter niet altijd te gelden. Als M zo ligt dat MP en PQ loodrecht op elkaar staan, dan lopen de lijnen k en l evenwijdig. Er is dan dus geen punt S te vinden.

Opdracht 4.4
Kijk nog eens naar voorbeeld 4.2. Leg uit hoe je punt R kan vinden als k en l evenwijdig lopen.

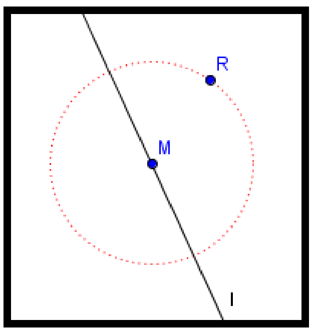
In voorbeeld 4.2 vouwen we P op M en daardoor wordt Q op R gevouwen.
Zo ontstaat de volgende gevolgvouw:

(G1) Gegeven een punt M en een lijnstuk PQ, dan kan je een punt R vinden met vouwconstructies, zodat $MR = PQ$

We hebben laten zien dat (G1) geldt in het geval dat M niet op het verlengde van PQ ligt, maar net als in het geval van (C4) is het ook mogelijk een lijnstuk te verplaatsen als M wel op het verlengde van PQ ligt. Daarom maakt het niet uit waar M ligt, en dus geldt (G1) in alle gevallen.

Met behulp van (G1) is het nu mogelijk om een cirkel te simuleren met vouwconstructies. Wat je namelijk doet bij het tekenen van een cirkel, is het overnemen van afstanden.

Stel dat we een punt M hebben, en een lijnstuk PQ, dan is het met (G1) mogelijk om een punt R te vinden zodat $MR = PQ$. Als je dan ook nog een willekeurige lijn l hebt die door M loopt, dan is het mogelijk om met vouwen een punt S op $l$te vinden zodat $MS = MR = PQ$.



Figuur 4.3: En cirkel met straal MR.

Opdracht 4.5
Gegeven een lijn l, met daarop een punt M, en een punt R niet op l. Geef een stappenplan hoe je een punt S op l vindt (met vouw constructies) zodat $MS = MR$.
Let er op dat er twee punten S_1 en S_2 zijn te vinden.

In opdracht 4.5 zijn er twee punten (S_1 en S_2) gevonden. Dit is ook niet verwonderlijk, want een lijn die door het middelpunt (M) van een cirkel gaat heeft altijd twee snijpunten met die cirkel. Een manier om die punten te vinden is door (V2) te gebruiken. Je vouwt daarmee de lijn MR op l. De beeldpunten van R zijn dan de snijpunten S.

Je kunt opdracht 4.5 ook uitvoeren als R wel op l ligt. In dat geval gebruik je niet (V2) om MR op l te vouwen, maar (V4) om l op zichzelf te vouwen door M.
In feite vouw dan nog steeds de lijn MR op l, maar als R op l ligt, vallen deze twee lijnen samen.

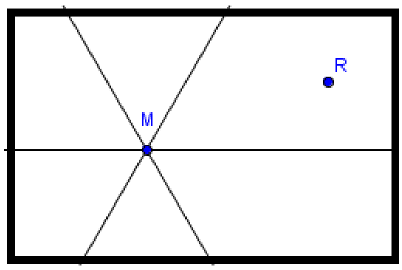
Als R niet op l ligt dan krijg je, zoals in opdracht 4.5 twee punten S_1 en S_2. Als R wel op l ligt, dan is er maar één punt S te vinden, want R is dan het andere snijpunt van de cirkel en de lijn.

Dit alles geeft de volgende vouwconstructie:

(G2) Gegeven een lijn l, met daarop een punt M, en een punt R dan kan je met vouwen alle punten S op l vinden zodat $MS = MR$

Met behulp van (G2) is het nu mogelijk om (P2) na te bootsen met vouwconstructies. Het is niet mogelijk om een echte cirkel te vouwen. Maar het is wel mogelijk om een cirkel te simuleren. Met behulp van (G2) kan nu je namelijk alle punten S vinden die op een gegeven afstand (de straal) van een punt M liggen.

Opdracht 4.6
Gegeven een punt M, en drie lijnen door dit punt M.
Gegeven is ook een punt R, dat niet op één van deze drie lijnen ligt. In figuur 4.4 zie je de situatie. Dit figuur staat ook op werkblad D. Gebruik vouwconstructies om alle punten S op deze drie lijnen te vinden waarvoor geldt: $MS = MR$



Figuur 4.4: Opdracht 4.6.

De zes punten S_1 t/m S_6 uit opdracht 4.6 liggen op een cirkel met middelpunt M en straal MR. Als je maar genoeg lijnen door M hebt, kun je zo punt voor punt de cirkel ‘vouwen’. Om zo de hele cirkel te vouwen heb je in theorie oneindig veel lijnen nodig, maar in de praktijk is dit niet nodig. Normaal gesproken construeer je met een passer een cirkel, en vervolgens bepaal je de snijpunten van deze cirkel met een ander figuur. Het is dan ook niet de hele cirkel die belangrijk is, maar de snijpunten van de cirkel met bijvoorbeeld een lijn of een andere cirkel.

Daarom is, met behulp van (G2), een cirkel te ‘vouwen’. Dus ook (P2) is met behulp van vouwconstructies uit te voeren.

(P3) als combinatie van vouwconstructies

Bij twee (verschillende) lijnen l en m kan je het unieke snijpunt P van deze lijn bepalen.

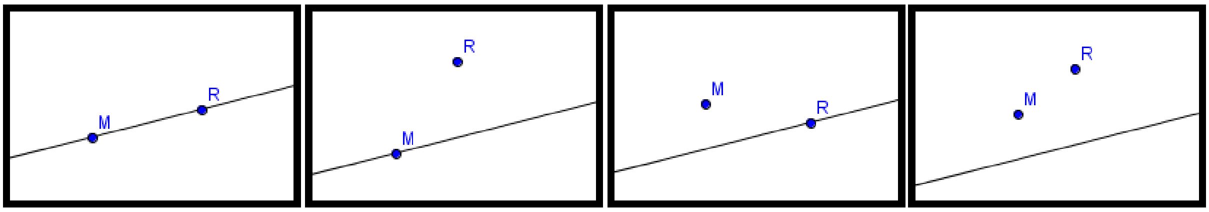
(P3) is mogelijk met vouwconstructies. Dit is dezelfde constructie als (V5).
In plaats van (P3) is het ook mogelijk om (V5) te gebruiken.

(P4) als combinatie van vouwconstructies

Bij een cirkel c en een rechte lijn l kan je de twee snijpunten P en Q van c en l bepalen.

Gegeven een lijn l, en twee punten M en R. Nu is het mogelijk om een cirkel te construeren met middelpunt M, en straal MR, door (P2)te gebruiken. Als deze cirkel snijpunten heeft dan is met (P4) mogelijk om deze punten te vinden.
We willen graag met behulp van vouwenconstructies deze snijpunten kunnen vinden.

In deze situatie zijn er dan vier mogelijkheden
- Situatie 1: M en R liggen allebei op l.
- Situatie 2: M ligt wel op l en R ligt niet op l.
- Situatie 3: M ligt niet op l en R ligt wel op l.
- Situatie 4: M en R liggen allebei niet op l.



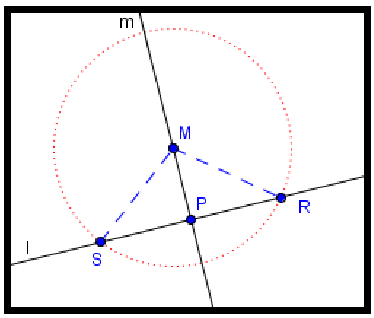
Figuur 4.5: De vier mogelijke situatie voor een lijn en twee punten.

In elke situatie is het met (P4) mogelijk om de snijpunten van de cirkel c met l te bepalen (als deze bestaan). Dit willen we ook graag kunnen met behulp van vouwconstructies.

Vouwconstructie (G2) laat zien dat het in situatie 1 en 2 mogelijk is om de punten S op l te vinden zodat $MS = MR$. Dit zijn precies de snijpunten van de cirkel c en l. In opdracht 4.5 heb je dit expliciet laten zien voor situatie 2.

Dus in situatie 1 en 2 is het mogelijk om met behulp van vouwen de snijpunten te vinden van een cirkel en een lijn. Laten we eens naar de andere situaties kijken.

In situatie 3 willen we ook de snijpunten S van de cirkel c en de lijn l vinden met behulp van vouwconstructies. In situatie 3 is punt R sowieso een snijpunt. Het andere snijpunt (als deze bestaat) kun je vinden door l op zichzelf te vouwen door M. Hierdoor ontstaat een vouw m, en een snijpunt P, van m en l.
Voor het snijpunt S van cirkel c met lijn l, moet nu gelden:
$SP = PR$.

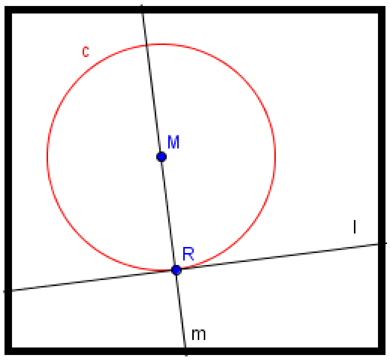


Figuur 4.6: Waarom is SP = PR?

Opdracht 4.7
Leg uit waarom, als je in situatie 3 de vouw m en het snijpunt P hebt, moet gelden dat $SP = PR$.

Met andere woorden: S ligt op een cirkel met middelpunt P en straal PR.
Dit betekent dat je punt S kunt vinden op dezelfde manier als in situatie 1, waarbij P het middelpunt van de cirkel is geworden.
Omdat situatie 1 mogelijk was met vouwconstructies, is het in situatie 3 ook mogelijk om een punt S te vinden zodat $MS = MR$.
Ook in situatie 3 is daarom het snijpunt S te vinden met behulp van vouwconstructies.

Er is echter nog wel één uitzondering in situatie 3. De mogelijkheid bestaat dat de vouw m, die je maakt om P te vinden, door R gaat. In dat geval staat m loodrecht op l. Dit is dan de situatie waarbij P en R samenvallen. Als dit gebeurt dan hebben de cirkel c en de lijn l slechts één snijpunt, namelijk R. Dit is de situatie waarin l een raaklijn is aan c.
Omdat er in dat geval geen ander snijpunt S te vinden is, hebben we alle snijpunten van c met l direct al gevonden (dit is alleen punt R) en deze was van te voren al bekend.
In situatie 3 is het daarom mogelijk de snijpunten van een lijn en een cirkel te vinden.



Figuur 4.7: Situatie 3 met maar één snijpunt.

Nu rest nog situatie 4:
In situatie 4 liggen M en R allebei niet op l. Deze situatie is hetzelfde als de beginsituatie van (V7). Bij (V7) vouwen we een punt op een lijn, zodat de vouw door een gegeven punt gaat.

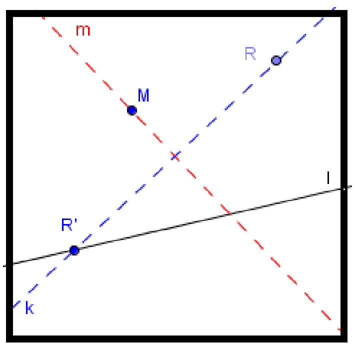
Opdracht 4.8
Neem aan dat de cirkel c en de lijn l twee snijpunt hebben. Dan is (V7) mogelijk in situatie 4. Vouw R op l, zodat de vouw door M gaat. Er zijn hier twee vouwen mogelijk.
Bepaal de punten waar R terecht komt.

Een manier om de beeldpunten van R in opdracht 4.8 te vinden gaat als volgt:

Stap 1: Vouw de lijn m, door R op l te vouwen, zodat m door M gaat. (V7)
Stap 2: Vouw de lijn k, door m op zichzelf te vouwen door R (V4)
Stap 3: Noem R' het snijpunt van k en l. (V5)

R' is het beeldpunt van R.

Als er twee snijpunten zijn, dan kan je twee lijnen m vinden, en dus ook twee beeldpunten R'.



Figuur 4.8: Het beeldpunt onder (V7)

Dit geeft ons de volgende vouwconstructie:

(G3) Gegeven een lijn l, en een punt R, niet op l. Het is mogelijk om R op l te vouwen, en het beeldpunt R' van R onder deze vouw te bepalen.

Misschien is het opgevallen dat in (G3) er niet gesproken wordt over een punt M. Dit komt doordat (G3) geldt voor elke vouw waarbij je een punt R op een lijn l vouwt. Dus ook als de vouw niet door M gaat is het mogelijk om R' te vinden.

Opdracht 4.9
In situatie 4 geldt voor zo'n beeldpunt R': $MR = MR'$. Bewijs dit.

Omdat $MR = MR'$ ligt R'op een cirkel met middelpunt M en straal MR. Daarom is R' een snijpunt van de lijn l en de cirkel c. Op deze manier is het daarom ook in situatie 4 mogelijk om de snijpunten van een lijn en een cirkel te bepalen door gebruik te maken van vouwconstructies.

In elk van de vier situaties is het nu mogelijk om de snijpunten van een lijn een cirkel te bepalen door alleen maar vouwconstructies te gebruiken. Het is daarmee dus mogelijk om (P4) door middel van vouwen na te bootsen.

(P5) als combinatie van vouwconstructies

Bij twee cirkels c en d kan je de twee
snijpunten P en Q van deze cirkels bepalen.

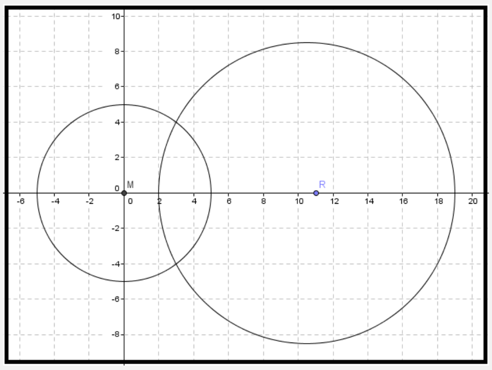
Het is niet mogelijk om cirkels te vouwen, maar het is wel mogelijk om cirkels te simuleren door middel van vouwconstructies. Is het dan ook mogelijk om de snijpunten van twee cirkels te vinden door middel van vouwconstructies?
Om dit te kunnen doen zullen we eerst kijken naar de eigenschappen van deze snijpunten:

Stel dat we twee cirkels hebben: c met middelpunt M en straal r, en d, met middelpunt N en straal s. Als deze twee cirkels twee snijpunten hebben, dan liggen deze snijpunten dus op een afstand r van M en een afstand s van N. Om hier een beter beeld van te krijgen zullen we kijken naar de formules van deze cirkels.

Een cirkel c, met middelpunt (P, Q) en straal r, wordt gegeven door $c: (x-P)^2 + (y-Q)^2 = r^2$

Opdracht 4.10
Gegeven twee cirkels:
c, met middelpunt (0,0) en straal 5.
d, met middelpunt (10.5 , 0) en straal 8.5.
Er geldt dan: $c: x^2 + y^2 = 25$
$d: (x-10.5)^2 + y^2 = 72{,}25$

In figuur 4.9 staan deze twee cirkels gegeven.
Bepaal de x-coördinaten van de twee snijpunten van c en d.



Figuur 4.9: Opdracht 4.10

De twee snijpunten uit opdracht 4.10 hebben allebei een x-coördinaat 3. Dit betekent dat beide punten op de verticale lijn $x = 3$ liggen.

Stel nu dat we de volgende gegevens hebben:

- Twee punten M en N, zodat $MN = 10.5$
- Een punt R, zodat $MR = 5$
- Een punt S, zodat $NS = 8.5$

Dan kunnen we hiermee twee cirkels maken: cirkel c, met middelpunt M en straal $MR = 5$, en cirkel d, met middelpunt N en straal $NS = 8.5$ (Dit zijn precies de twee cirkels van opgave 4.10).
Hoe vinden we dan, met behulp van vouwen, de snijpunten van deze cirkels?

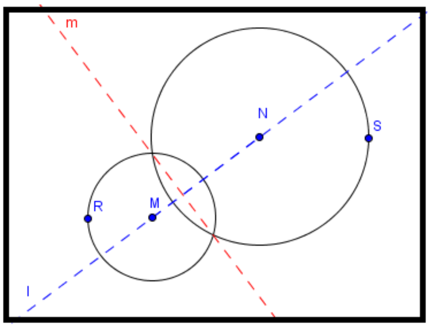
Opgave 4.10 kan ons hierbij helpen. In opgave 4.10 liggen de snijpunten op de lijn $x = 3$. Deze lijn staat loodrecht op de lijn door M en N. Laten we daarom eerst de lijn l door M en N vouwen. Dit kan behulp van (V6). Deze lijn l is vergelijkbaar met de x-as in opdracht 4.10.
De snijpunten die we zoeken liggen op een loodlijn op l. We weten ook, dankzij opgave 4.10, dat deze loodlijn door een punt gaat, op een afstand 3 van M. In feite proberen we nu de lijn $x = 3$ met behulp van vouwen te vinden.
Om deze lijn te kunnen vinden hebben we een punt P nodig zodat $MP = 3$. Als we dit punt P gevonden hebben, dan wordt de loodlijn op l door P de lijn waarop de snijpunten liggen.

<u>Opdracht 4.11</u>
Ga uit van een lijnstuk AB met lengte 1. Construeer met behulp van vouwconstructies een lijnstuk met lengte 3.

We mogen er altijd van uitgaan dat we een basislijnstuk met lengte 1 hebben. Dit betekent dat we(zie opgave 4.11) altijd een lijnstuk met lengte 3 kunnen vouwen.

We hebben nu de volgende gegevens:
- Twee punten M en N, zodat $MN = 10.5$
- Een punt R, zodat $MR = 5$
- Een punt S, zodat $NS = 8.5$
- Een lijn l door M en N.

Het is nu mogelijk om een punt P op l te vinden zodat $MP = 3$. Er zijn twee mogelijkheden voor P. We vouwen P zo dat N en P aan dezelfde kant van M liggen.
Het is nu mogelijk om lijn l op zichzelf te vouwen door P. Deze lijn m die je dan vouwt, is vergelijkbaar met de lijn $x = 3$ (in opdracht 4.10). De snijpunten van cirkel c (met middelpunt M en straal 5) en cirkel d (met middelpunt N en straal 8.5) liggen nu op de lijn m.
(G3) geeft aan dat het nu mogelijk is om R op m te vouwen (zodat de vouw door M gaat), en het beeld van R te bepalen. Dit beeldpunt van R noemen we R'. Dit punt R' is dan één van onze snijpunten. Het andere snijpunt vinden we op dezelfde manier.



Figuur 4.10: De snijpunten liggen op m.

In de bijzondere situatie van opdracht 4.10 is het mogelijk om de snijpunten te bepalen. In het algemene geval kunnen we dezelfde techniek gebruiken.
Voor het bepalen van de snijpunten doen we dan het volgende:
Stap 1: Bepaal, met behulp van de formules voor een cirkel, op welke lijn de snijpunten liggen.
Stap 2: Vouw deze lijn.
Stap 3: Bepaal de snijpunten op deze lijn.

De eerste stap is dus om de lijn te bepalen waarop de snijpunten liggen. Hiervoor hebben we de formules nodig.

Opdracht 4.12
Gegeven twee cirkels:
c, met middelpunt (0,0) en straal 5.
d, met middelpunt (4,0) en straal 3.
Deze twee cirkels hebben twee snijpunten. Stel de vergelijking op voor de lijn waar deze snijpunten op liggen.

In opdracht 4.12 liggen de snijpunten op de verticale lijn $x = 4$. De snijpunten liggen dus, net als in opdracht 4.10, op een verticale lijn.

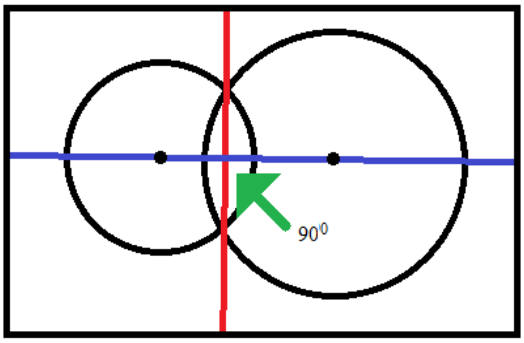
Als beide snijpunten op de x-as liggen, dan liggen de snijpunten altijd op een verticale lijn. Het is nu dan ook mogelijk om de snijpunten van c en d (in opdracht 4.12) met vouwen te vinden.
Je vouwt eerst de lijn l door M en N, dit kan met (V6). Deze vouw wordt onze x-as. De snijpunten liggen dan op een lijn loodrecht op deze verbindingslijn.
Met behulp van de formules hebben we in opgave 4.12 kunnen bepalen op welke plek deze loodlijn komt. Deze loodlijn komt op een afstand 4 van punt M.

Opdracht 4.13
Stel dat we voor de twee cirkels c(met middelpunt M en straal MR) en d (met middelpunt N en staal NS) uit opdracht 4.12 het volgende gegeven hebben:

- Twee punten M en N, zodat $MN = 4$.
- Een punt R, zodat $MR = 5$
- Een punt S, zodat $NS = 3$

Bepaal door middel van vouwconstructies de snijpunten van c en d.

Zowel in opgave 4.10 als 4.12 liggen de snijpunten op een lijn loodrecht op de verbindingslijn van beide snijpunten. Dit geldt in het algemeen: De snijpunten van twee cirkels liggen altijd op een lijn die loodrecht staat op de lijn door beide middelpunten.
Je kunt altijd de lijn vouwen door beide middelpunten (V6). Door nu deze verbindingslijn op zichzelf te vouwen, dit kan met (V4), krijg je een loodlijn.
De enige vraag is nu nog: waar moet deze loodlijn precies komen? In opdracht 4.10 lag deze loodlijn op een afstand 3 van M. In opdracht 4.12 lag deze loodlijn op een afstand 4 van M. Om precies te weten waar de loodlijn moet komen, hebben we gebruik gemaakt van de formules.



Figuur 4.11: De snijpunten liggen altijd op een lijn loodrecht op de verbindingslijn.

Om gebruik te maken van de formules hebben we wel een assenstelsel nodig. Dit assenstelsel kunnen we altijd vrij kiezen. Het is daarom altijd mogelijk om dit assenstelsel zo te kiezen dat het ene middelpunt in de oorsprong ligt, en het andere middelpunt ergens op de x-as. Dit maakt de formules van beide cirkels eenvoudiger.

Opdracht 4.14
Gegeven twee cirkels:
c, met middelpunt (0,0) en straal r.
d, met middelpunt $(p,0)$ en straal s.
Afhankelijk van de waarden voor p, r en s hebben deze twee cirkels één, twee of geen snijpunten.
Neem aan dat deze twee cirkels twee snijpunten hebben.
Laat zien dat de snijpunten op de lijn $x = \frac{p^2-s^2+r^2}{2p}$ liggen.

De kunst is nu om dit getal $\alpha = \frac{p^2-s^2+r^2}{2p}$ te vinden. Met andere woorden: we zoeken een punt Z zodat $MZ = \alpha$. Als we dit punt Z hebben, dan kunnen we met (V4) de loodlijn door dit punt Z vouwen.

Opdracht 4.15
Gegeven twee lijnstukken: $AB = p$, en $CD = r$.
Laat zien dat je met vouwconstructies een lijnstuk kan maken met lengte: $\sqrt{p^2 + r^2}$

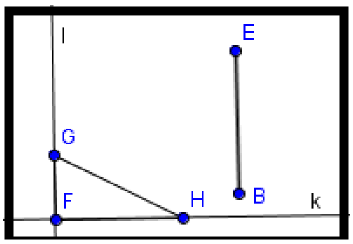
Het construeren van een lijnstuk met lengte $\sqrt{p^2 + r^2}$ is de eerste stap om ons punt Z te vinden.

Omdat het mogelijk is om een lijnstuk met lengte $\sqrt{p^2 + r^2}$ te vouwen, is het ook mogelijk om een lijnstuk met lengte $\sqrt{p^2 - s^2 + r^2}$ te vouwen.

Dit gaat als volgt:

Voorbeeld 4.3:
Gegeven een lijnstuk EB met lengte $\sqrt{p^2 + r^2}$,
en een lijnstuk FG met lengte s.

Stap 1: Vouw de lijn l, door F en G. (V6)
Stap 2: Vouw de lijn k, door l op zichzelf te vouwen door F (V4)
Stap 3: Vouw H op k zodat $GH = EB$ (G1)



Figuur 4.12: FG = $\sqrt{\boldsymbol{p^2 - s^2 + r^2}}$

Opdracht 4.16
Kijk naar voorbeeld 4.3. Leg uit dat $FH = \sqrt{p^2 - s^2 + r^2}$

Dit betekent wel dat we er van uit gaan dat $p^2 - s^2 + r^2$ groter is dan nul, anders bestaat deze wortel niet. Deze wortel geeft aan of de twee cirkel snijpunten hebben. Als deze wortel niet bestaat, dan is dat een situatie waarin de cirkels te ver uit elkaar liggen.

Opdracht 4.16 brengt ons één stapje dichterbij bij het vinden van het punt Z dat we nodig hebben om de snijpunten van twee cirkels te bepalen.

Er geldt: $p^2 - s^2 + r^2 = \sqrt{p^2 - s^2 + r^2} \cdot \sqrt{p^2 - s^2 + r^2}$. Dit kunnen we gebruiken om een lijnstuk met lengte $p^2 - s^2 + r^2$ te vouwen.

Opdracht 4.17
Gegeven een lijnstuk $FH = \sqrt{p^2 - s^2 + r^2}$, en een lijnstuk JP = 1.
Leg uit hoe je hiermee een lijnstuk vouwt met lengte $p^2 - s^2 + r^2$

We hebben nog één extra lijnstuk nodig om het punt Z te vinden: een lijnstuk met lengte $2p$.

Als we een lijnstuk met lengte p hebben, dan is het ook mogelijk om dit lijnstuk met lengte $2p$ te vouwen.

Voorbeeld 4.4:
Gegeven een lijnstuk AB met lengte p.

Stap 1: Vouw de lijn l, door A en B (V6)
Stap 2: Vouw de lijn k, door l op zichzelf te vouwen door B. (V4)

Noem C het beeld van A onder deze vouw. Dan geldt $AC = 2p$.

Opdracht 4.18
Kijk naar het voorbeeld. Leg uit hoe je punt C vindt, met behulp van vouwconstructies.

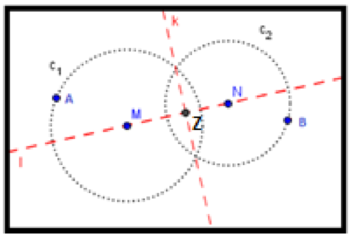
We zijn nu een heel stuk verder in de constructie van ons punt Z. Alle onderdelen die nodig zijn om Z te construeren zijn er. Omdat het mogelijk is om een lijnstuk met lengte $p^2 - s^2 + r^2$ te vouwen, en ook een lijnstuk met lengte $2p$ te vouwen, is het ook mogelijk om een lijnstuk met lengte: $\frac{p^2-s^2+r^2}{2p}$ te vouwen.

Opdracht 4.19
Gegeven een lijnstuk $AB = p^2 - s^2 + r^2$, een lijnstuk $CD = 2p$, en een lijnstuk $EF = 1$.
Geef aan hoe we dan een lijnstuk met lengte $\frac{p^2-s^2+r^2}{2p}$ kunnen vouwen.

Het resultaat van opdracht 4.14 t/m 4.19 is:

(G4) Gegeven drie lijnstukken met lengte p, r en s, (zodat $p^2 - s^2 + r^2 > 0$) en punt M dan is het mogelijk een punt Z te vouwen zodat $MZ = \frac{p^2-s^2+r^2}{2p}$

Met behulp van (G4) zijn we eindelijk zo ver dat we de snijpunten van twee willekeurige cirkels kunnen vinden met vouwconstructies.



Figuur 4.13:De loodlijn door Z

Stel nu dat we twee cirkels hebben:
c met middelpunt M en straal r. ($MA = r$)
d, met middelpunt N en straal s. ($NB = s$).
Hier is $MN = p$.

Nu liggen de snijpunten van c en d (als ze er zijn) op een lijn loodrecht op de verbindingslijn van M en N, op een afstand van $\frac{p^2-s^2+r^2}{2p}$ tot M.

Deze snijpunten vind je dan als volgt:

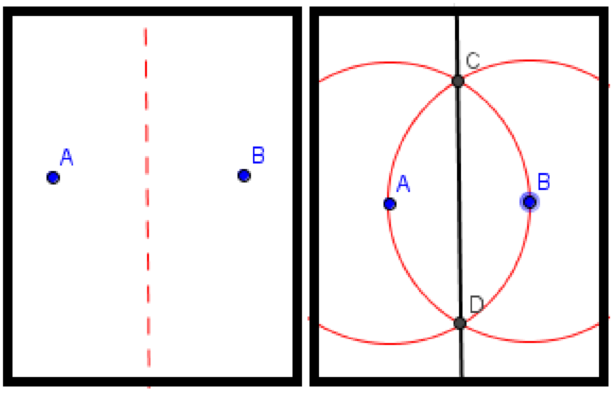
Stap 1: Vouw de lijn l, door M en N. (V6)
Stap 2: Bepaal Z op l (zodat Nen Z aan dezelfde kant van M liggen) zodat $MZ = \frac{p^2-s^2+r^2}{2p}$ (G4)
Stap 3: Vouw de lijn k, door l op zichzelf te vouwen, door Z. (V4)

De snijpunten liggen op deze loodlijn.

Opdracht 4.20
Leg uit hoe het nu mogelijk is om de snijpunten van beide cirkels te bepalen.

Als je alleen de middelpunten M en N (met afstand p), en de stralen (r, en s) van de twee cirkels weet, dan is het op deze manier mogelijk om met vouwen de snijpunten te bepalen.
Dus is (P5) te simuleren door middel van vouwconstructies.

Passer en liniaal met vouwen
Elke procedure (P1) t/m (P5) is na te bootsen door een combinatie van vouwconstructies. Dit wil dan ook zeggen dat elke constructie die met passer en liniaal mogelijk is, ook mogelijk is met vouwconstructies.
Het is dus mogelijk om elke stap die je maakt met passer en liniaal na te bootsen met een combinatie van vouwconstructies, maar in de praktijk zal je dit waarschijnlijk niet altijd zo doen. Sommige lijnen en punten zijn met vouwen directer te vouwen, dan door de hele constructie met passer en liniaal na te bootsen. Een goed voorbeeld hiervan is de middelloodlijn. Deze is met één enkele vouw te vouwen, terwijl de constructie met passer en liniaal gebruik maakt van twee cirkels.



Figuur 4.14: De constructie van een middelloodlijn met passer en liniaal (rechts) en vouwconstructies (links)

Omdat elke constructie die met passer en liniaal mogelijk is ook mogelijk is met behulp van vouwconstructies, betekent dit ook dat alle operaties (O1) t/m (O5) te doen zijn met behulp van vouwconstructies. Met vouwen is het dan ook mogelijk om lijnstukken bij elkaar op te tellen, of met elkaar te vermenigvuldigen.

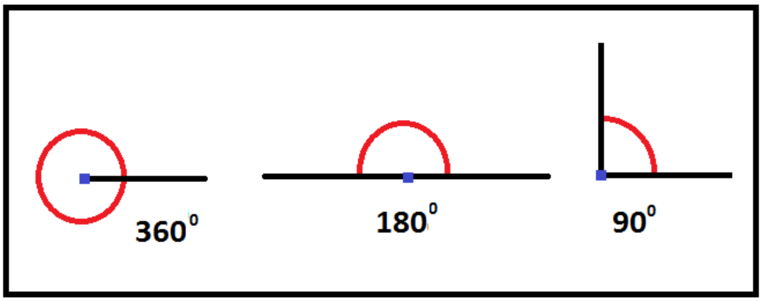
We zijn hiermee al een heel eind op weg om te bepalen wat er allemaal mogelijk is door te vouwen. We weten al dat alles wat met passer en liniaal mogelijk is ook met vouwen mogelijk is, maar kan je misschien met vouwen nog meer construeren? Sommige lengten (zoals $\sqrt[3]{2}$) zijn niet te construeren met behulp van passer en liniaal. Is het dan ook onmogelijk om met vouwen deze lengten te krijgen? In hoofdstuk 5 zullen we hier dieper op in gaan.

5. Hoeken vouwen

Tot nu toe is er alleen gesproken over de constructie van (lengten van) lijnstukken. Met behulp van passer en liniaal, of met behulp van vouwen, zijn verschillende lengten te construeren. We zullen nu kijken naar een ander begrip binnen de meetkunde: hoeken.

Een hoek ontstaat als twee lijnen (of lijnstukken) elkaar snijden. Het snijpunt van beide lijnen is het hoekpunt van de hoek. De lijnen zelf vormen de benen van de hoek. De grootte van de hoek is dan een maat om aan te geven hoe ver de benen van de hoek uit elkaar liggen.

In de meetkunde wordt vaak gebruik gemaakt van graden. Daarom zullen ook wij graden gebruiken om hoeken aan te geven. In dat geval geldt: Een hele cirkel is 360^0, een halve cirkel (of gestrekte hoek) is 180^0, en een rechte hoek is 90^0.Op die manier is een hele cirkel in 360 stukjes verdeeld.



Figuur 5.1: Een hele hoek (links), een gestrekte hoek (midden) en een rechte hoek (rechts)

We zijn benieuwd welke hoeken wel, maar vooral ook welke hoeken niet construeerbaar zijn. In dit hoofdstuk zullen we kijken naar de mogelijkheid om hoeken te vouwen. We zullen ons daarom vooral richten op het construeren met behulp van vouwconstructies.

We zullen ons eerst richten op de regelmatige veelhoeken. Dit zal ons een aantal vouwbare hoeken opleveren. Van daaruit zullen we kijken hoe we nieuwe hoeken kunnen maken door hoeken bij elkaar op te tellen (of van elkaar af te trekken).

Uiteindelijk zullen we een verband zoeken tussen de vouwbaarheid van hoeken en de vouwbaarheid van lengten (van lijnstukken). Aan het eind van dit hoofdstuk wordt er dan gekeken naar de mogelijkheid om een hoek in drie gelijke hoeken te splitsen.

Veelhoeken

Opdracht 5.1
Gegeven twee punten zodat $AB = 1$.
Construeer, door middel van vouwconstructies, een gelijkzijdige driehoek ABC.

De hoeken van een gelijkzijdige driehoek zijn 60^0. Door de constructie van opdracht 5.1 uit te voeren construeer je een hoek van 60^0. Deze hoek is hiermee construeerbaar met vouwconstructies.

Een manier om hoeken te construeren is door gebruik te maken van regelmatige veelhoeken. Door bijvoorbeeld een regelmatige driehoek te maken (met passer en liniaal, of door te vouwen) krijg je een hoek van 60^0. Door andere (regelmatige) veelhoeken te construeren is het mogelijk om hoeken te construeren. Een regelmatige zeshoek levert bijvoorbeeld een hoek van 120^0 op.

Opdracht 5.2
Gegeven een lijnstuk AB met lengte 1. Vouw een hoek van 135^0 door gebruik te maken van een regelmatige veelhoek.

Het is als je de hoek wilt vouwen niet nodig om de hele veelhoek te maken. Je hebt voldoende aan twee (naast elkaar liggende) zijden van de veelhoek om de hoek te kunnen bepalen.

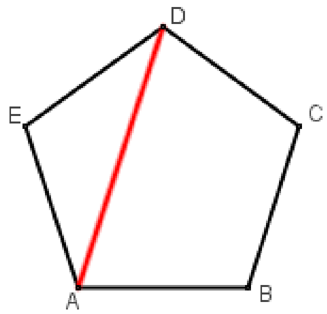
Het vouwen van hoeken door middel van regelmatige veelhoeken levert twee ‘problemen’ op:
- Zijn alle regelmatige veelhoeken vouwbaar? En hoe bepaal je of een veelhoek vouwbaar is?
- Niet alle hoeken ontstaan uit regelmatige veelhoeken. Een hoek van 80^0 komt bijvoorbeeld niet van een regelmatige veelhoek.

Een regelmatige vijfhoek

Een regelmatige driehoek is te construeren met passer en liniaal. Een regelmatige vierhoek is dit ook. Een regelmatige vijfhoek is ook te construeren met passer en liniaal.

Voor een regelmatige vijfhoek geldt het volgende:
De verhouding tussen een zijde en de diagonaal van een regelmatige vijfhoek is gelijk aan de gulden snede: $\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$
Dus als je een regelmatige vijfhoek hebt met zijde 1, dan is de lengte van elke diagonaal gelijk aan φ (zie figuur 5.2)

Als we dus een regelmatige vijfhoek willen construeren met passer en liniaal, dan hebben we dus een lijnstuk met lengte φ nodig. In opgave 2.22 heb je gezien hoe dit lijnstuk met passer en liniaal te maken is.



Figuur 5.2: AB = 1 en AD = φ

Opdracht 5.3
Gegeven een lijnstuk AB met lengte 1.
Geef een constructie met passer en liniaal voor het punt D op de vijfhoek (zie figuur 5.2)

In opdracht 5.3 heb je punt D geconstrueerd. Om de regelmatige vijfhoek af te maken hebben we ook nog de punten C en E nodig.

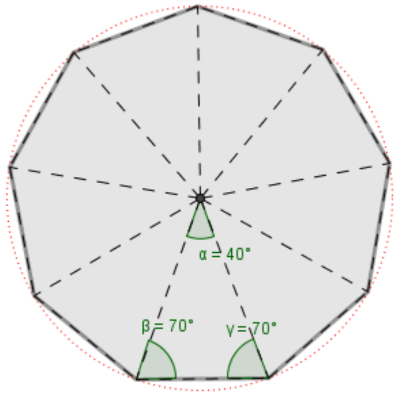
Opdracht 5.4
Geef een constructie met passer en liniaal voor de punten C en E op de vijfhoek (zie figuur 5.2)

Het resultaat van opdracht 5.3 en 5.4 is nu dat we een regelmatige vijfhoek hebben geconstrueerd met passer en liniaal. Omdat alles wat met passer en liniaal mogelijk is, ook mogelijk is door vouwen, weten we nu dat een regelmatige vijfhoek vouwbaar is.

De hoeken die horen bij regelmatige veelhoeken
Een regelmatige driehoek levert een hoek van 60^0 op.
Een regelmatige vierhoek (dit is een vierkant) levert een hoek van 90^0 op.
Een regelmatige vijfhoek levert een hoek van 108^0 op.

Hoe bepaal je nu de hoek van een regelmatige veelhoek?
We zullen dit eens bekijken voor een regelmatige negenhoek.

Gegeven een regelmatige 9-hoek.
Stap 1: Teken de cirkel die door alle hoekpunten gaat.
Stap 2: Teken negen gelijkbenige driehoeken, met het middelpunt als tophoek.
Stap 3: Van zo'n driehoek is de tophoek gelijk aan 40^0
Stap 4: De andere twee hoeken zijn dan 70^0
Stap 5: De hoek van de regelmatige 9-hoek is dan 2 x 70^0 = 140^0.



Figuur 5.3: De hoek van een regelmatige 9-hoek.

Opdracht 5.5
Laat zien dat voor een regelmatige n-hoek de hoek tussen twee zijden gelijk is aan $180^0 - \frac{360^0}{n}$

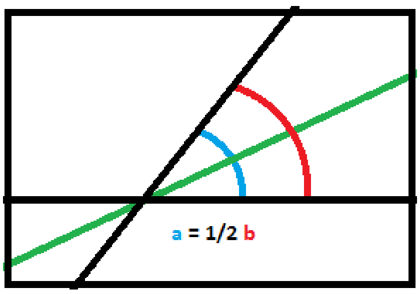
Vanuit de formule van opdracht 5.5 zie je dat bijvoorbeeld een hoek van 154^0 vouwbaar is, want $180^0 - \frac{360^0}{10} = 154^0$, maar een hoek van bijvoorbeeld 155^0 is op deze manier niet vouwbaar, want er is geen enkel geheel getal n, zodat $180^0 - \frac{360^0}{n} = 155^0$

En als een hoek wel ontstaat door middel van een regelmatige veelhoek, dan is er ook nog de vraag of die regelmatige veelhoek te vouwen is. Het blijkt dat bijvoorbeeld een regelmatige zevenhoek niet te construeren is met passer en liniaal, of met vouwconstructies.

Het zou daarom goed zijn als we nog andere manieren hebben om hoeken te vouwen.

Hoeken vouwen vanuit andere hoeken
Er zijn ook andere manieren om hoeken te maken. Een manier om dat te doen is door gebruik te maken van de bissectrice. Een bissectrice deelt namelijk een hoek in twee gelijke delen. Op deze manier kan je van een hoek van 60^0, twee hoeken van 30^0 maken.

Opdracht 5.6
Gegeven een hoek van 108^0, en een hoek van 60^0. Beide hoeken zijn construeerbaar. Bedenk een aantal hoeken die je nu met een bissectrice kan maken vanuit deze hoeken.



Figuur 5.4:Een bissectrice deelt een hoek in twee gelijke delen.

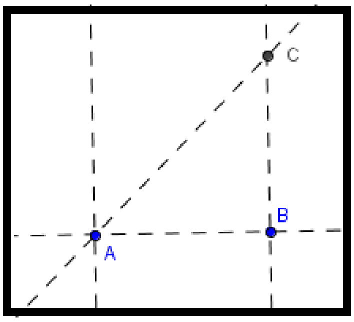
Op deze manier is het bijvoorbeeld mogelijk om een hoek van 15^0 te maken:
Je kunt een hoek van 30^0 maken (door een hoek van 60^0 te delen). Deze hoek van 30^0 deel je met een bissectrice in twee hoeken van 15^0.

Nog een manier om hoeken te construeren
Er is nog een andere manier om vouwbare hoeken te gebruiken om nieuwe hoeken te maken.

Eerst construeren we een hoek van 45^0.
Gegeven een lijnstuk AB met lengte 1.
Het is mogelijk om een lijn l, door AB te vouwen.
Het is mogelijk om een hoek van 45^0 te vouwen.

Stap 1: Vouw de lijn m, door l op zichzelf te vouwen door A. (V4)
Stap 2: Vouw de bissectrice k, door m op l te vouwen. (V2)
Stap 3: Vouw de lijn n, door l op zichzelf te vouwen door B. (V4)
Stap 4: Noem C het snijpunt van n en k. (V5)

Er geldt dat $\angle BAC = 45^0$.



Figuur 5.5: $\angle$***BAC= 45***^{0}

<u>Opdracht 5.7</u>
Gegeven de situatie van figuur 5.5
Construeer een gelijkzijdige driehoek ACD door gebruik te maken van vouwconstructies.
Hoe groot is $\angle BAD$ nu?

Het is hiermee mogelijk om een hoek te maken door hoeken die vouwbaar zijn bij elkaar op te tellen. Stel bijvoorbeeld dat α en β twee vouwbare hoeken zijn. Dan vouw je eerst α. Vervolgens vouw je β op één van de benen van de hoek α. Op deze manier krijg je de hoek $(\alpha + \beta)$

<u>Opdracht 5.8</u>
Gegeven twee vouwbare hoeken α en β. Leg uit dat het ook mogelijk is om een hoek $(\alpha - \beta)$ te vouwen.

Op deze manier zijn er heel veel hoeken te maken.
Bijvoorbeeld:

Het is mogelijk om een hoek van 108^0 te construeren (met behulp van een regelmatige vijfhoek)
Het is mogelijk om een hoek van 60^0 te construeren (met behulp van een gelijkzijdige driehoek)

<u>Opdracht 5.9</u>
Bedenk zelf een aantal hoeken die je nu kunt maken. Begin met een hoek van 108^0 en een hoek van 60^0. Je mag hoeken bij elkaar optellen of van elkaar af trekken. Je mag ook een bissectrice gebruiken.

Op deze manier zijn vanuit vouwbare hoeken nieuwe hoeken te maken.
Toch is het lastig om te bepalen welke hoeken vouwbaar zijn. Is bijvoorbeeld een hoek van 36^0 vouwbaar?
Om te kijken welke hoeken vouwbaar zijn zullen we kijken naar de relatie tussen hoeken en lijnstukken.

Hoeken en lijnstukken

Er is nog een andere manier om hoeken te construeren: door gebruik te maken van lijnstukken. Lijnstukken en hoeken zijn eigenlijk twee verschillende objecten. Toch is er een verband tussen de lengte van een lijnstuk en een hoek. Dit verband is de goniometrie.

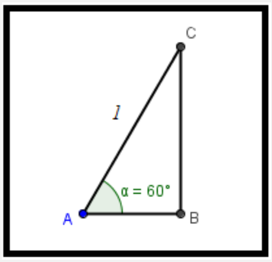
De relatie tussen hoeken en lijnstukken kan gegeven worden met behulp van de cosinusfunctie:

Opdracht 5.10

Gegeven een rechthoekige driehoek ABC,

met $\angle B$ = 90^0, $AC = 1$ en $\angle A$= 60^0.

Bereken AB.



Figuur 5.6: Opdracht 5.10

Algemeen geldt de volgende relatie tussen de lengte (van een lijnstuk) en hoeken:

Gegeven een rechthoekige driehoek ABC, met $\angle B$ = 90^0 en $AC = 1$.

Er geldt dan: $AB = \cos(\angle A)$.

Dit leidt tot de volgende stelling:

Stelling 5.1

Als een $\angle A$ construeerbaar is, dan is ook een lijnstuk met lengte $\cos(\angle A)$ construeerbaar. En omgekeerd: als een lijnstuk $\cos(\angle A)$ construeerbaar is, dan is$\angle A$ook construeerbaar.

Stelling 5.1 geldt zowel voor constructies met passer en liniaal als voor constructies door te vouwen.

We moeten stelling 5.1 nog wel bewijzen. Maar als deze stelling waar is, dan geeft het ons een mogelijkheid om te bepalen welke hoeken vouwbaar zijn.

Stelling 5.1 zegt eigenlijk twee dingen:

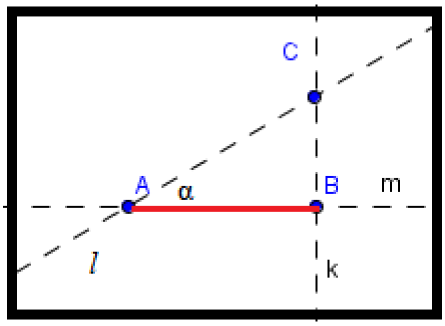
- Deel 1: Als een $\angle A$ construeerbaar is, dan is een lijnstuk met lengte $\cos(\angle A)$ook construeerbaar.
- Deel 2: Als een lijnstuk met lengte $\cos(\angle A)$ construeerbaar is, dan is ook $\angle A$ construeerbaar

Deze twee onderdelen zullen we apart bewijzen.

Bewijs van deel 1:
Je mag er altijd van uitgaan dat we een lijnstuk met lengte 1 hebben. Dit basislijnstuk is de basis van waaruit alle andere lijnstukken te construeren zijn.

Gegeven een construeerbare hoek α. Het is dan mogelijk om twee lijnen l en m te construeren, die elkaar snijden in een punt A, zodat $\angle A = \alpha$

Vouw nu een punt C op l, zodat $AC = 1$. (G2)
Vouw de loodlijn k op m door C. (V4)
Noem B het snijpunt van k en m. (V5)
Er geldt nu dat $AB = \cos(\alpha)$



Figuur 5.7: AB = cos(α)

Elk van deze stappen is nu gedaan met behulp van vouwconstructies. Het is ook mogelijk om deze stappen uit te voeren met behulp van passer en liniaal: (G2) is uit te voeren met (P2), (V4) is uit te voeren met (C1), en (V5) is uit te voeren met (P3).

Deel 1 van stelling 5.1 is dus inderdaad waar: Als een hoek α construeerbaar is, dan is ook het lijnstuk met lengte $\cos(\alpha)$ construeerbaar.

Opdracht 5.11
Bewijs deel 2 van stelling 5.1. Bewijs dat, als een lijnstuk $\cos(\alpha)$ construeerbaar is, αook construeerbaar is. Leg uit dat dit waar is voor een constructie met behulp van passer en liniaal, en voor een constructie door gebruik te maken van vouwconstructies.

Stelling 5.1 is een belangrijke stelling. Het gevolg van deze stelling is namelijk: Als de lengte $\cos(\alpha)$ NIET construeerbaar is, dan is ook α NIET construeerbaar.

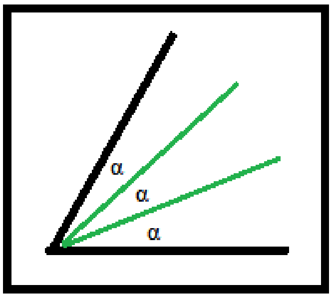
Dit geeft ons een sterk middel om te bepalen welke hoeken construeerbaar zijn. We weten (zie hoofdstuk 2) iets over de construeerbaarheid met passer en liniaal van de lengten van lijnstukken.
Deze informatie kunnen we gebruiken om te bepalen welke hoeken wel of niet construeerbaar zijn met behulp van passer en liniaal.

Opdracht 5.12
Controleer met behulp van een rekenmachine dat geldt: $\cos(75°) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3}}$
En leg daarmee uit dat een hoek van 75^0 construeerbaar is met passer en liniaal.

We zullen nu stelling 5.1 gaan gebruiken om te kijken of de driedeling van een hoek mogelijk is.

Driedeling van een hoek

Het is mogelijk om een hoek twee gelijke delen te splitsen, zonder daarbij de hoek op te meten. Dit was al bekend bij de oude Grieken. Sinds de tijd van de oude Grieken vroeg men zich daarom af of het misschien ook mogelijk was om een hoek in drie (in plaats van twee) gelijke delen te splitsen, zonder de hoek op te meten.
Voor sommige hoeken is dat inderdaad mogelijk. Een hoek van 90^0 is in drie gelijke hoeken op te delen, want een hoek van 30^0 is construeerbaar. Maar kan dit ook met andere hoeken?
Wij zijn benieuwd of een hoek van bijvoorbeeld 60^0 in drie gelijke delen te splitsen is.



Figuur 5.8: Is een driedeling mogelijk?

Laten we eens kijken hoe stelling 5.1 hierbij gebruikt kan worden.
Stel dat $\cos(\alpha)$ construeerbaar is, is dan $\cos\left(\frac{1}{3}\alpha\right)$ ook construeerbaar?
We substitueren $\alpha = 3\beta$, en dat geeft dan de volgende vraag:
Als $\cos(3\beta)$construeerbaar is, is dan $\cos(\beta)$ ook construeerbaar?

cos(t + u) = cos(t)cos(u) - sin(t)sin(u)

cos(2x) = 2cos(x)^2 - 1

sin(2x)= 2sin(x)cos(x)

cos(x)^2 + sin(x)^2 = 1   (voor alle x)

Figuur 5.9: goniometrische gelijkheden.

<u>Opdracht 5.13</u>
Er geldt: $\cos(3x) = 4\cos(x)^3 - 3\cos x$.
Toon dit aan.

De gelijkheid van opdracht 5.13 luidt: $\cos(3x) = 4\cos(x)^3 - 3\cos x$
Deze gelijkheid kunnen we gebruiken om te kijken of een driedeling van een hoek mogelijk is.
We zullen dit doen met een hoek van 60^0.

De driedeling van 60^0

Om te kijken of een driedeling van een hoek van 60^0 mogelijk is, gaan we de gelijkheid van opdracht 5.13 gebruiken om te kijken of $\cos(x)$ construeerbaar is vanuit $\cos(60°)$.

Er geldt dat $\cos(60°) = \frac{1}{2}$
Als we dan de gelijkheid van opdracht 5.13 gebruiken krijgen we de vergelijking:

$$4\cos(x)^3 - 3\cos(x) = \frac{1}{2}$$

Als we nu $t = \cos(x)$ substitueren krijgen we de vergelijking:

$$4t^3 - 3t - \frac{1}{2} = 0$$

Uiteraard is deze formule numeriek (met bijvoorbeeld een grafische rekenmachine) op te lossen. Voor de constructie hebben we echter niets aan een numerieke oplossing. We willen de lengte exact weten.

Als je deze formule exact zou willen oplossen dan zul je gebruik moeten maken van een algemene formule:

Er bestaan, net zoals de abc-formule geldt voor kwadratische vergelijkingen, ook algemene formules voor het oplossen van een derdegraads vergelijking.

Voor $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ geldt:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}}$$

Hierin is $q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$ en $p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}$

Opdracht 5.14
Kijk naar de algemene oplossing van een derdegraadsvergelijking. Bereken q en p in het geval van de driedeling van een hoek van 60^0. Laat ook zien dat $q^2 + \frac{4}{27}p^3 < 0$

Zelfs met deze algemene oplossing van derdegraadsvergelijkingen is het nog lastig om de antwoorden exact te vinden.

Het probleem is dat $q^2 + \frac{4}{27}p^3 < 0$. Dit betekent dat $\sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}$ geen (reële) oplossingen heeft. Om deze vergelijking helemaal op te kunnen lossen moet je gebruik van maken van complexe getallen. Dit gaat voor dit onderwerp te ver om helemaal te behandelen.

Als je de standaardformule voor een derdegraadsvergelijking gebruikt om $4t^3 - 3t - \frac{1}{2} = 0$ op te lossen, dan krijg je als oplossing:

$$t = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}\left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{3}i} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{3}i}\right)$$

Hierin is i het imaginaire getal: $i = \sqrt{-1}$

Is dit getal t nu construeerbaar met passer en liniaal?
Hoewel er nog een imaginair deel in de formule zit, zal deze uiteindelijk wegvallen. Het eindantwoord is dan een reëel getal. Alleen is deze lengte niet construeerbaar. Dit komt door de factor die er voor staat: $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$.

De derdemachtswortel is in het algemeen niet construeerbaar met passer en liniaal. In het algemeen geldt dat een derdemachtswortel alleen construeerbaar is, als dit een geheel getal oplevert (zoals $\sqrt[3]{8} = 2$). Daarom is ook $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$ niet construeerbaar met passer en liniaal ons dus ook ons getal t niet. Dit betekent dan ook dat een hoek van 60^0 niet in drie gelijke delen te splitsen is, met passer en liniaal.

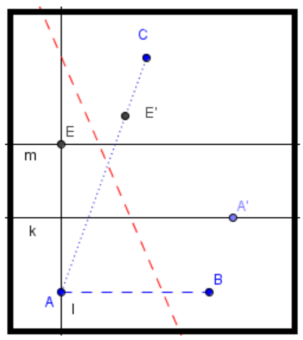
Met andere woorden: de driedeling van een hoek is niet zomaar mogelijk met passer en liniaal.
In bijzondere situaties (zoals de driedeling van een hoek van 90^0) is het wel mogelijk om de hoek in drie gelijke hoeken te splitsen, maar in het algemeen is dit niet zomaar mogelijk.

Een hoek in drie gelijke hoeken vouwen
Met passer en liniaal is het niet mogelijk om een willekeurige hoek in drie gelijke hoeken op te delen. Hoe zit dan dat met vouwen?

Voorbeeld 5.1:

Gegeven een willekeurige hoek $\angle BAC = \alpha$.

Stap 1: Vouw lijn q door A en B (V6)
Stap 1: Vouw lijn l, loodrecht op q, door A (V4)
Stap 2: Bepaal E op l, zodat $AE = AB$. (G2)
Stap 3: Vouw lijn m, door l op zichzelf te vouwen, door E. (V4)
Stap 4: Vouw lijn k, door A op E te vouwen. (V3)
Stap 5: Vouw lijn r door A en C (V6)
Stap 6: Vouw lijn p, door E op r en A op k te vouwen. (V7+)
Stap 7: Bepaal het beeldpunt E' van E en A' van A. (G3)

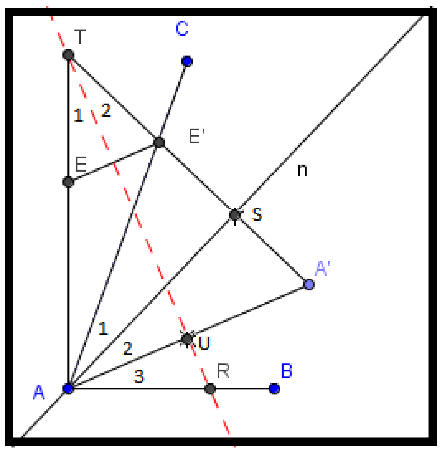


Figuur 5.10: Voorbeeld 5.1

Er zijn twee mogelijkheden voor de vouw in stap 6. We hebben er maar één nodig. De vouw die we nodig hebben levert een punt A' op aan de rechterkant van r.

We zullen nu kijken naar $\angle BAA'$.
Daarvoor kijken we naar het figuur 5.11.

Dit figuur volgt op voorbeeld 5.1.
Hier in is:
T het snijpunt van p en l,
R het snijpunt van p en q (de lijn door A en B).
$n$de middelloodlijn van E' en A'.
S het snijpunt van n en TA'.
U het snijpunt van AA' en p.



Figuur 5.11: De driedeling van een hoek

In figuur 5.11 geldt dat T, E' en A op één lijn liggen. Dit komt vanwege de vouw: Als drie (of meer) punten op een rechte lijn liggen, dan liggen de beeldpunten van deze drie (of meer) punten ook op een rechte lijn. Dit komt omdat beeld van een rechte lijn onder een vouw weer een rechte lijn is.
Omdat T, E en A op een rechte lijn (namelijk l) liggen, liggen de beeldpunten (onder de vouw p): T, E' en A' ook op een rechte lijn.

We willen nu figuur 5.11 analyseren:

Stelling:
In figuur 5.11 ligt A op n.

Bewijs:
Noem V het snijpunt van AE' en $A'E$
De vouw p beeld A af op A' en E af op E'
Omdat afstanden behouden blijven onder een vouw geldt: $AV = A'V$ en $VE' = VE$
Dus: $A'E = A'V + VE = AV + VE' = AE'$.

Er is gegeven dat A' op de lijn k ligt (zie figuur 5.10).
Omdat k de middenloodlijn is van A en E geldt $A'A = A'E$.

Daarom geldt: $A'A = A'E = AE'$.
A ligt daarom op de middelloodlijn van A' en E' en dit is n.

Er geldt nog meer in figuur 5.11:

<u>Opgave 5.15</u>
De lijnstukken AA' en EE' staan loodrecht op p. Bewijs dit.

Er geldt ook in figuur 5.11 ook het volgende:

$\angle T_1 + \angle R = 90^0$ (Som van een driehoek, met $\angle A = 90^0$)

$\angle A_3 + \angle R = 90^0$ (Som van een driehoek, en AA' staat loodrecht op p)

Dus $\angle T_1 = \angle A_3$

<u>Opdracht 5.16</u>
Bewijs dat $\angle T_2 = \angle A_2$

Omdat geldt dat $\angle T_1 = \angle T_2$ geldt ook dat $\angle A_3 = \angle T_1 = \angle T_2 = \angle A_2$

<u>Opdracht 5.17</u>
Bewijs dat $\angle A_1 = \angle A_2$

<u>Opdracht 5.18</u>
Bewijs dat $\angle A_3 = \frac{1}{3}\angle A$

Het resultaat van opdracht 5.15 t/m 5.18 is dat we bewezen hebben dat voorbeeld 5.1 een driedeling van een willekeurige hoek vouwt. Met behulp van vouwen is de driedeling van een hoek dus wel altijd mogelijk.

Met passer en liniaal was de driedeling van een hoek alleen mogelijk in bijzondere gevallen (bijvoorbeeld de driedeling van een hoek van 90^0). Met vouwen is de driedeling van elke hoek mogelijk. Blijkbaar is er met vouwen meer mogelijk dan met passer en liniaal.
Deze extra mogelijkheid komt door de vouwconstructie (V7+). Deze vouwconstructie hebben we gebruikt om een driedeling van een hoek te maken. Met passer en liniaal is deze vouwconstructie (V7+) niet uit te voeren.

Het is dus met vouwen mogelijk om alles te doen wat ook met passer en liniaal kan, en meer.

6. Een korte herhaling

Wat heeft dit alles opgeleverd?
In hoofdstuk 1 hebben we gekeken naar euclidische meetkunde. We hebben een lijst met spelregels opgesteld, en gekeken wat hiervan nu de gevolgen zijn. We hebben hiermee een basis gelegd voor de euclidische meetkunde.
Het was hierbij belangrijk om goed na te gaan in welke situatie bepaalde eigenschappen wel of niet gelden. Twee lijnen hebben normaal gesproken altijd één snijpunt, als ze niet evenwijdig lopen. Ook voor de snijpunten van twee cirkels gelden bepaalde voorwaarden.
Aan het eind van hoofdstuk 1 hebben we dan een begin van de euclidische meetkunde om mee verder te gaan.

In hoofdstuk 2 zijn we verder gegaan met wat we in hoofdstuk 1 gestart zijn. We hebben gekeken naar de mogelijke constructies die uit te voeren zijn met passer en liniaal. We hebben laten zien dat het mogelijk is om lengten van lijnstukken bij elkaar op te tellen, en met elkaar te vermenigvuldigen. We hebben ook laten zien dat het mogelijk is om de wortel te nemen van de lengte van een lijnstuk.
Hoewel we vooral gekeken hebben naar de constructies die wel kunnen, zijn we geëindigd met een constructie die niet kan: $\sqrt[3]{2}$.
Aan het eind van hoofdstuk 2 hebben we een redelijk beeld van de mogelijkheden binnen de euclidische meetkunde.

In hoofdstuk 3 hebben we een nieuw begin gemaakt met meetkunde en vouwen. We hebben een basis gelegd voor de vouwconstructies. Aan de hand van een simpel voorbeeld (het vouwen van een emmer) hebben we gekeken naar de toegestane vouwconstructies. Op deze manier kregen we een lijst met spelregels die voor het vouwen binnen de meetkunde zijn toegestaan.
Dit vouwen brengt ook wel een aantal haken en ogen met zich mee. Op dezelfde manier dat twee cirkels niet altijd snijpunten hebben, zijn niet alle vouwen in elke situatie mogelijk.
Ook hebben we gezien dat vouwen soms een kwestie is van uitproberen. Voordat je de echte vouw maakt, buig je het papier dubbel om te kijken hoe je vouw zal gaan lopen. Zeker bij lastigere vouwen (zoals (V7+)) ontkom je er haast niet aan om het eerst uit te proberen.
Aan het eind van hoofdstuk 3 hebben we een basis gelegd voor de meetkunde van het vouwen.

In hoofdstuk 4 hebben we gekeken naar de overeenkomsten tussen euclidische meetkunde en vouwmeetkunde. Het doel was om te kijken wat er allemaal mogelijk is met vouwmeetkunde. We hebben gezien dat alles wat met passer en liniaal mogelijk is, ook na te bootsen is met vouwconstructies. Dit betekent dat alle resultaten van hoofdstuk 1 en 2 ook gelden voor vouwmeetkunde. Het is daarom ook mogelijk om, met vouwen, lengten van lijnstukken bij elkaar op te tellen, of wortel te trekken.
Aan het eind van hoofdstuk 4 bleef nog wel de vraag over of je met vouwmeetkunde meer kan dan met passer en liniaal.

In hoofdstuk 5 hebben we gekeken naar hoeken. We hebben gekeken hoe hoeken geconstrueerd kunnen worden met behulp van veelhoeken. Ook was het mogelijk om hoeken kleiner te maken door de bissectrice te gebruiken. Het bleek zelfs mogelijk om hoeken bij elkaar op te tellen of van elkaar af te halen. We hebben daarna gekeken naar de relatie tussen lijnstukken en hoeken: goniometrie.
Uiteindelijk wilden we kijken naar de mogelijkheid om een hoek in drie gelijke delen te splitsen. We hebben gezien dat dit soms kan. Het bleek met passer en liniaal niet altijd te kunnen. De driedeling van een hoek van 60^0 was bijvoorbeeld niet mogelijk met passer en liniaal.
We hebben ook laten zien dat het wel altijd mogelijk is om een hoek in drie gelijke delen te vouwen.
Aan het eind van hoofdstuk 5 hebben we gezien dat vouwconstructies meer mogelijkheden bieden dan de meetkunde met passer en liniaal.

7. Overzicht van alle gebruikte constructies

Procedure

(P1) Bij twee (verschillende) punten P en Q kan je met een liniaal de unieke rechte lijn l tekenen die door beide punten gaat.

(P2) Bij twee (verschillende) punten P en Q kan je met een passer de unieke cirkel c tekenen met P als middelpunt zodat Q op de cirkel ligt.

(P3) Bij twee (verschillende) snijdende lijnen l en m kan je het unieke snijpunt P van deze lijn bepalen.

(P4) Bij een cirkel c en een rechte lijn l kan je de twee snijpunten P en Q van c en l bepalen.

(P5) Bij twee cirkels c en d kan je de twee snijpunten P en Q van deze cirkels bepalen.

Constructies

(C1) Bij een lijn l en een punt C, niet op l, kan je de unieke loodlijn m op l tekenen die door C gaat.

(C2) Bij een lijn l en een punt C op l kan je de unieke loodlijn m op l tekenen die door C gaat.

(C3) Bij een lijn $\boldsymbol{l}$ en een punt P niet op l kan je de unieke evenwijdige lijn m tekenen die door P gaat.

(C4) Bij een punt M en een lijnstuk met lengte r kan je een cirkel construeren met middelpunt M en straal r.

Operaties

(O1) Bij een lijnstuk $AB = a$ en een lijnstuk $PQ = b$ is het mogelijk een punt S te construeren zodat $AS = a + b$

(O2) Bij twee lijnstukken $AB = a$ en $PQ = b$ zodat $a > b$, is het mogelijk een punt R te construeren zodat $AR = a - b$

(O3) Bij twee lijnstukken $AB = a$ en $PQ = b$ kun je een punt S construeren zodat $AS = a \cdot b$

(O4) Bij twee lijnstukken $AB = a$ en $PQ = b$ kun je een punt S construeren zodat $AS = a/b$

(O5) Bij een lijnstuk $AB = a$ kun je een punt S construeren zodat $BS = \sqrt{a}$

Vouwconstructies

(V1) Gegeven twee (verschillende) punten P en Q. Het is dan mogelijk om punt P op punt Q te vouwen.

(V2) Gegeven twee snijdende lijnen l en m. Het is dan mogelijk om l op m te vouwen.

(V3) Gegeven twee evenwijdige lijnen l en m. Het is dan mogelijk om l op m te vouwen.

(V4) Gegeven lijn l en een punt P. Het is dan mogelijk om l op zichzelf te vouwen zodat de vouw door P gaat.

(V5) Gegeven twee verschillende snijdende lijnen l en m. Het is dan mogelijk om het unieke snijpunt P van deze lijn te bepalen (als deze bestaat).

(V6) Gegeven twee (verschillende) punten P en Q. Dan is het mogelijk om de unieke rechte lijn l te vouwen die door beide punten gaat.

(V7) Gegeven een lijn r en twee punten P en Q niet op deze lijn. Dan kan je het punt P op de lijn r vouwen zodat de vouw door Q gaat.

(V7+) Gegeven twee punten P en Q en twee lijnen p en q. Dan is het mogelijk om P op p en Q op q te vouwen met dezelfde vouw.

Gevolgvouwen

(G1) Gegeven een punt M en een lijnstuk PQ, dan kan je een punt R vinden met vouwconstructies, zodat $MR = PQ$.

(G2) Gegeven een lijn l, met daarop een punt M, en een punt R dan kan je met vouwen alle punten S op l vinden zodat $MS = MR$.

(G3) Gegeven een lijn l, en een punt R, niet op l. Het is mogelijk om R op l te vouwen, en het beeldpunt R' van R onder deze vouw te bepalen.

(G4) Gegeven drie lijnstukken met lengte p, r en s, (zodat $p^2 - s^2 + r^2 > 0$) en punt M dan is het mogelijk een punt Z te vouwen zodat $MZ = \frac{p^2-s^2+r^2}{2p}$

8. Hints bij de opdrachten

1. Meetkunde met passer en liniaal

Opdracht 1.1: C en B liggen aan twee verschillende kanten van l.

Opdracht 1.2: Vierhoek $PCQD$ is een bijzondere vierhoek.

Opdracht 1.3: Als je eenmaal punt P en Q hebt, dan teken je twee cirkels. De ene cirkel heeft P als middelpunt en gaat door Q, de andere cirkel heeft Q als middelpunt en gaat door P.

Opdracht 1.4: Een vierkant is een vierhoek waarvan alle zijden loodrecht op elkaar staan en alle zijden even lang zijn.

Opdracht 1.5: In een rechthoek staan alle zijden loodrecht op elkaar.

Opdracht 1.6: Gebruik het inzicht dat je verkregen hebt in opgave 1.4 en 1.5.

Opdracht 1.7: "Draai" eerst PQ 90^0.

Opdracht 1.8: Neem de stralen met je passer over. (C4)

Opdracht 1.9: Vergelijk de afstand $r + s$ met de afstand p

Opdracht 1.10: Bereken hoeveel de stralen samen zijn, en vergelijk dit met de afstand tussen de middelpunten.

Opdracht 1.11: Vergelijk de afstand $s + p$ met de afstand r.

2. Construeerbaarheid

Opdracht 2.1: Gebruik dat $AB = AR + RB$

Opdracht 2.2: Begin met het getal 1, en gebruik (O1) en (O2) om lijnstukken op te tellen of van elkaar af te trekken.

Opdracht 2.3 Je kunt een lijnstuk construeren door alleen maar op te tellen met (O1), maar als je ook aftrekt met (O2) gaat het sneller.

Opdracht 2.4: Gebruik (C2) voor de loodlijn, en (C4) voor de evenwijdige lijnen.

Opdracht 2.5: Gebruik de gelijkvormigheid van ΔABC en ΔASD.

Opdracht 2.6: De delers van 15 zijn 3 en 5.

Opdracht 2.7: Kwadraten zijn snel te construeren.

Opdracht 2.8: Nu ligt D tussen A en C (in plaats van op het verlengde van AC)

Opdracht 2.9: Gebruik de gelijkvormigheid van ΔABD en ΔASC.

Opdracht 2.10: Welke getallen kunnen gemaakt worden door te delen?

Opdracht 2.11: Kun je van $2^3/_5$ een echte breuk maken?

Opdracht 2.12: Gebruik de stelling van Pythagoras bij een geschikte driehoek.

Opdracht 2.13: Construeer eerst AC en zoek dan het midden M om de cirkel te construeren.

Opdracht 2.14: Gebruik de stelling van Thales.

Opdracht 2.15: Wat krijg je als je de wortel van een wortel neemt?

Opdracht 2.16: Controleer of het getal is opgebouwd uit delen die te construeren zijn.

Opdracht 2.17: Gebruik de balansmethode op de vergelijking: $3x - 2 = -2x + 5{,}5$

Opdracht 2.18: Isoleer het kwadraat $(y - q)^2$ en trek dan de wortel.

Opdracht 2.19: Herschrijf de formule voor de cirkel tot: $y = \pm\sqrt{16 - x^2} + 3$.
Los de vergelijking $3x - 2 = \pm\sqrt{16 - x^2} + 3$ op

Opdracht 2.20: Gebruik de abc-formule om de vergelijking op te lossen.

Opdracht 2.21: Stel dat het originele altaar een kubus is met zijde 1, wat moet dan de zijde van het nieuwe altaar, dat ook kubusvormig is, worden?

Opdracht 2.22: Maak eerst een lijnstuk met lengte $\sqrt{5}$ met behulp van de stelling van Pythagoras.

3. Vouwen

Opdracht 3.2: Een bissectrice verdeelt een hoek in twee gelijke delen.

Opdracht 3.3: Vouw het papier dubbel.

Opdracht 3.4: In (V2) vouw je een bissectrice. Van welke hoek vouw je de bissectrice als je een lijn op zichzelf vouwt?

Opdracht 3.5: Als Q dicht bij $r$ligt dan heb je twee snijpunten, als Q verder van r ligt dan zijn er geen snijpunten.

Opdracht 3.6: Welk punt ligt beide vouwen?

Opdracht 3.7: Als je twee punten op elkaar vouwt, dan vouw je eigenlijk de middelloodlijn.

Opdracht 3.8: Een parabool is de conflictlijn van een lijn en een punt.

Opdracht 3.9: Een raaklijn aan een parabool en de parabool zelf hebben maar één punt gemeenschappelijk.

Opdracht 3.11: Probeer P op p te krijgen, en schuif dan P over p totdat Q op q valt.

Opdracht 3.12: Onder welke voorwaarden is (V7+) hetzelfde als (V7)?

Opdracht 3.13: Hoe ligt deze vouw ten op zichten van de twee parabolen?

4. Vouwen met passer en liniaal

Opdracht 4.1: Met (V4) vouw je loodlijnen, dus alle hoeken zijn 90^0.

Opdracht 4.2: Vouw de middelloodlijn van $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{B}$. De punten $\boldsymbol{P}$ en $\boldsymbol{Q}$ liggen op deze middelloodlijn.

Opdracht 4.3: Laat zien dat $\boldsymbol{QS} = \boldsymbol{RS}$ en dat $\boldsymbol{PS} = \boldsymbol{MS}$.

Opdracht 4.4: Vierhoek $QPMR$ is in dit geval een rechthoek.

Opdracht 4.5: Gebruik (V2) om MR op l te vouwen.

Opdracht 4.6: Gebruik (G2) om per lijn de twee punten S te vinden.

Opdracht 4.7: Wat is het verband tussen $\Delta\boldsymbol{RMP}$ en ΔSMP?

Opdracht 4.8: De beeldpunten van $\boldsymbol{R}$ kun je vinden door de vouw van (V7) op zichzelf te vouwen.

Opdracht 4.9: Als je $\boldsymbol{R}$ op R' vouwt ontstaat er een conflictlijn tussen twee punten.

Opdracht 4.10: Bereken $c - d$

Opdracht 4.11: Vouw eerst een lijnstuk met lengte 2.

Opdracht 4.12: $c = x^2 + y^2 = 25$
$d = (x-4)^2 + y^2 = 9$
Volg verder dezelfde stappen als in opdracht 4.10.

Opdracht 4.13: Vouw een lijn, loodrecht op de verbindingslijn van M en N, op afstand 4 van M.

Opdracht 4.14: $c = x^2 + y^2 = r^2$
$d = (x-p)^2 + y^2 = s^2$
Volg verder dezelfde stappen als in opdracht 4.10.

Opdracht 4.15: Gebruik de stelling van Pythagoras.

Opdracht 4.16: Gebruik de stelling van Pythagoras.

Opdracht 4.17: Kijk nog eens terug naar het vermenigvuldigen van lijnstukken. Probeer dit met vouwen na te bootsen.

Opdracht 4.18: Zoek eerst D op k, zodat $BD = AB$

Opdracht 4.19: Kijk nog eens terug naar het delen van lijnstukken. Probeer dit met vouwen na te bootsen.

Opdracht 4.20: De snijpunten liggen op een lijn. Bedenk hoe (P4) door vouwen mogelijk was.

5. Hoeken vouwen

Opdracht 5.1: Bij een gelijkbenige driehoek ABC, ligt C op de middelloodlijn van A en B.

Opdracht 5.2: 135^0 hoort bij een regelmatige achthoek.

Opdracht 5.3: D ligt zo dat $AD = BD = \varphi$, het is dus het snijpunt van twee cirkels.

Opdracht 5.4: Er geldt: $AE = ED = DC = BC = AB = 1$

Opdracht 5.5: Pas de strategie van de regelmatige 9-hoek, toe op een regelmatige n-hoek.

Opdracht 5.6: Je kunt een hoek herhaaldelijk in twee delen opdelen.

Opdracht 5.7: De gelijkzijdige driehoek construeer je net zoals in opdracht 5.1.

Opdracht 5.8: Bij optellen construeer je βaan de ene kant van α, bij aftrekken construeer je β aan de andere kant van α.

Opdracht 5.9: Je kunt hoeken optellen, van elkaar aftrekken, en hoeken delen door twee.

Opdracht 5.10: $\cos(\angle A) = \frac{Aanliggende\ zijde}{Schuine\ zijde}$

Opdracht 5.11: Begin met een lijnstuk met lengte $\cos(\alpha)$ en probeer vandaar uit α te construeren.

Opdracht 5.12: Gebruik stelling 5.1.

Opdracht 5.13: Gebruik de eerste goniometrische gelijkheid, met $t = 2x$en $u = x$

Opdracht 5.14: $a = 4$, $b = 0$, $c = -3$ en $d = -\frac{1}{2}$

Opdracht 5.15: p is een middelloodlijn.

Opdracht 5.16: Gebruik $\Delta AA'S$ en $\Delta TA'U$.

Opdracht 5.17: $\Delta AA'S$ en $\Delta E'AS$ zijn gelijk.

Opdracht 5.18: $\angle A = \angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3$

9. BRONNEN

Voor het schrijven van deze tekst is een aantal verschillende bronnen gebruikt. Hieronder volgt een overzicht van de gebruikte bronnen. Bij elke bron staat een korte toelichting over het gebruik van deze bron.

[1]: Honsberger, R. (1970). Ingenuity in mathematics. *AMC*, *10*, 12.

Dit boek bestaat uit negentien essays over verschillende wiskundige onderwerpen. Een van deze onderwerpen gaat over de constructie met passer en liniaal. In dit essay wordt vooral gekeken naar de relatie tussen euclidische meetkunde zoals we dat tegenwoordig kennen, en euclidische meetkunde zoals Euclides daar over dacht. Een voorbeeld hiervan is de mogelijkheid om lengten van lijnstukken over te nemen met behulp van een passer.
Dit essay gaat hiermee in op een aantal bijzondere eigenschappen van euclidische meetkunde.

[2]: Geretschläger, R. (2008). Geometric Origami. *AMC*, *10*, 12.

Dit boek beschrijft uitgebreid de vouwmeetkunde. Hierin wordt euclidische meetkunde behandeld, en gekoppeld aan vouwmeetkunde. De nadruk van dit boek ligt echter meer op de vouwmeetkunde, en de gevolgen daarvan. Eigenlijk gaat dit boek door waar deze scriptie ophoudt. Het beschrijft nog een aantal mogelijk vouwbare figuren. Het behandelt bijvoorbeeld ook de vouwbaarheid van regelmatige veelvlakken.
Dit boek is wiskundig formeler dan deze scriptie. De informatie in dit boek was heel nuttig, maar moest op verschillende plaatsen aangepast worden aan het niveau en de voorkennis van de doelgroep.

[3]: Demaine, E. D., & O'Rourke, J. (2007). *Geometric folding algorithms*. Cambridge: Cambridge University Press.

Dit boek bestaat uit drie delen. Het eerste deel behandelt het vouwen van eendimensionale objecten (i.e. lijnen), het tweede deel behandelt het vouwen van tweedimensionale objecten (i.e. papier) en het derde deel behandelt het vouwen van driedimensionale objecten (i.e. ruimtelijke figuren). Vooral het tweede deel is van belang voor deze scriptie. Hierin worden de vouwconstructies geïntroduceerd en gebruikt om te kijken naar de mogelijkheden die vouwen geven.
Het boek gaat verder dan deze tekst. Wij zijn er namelijk van uitgegaan dat we een vouw maken, en deze weer open vouwen voordat we een nieuwe vouw maken. Dit boek gaat ook in op wat er gebeurd als je de eerste vouw niet open maakt, maar in geslote toestand verder vouwt.
Deze tekst van dit boek is wel te hoog gegrepen voor onze doelgroep en is dus aangepast.

[4]: Heiberg, J. L. (1926). *The thirteen books of Euclid's Elements* (Vol. 1). CUP Archive.

Dit boek bevat de elementen van Euclides, vertaald en van commentaar voorzien door Heiberg. Euclides beschrijft hierin zijn eigen visie op de meetkunde. Hij omschrijft wat hij verstaat onder een lijn, een cirkel, een punt, een vlak, etc. Aan de hand van deze definities kijkt Euclides naar construeerbaarheid.
Dit boek vormt de basis voor de euclidische meetkunde. In dit boek worden de vijf procedures uitgelegd en behandeld. Wel zijn er in de loop van de geschiedenis aanpassingen en kanttekeningen gemaakt op deze tekst van Euclides.
In deze scriptie is dit boek voornamelijk gebruikt als achtergrond materiaal en als naslagwerk.

[5]: Drost, M., & Verra, P., (2013). *Handboek RTTI*. Bodegraven, Nederland: Docentplus.nl

Dit boek behandelt de verschillende manieren om vragen/opdrachten te stellen. Sommige vragen zijn lastiger dan andere. Sommige vragen veronderstellen een andere manier van oplossen dan andere. Dit boek geeft handvatten om de vraag zo te stellen dat het bereikt wat het wil bereiken. Dit boek is vooral gebruikt om de opdrachten van dit document op te stellen.
Volgens Drost en Verra zijn er vier type opgaven: Reproductie, Toepassing (1), Toepassing (2) en Inzicht.
In deze scriptie zijn geen reproductie vragen opgenomen. Dit soort vragen heeft als doel om te controleren of een bepaalde stelling of feit geleerd is. Dat is niet het doel van de opdrachten van deze scriptie.
Er zijn een aantal opgaven in de categorie Toepassingen (1). In dit soort vragen wordt de kennis van de lopende tekst toegepast binnen een bekende context. Voorbeelden hiervan zijn opgaven waarin de lezer gevraagd wordt om een bepaalde constructie uit te voeren. Dit zijn vaak opgaven waarin de lezer een uitzonderingsituatie onderzoekt.
Er zijn ook een aantal opgaven in de categorie Toepassingen (2). In dit soort vragen wordt de kennis van de lopende tekst toegepast binnen en onbekende context. In dit soort opgaven wordt de lezer uitgedaagd om zelf na te denken en te proberen om een constructie uit te voeren, voordat de lopende tekst hierop in gaat.
Er zijn enkele opgaven in de categorie Inzicht. Opgaven in deze categorie zijn bedoeld om de lezer te laten nadenken over de lopende tekst. Deze opgaven vragen vaak dat de lezer een conclusie trekt.

[6]: Geretschläger, R., (2009). Derde- en vierde-graadsvouwen. *Pythagoras* (april).
Geraadpleegd op:
http://www.pythagoras.nu/pyth/pdf/artikel_49654_Pythnr%205-origami.pdf

Dit artikel is een bewerking van het boek van Robert Geretschläger: Geometric Origami. Dit artikel behandelt de vouwconstructies en legt de relatie uit tussen vouwen en hogeremachtsvergelijkingen. Er wordt ook gekeken naar de driedeling van een hoek (wat een derdegraadsvergelijking oplevert). Dit artikel is geschreven in een wiskundetijdschrift. Hoewel het algebraïsche gedeelte vrij complex is, is het meetkundige gedeelte van dit artikel zeer geschikt geweest voor deze scriptie.

10. Verantwoording

Er zijn in de loop van de geschiedenis verschillende boeken, artikelen, papers en tijdschriften volgeschreven over het onderwerp: vouwmeetkunde. In de bronnenlijst (hoofdstuk 9) zie je daarvan enkele voorbeelden.

Deze scriptie is niet bedoeld ter vervanging van al deze teksten. Dit document is ook niet bedoeld als een overzicht waarin deze teksten behandeld worden. Dit document is bedoeld om het onderwerp vouwmeetkunde te presenteren op een begrijpelijke manier. Hiermee bedoelen we: begrijpelijk voor onze doelgroep: middelbare scholieren in de bovenbouw van het VWO met wiskunde B in hun pakket.
Dit betekent dat we elementen van verschillende teksten hebben gebruikt. Sommige elementen zijn daarin goed bruikbaar: zoals de spelregels voor euclidische meetkunde. Andere elementen zijn minder goed bruikbaar: zoals het gebruik van de Galoistheorie.

Om het begrijpelijk te maken voor onze doelgroep zijn er een aantal bewuste keuzes gemaakt. Er is bijvoorbeeld bewust gekozen om lichaamsuitbreidingen niet aan bod te laten komen. Het bewijs voor de construeerbaarheid van lengten maakt gebruik van lichaamsuitbreidingen van $\mathbf{Q}$. Omdat groepen- en ringentheorie geen onderdeel is van de stof die op middelbare scholen behandeld wordt, is er voor gekozen om daar hier niet te diep op in te gaan.
Dit betekent dan ook dat we er voor gekozen hebben om de construeerbaarheid op een andere manier te benaderen. De focus die we hadden bij de construeerbaarheid met passer en liniaal lag meer op een intuïtief vlak, waarbij gekeken is naar de mogelijkheden die wel kunnen.

Een ander gevolg van de keuze van onze doelgroep is het format waarin deze scriptie is geschreven. De lopende tekst wordt regelmatig onderbroken met opdrachten. Deze opdrachten zijn niet bedoeld ter controle van de stof, maar dienen om een actieve werkhouding op te wekken. De opdrachten moeten leerlingen uitdagen om over dingen na te denken, of dingen uit te proberen. De opdrachten moeten leerlingen helpen om dingen te ontdekken, en te ondervinden.
Dit document is echter geen lesmodule. In dit document is er van uitgegaan dat een leerling het helemaal zelf kan volgen zonder daarbij begeleid en gestuurd te worden door de docent. Het is dus geen lesboek waarbij de docent stuurt, maar een zelfstudiedocument waarbij de lezer wordt uitgedaagd om dingen zelf te ontdekken en actief met de stof bezig te zijn. Op deze manier is deze scriptie een toevoeging voor lesmodules over dit onderwerp.

Het grote verschil tussen deze scriptie en ander bestaand (les)materiaal over dit onderwerp, is de manier waarop deze scriptie geschreven is. Het doel van deze scriptie is niet om alles wiskundig en exact vast te leggen (zoals vaak bij lesmodules het geval is), maar om de leerling inzicht te geven in dit onderwerp op een begrijpelijke en laagdrempelige manier. Het is daarom een aanvulling op de lesmodules die wiskundig preciezer zijn.

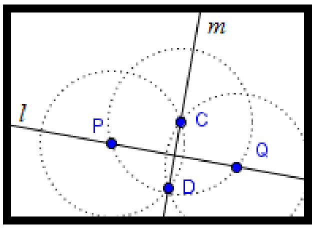
Eigenlijk zit deze scriptie tussen de lesboeken en de naslagwerken in. Het is meer dan een lesboek, maar het is ook geen naslagwerk (zoals de meeste van de bronnen die hiervoor gebruikt zijn). Op deze manier voegt dit document iets toe aan de lange lijst van teksten en documenten die al over dit onderwerp geschreven zijn.

11. Antwoorden van de opdrachten

1. Meetkunde met passer en liniaal

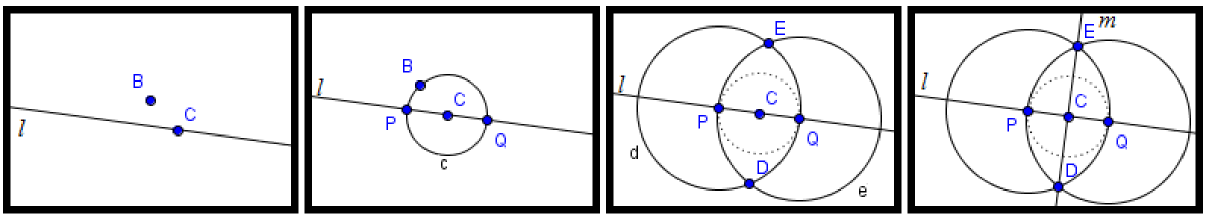
Opdracht 1.1:
Punt C ligt aan een kant van l. Een gedeelte van de cirkel ligt daarom aan die kant van l.
Punt B ligt aan de andere kant van l. De cirkel gaat door B, dus ook die kant ligt een deel van de cirkel.
Omdat de cirkel aan beide kanten van l ligt, heeft de cirkel twee snijpunten met l.

Opdracht 1.2:
$PC = PD$ (want C en D liggen op de cirkel met middelpunt P).
$QC = QD$ (want C en D liggen op de cirkel met middelpunt Q).
$PC = CQ$ (want P en Q liggen op de cirkel met middelpunt C).
Hieruit volgt dat: $PC = CQ = QD = PD$. Dus vierhoek $PDQC$ is een ruit.
Voor een ruit geldt dat de diagonalen loodrecht op elkaar staan.
Dus m staat loodrecht op l.



Opdracht 1.3:

Stap 1:	Kies een willekeurig punt B niet op l.	
Stap 2:	Construeer de cirkel c met middelpunt C, zodat B op de cirkel ligt.	(P2)
Stap 3:	c snijdt l in twee punten. Noem het ene punt P. Noem het andere punt Q.	(P4)
Stap 4:	Construeer de cirkel d met middelpunt P, zodat Q op de cirkel ligt.	(P2)
Stap 5:	Construeer de cirkel e met middelpunt Q, zodat P op de cirkel ligt.	(P2)
Stap 6:	Noem D en E snijpunten van d en e.	(P5)
Stap 7:	Construeer de lijn m door D en E.	(P1)

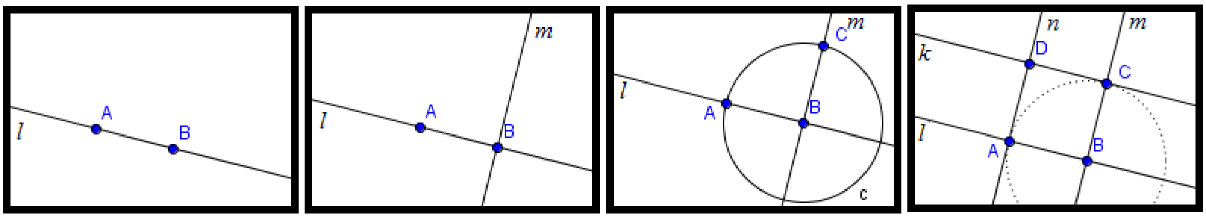


De lijn m die je bij stap 7 construeert is de gezochte loodlijn.

Bewijs:
De lijn m is de middenloodlijn van P en Q.
C ligt in het midden van P en Q (want P en Q liggen op de cirkel met middelpunt C).
Dus de lijnen m en l staan loodrecht én m gaat door C.
Daarom is lijn m de gezochte loodlijn.

Opdracht 1.4:

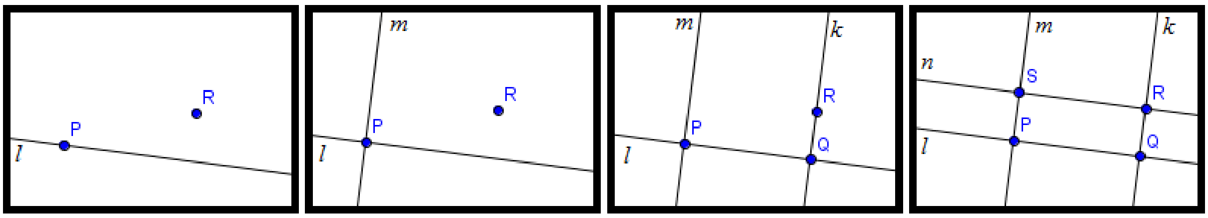
Stap 1:	Teken de lijn l door A en B.	(P1)
Stap 2:	Construeer de loodlijn m op l door B.	(C2)
Stap 3:	Construeer de cirkel c met middelpunt B, zodat A op de cirkel ligt.	(P2)
Stap 4:	Noem C het snijpunt van c met m.	(P4)
Stap 5:	Construeer de loodlijn k op m door C.	(C2)
Stap 6:	Construeer de loodlijn n op l door A.	(C2)
Stap 7:	Noem D het snijpunt van k en n.	(P3)



Vierhoek ABCD is een vierkant.

Opdracht 1.5:

Stap 1:	Construeer de loodlijn m op l door P.	(C2)
Stap 2:	Construeer de loodlijn k op l door R.	(C1)
Stap 3:	Noem Q het snijpunt van k en l.	(P3)
Stap 4:	Construeer de loodlijn n op$k$ door R.	(C2)
Stap 5:	Noem S het snijpunt van n en m.	(P3)



Vierhoek PQRS is een rechthoek.

Opdracht 1.6:

Stap 1:	Construeer de loodlijn k op l door P.	(C1)
Stap 2:	Construeer de loodlijn m op k door P.	(C2)

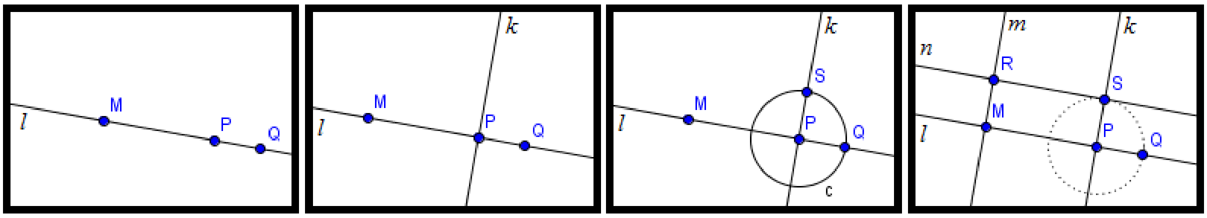
De lijn die je bij stap 2 construeert is de gezochte loodlijn.

Bewijs:
De hoek die de lijn m maakt met k is 90^0.
De hoek die de lijn k maakt met l is 90^0.
Omdat deze beide hoeken gelijk zijn, vormen de drie lijn$l$, k en m een Z-hoek.
Daarom zijn l en m evenwijdig.

Opdracht 1.7:

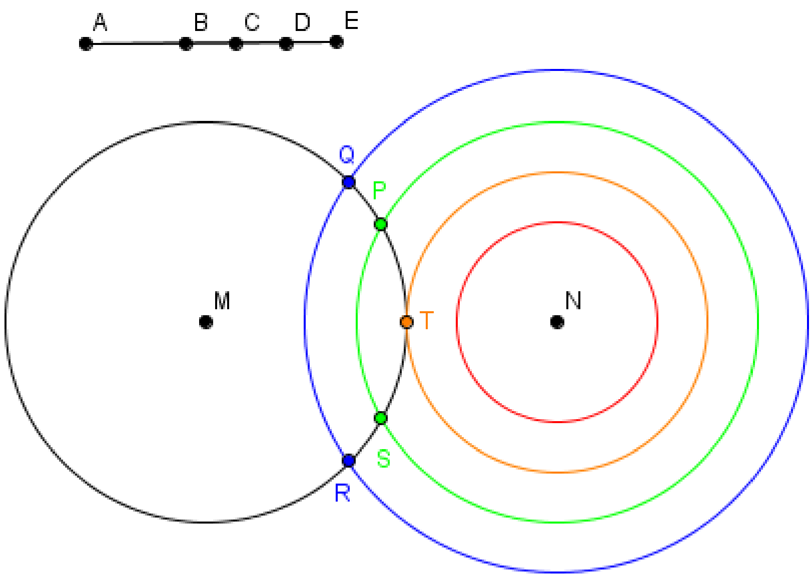
Stap 1:	Construeer de lijn l door P en Q. (M ligt nu op l)	(P1)
Stap 2:	Construeer de loodlijn k op l door P.	(C2)
Stap 3:	Construeer de cirkel $c$met middelpunt P, zodat Q op de cirkel ligt.	(P2)
Stap 3:	Noem S een snijpunt van c met k.	(P4)
Stap 4:	Construeer de loodlijn m op l door M.	(C2)
Stap 5:	Construeer de loodlijn n op k door S.	(C2)
Stap 6:	Noem R het snijpunt van m en$n$.	(P3)

Nu geldt: $MR = PQ$.



Bewijs:
$PS = PQ$(want Q en S liggen op de cirkel met middelpunt P).
$MR = PS$ (want $MPSR$ is een parallellogram / rechthoek).
Dus $MR = PQ$.

Opdracht 1.8
Hieronder zijn de vier verschillende cirkels in verschillende kleuren aangegeven.



Opdracht 1.9
Als de twee stralen samen groter zijn dan de afstand tussen de middelpunten, dan zijn er twee snijpunten. Als de twee stralen samen even groot zijn als de afstand tussen de middelpunten, dan is er maar één snijpunt. Als de twee stralen samen kleiner zijn dan de afstand tussen de middelpunten, dan zijn er geen snijpunten.

Dus:
Als $r + s > p$ dan zijn er twee snijpunten.
Als $r + s = p$ dan is er één snijpunt.
Als $r + s < p$ dan zijn er geen snijpunten.

Opdracht 1.10
Zie opdracht 1.8
a) De stralen zijn samen 4 + 5 = 9. Dit is groter dan 7, en er zijn inderdaad 2 snijpunten (Q en R).
b) De stralen zijn samen 4 + 4 = 8. Dit is groter dan 7, en er zijn inderdaad 2 snijpunten (P en S).
c) De stralen zijn samen 4 + 3 = 7. Dit is gelijk aan 7, en er is inderdaad 1 snijpunt (T).
d) De stralen zijn samen 4 + 2 = 6. Dit is kleiner dan 7, en er is inderdaad geen snijpunt.
Dus de conclusie klopt bij alle vier de cirkels.

Opdracht 1.11
Als $s + p > r$ dan zijn er twee snijpunten.
Als $s + p = r$ dan is er één snijpunt.
Als $s + p < r$ dan zijn er geen snijpunten.

2. Construeerbaarheid

Opdracht 2.1:
Omdat $AB = AR + RB$ geldt ook: $AR = AB - RB$.
$RB = b$ (want R ligt op cirkel c).
$AB = a$
Dus $AR = a - b$

Opdracht 2.2:
Er zijn veel meer getallen te construeren. Hier volgen een paar voorbeelden:

2 = 1 + 1	4 = 2 + 2	7 = 4 + 3	6 = 7 – 1	10 = 12 – 2
3 = 2 + 1	5 = 2 + 3	8 = 3 + 5	12 = 6 + 6	11 = 12 – 1

Opdracht 2.3:

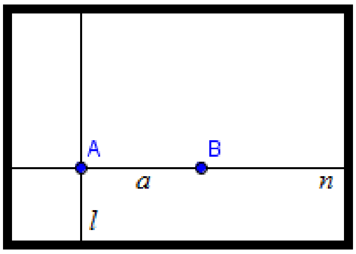
Stap 1: Construeer eerst een lijnstuk met lengte 2:	1 + 1 = 2.	(O1)
Stap 2: Construeer een lijnstuk met lengte 4:	2 + 2 = 4.	(O1)
Stap 3: Construeer een lijnstuk met lengte 8:	4 + 4 = 8.	(O1)
Stap 4: Construeer een lijnstuk met lengte 16:	8 + 8 = 16.	(O1)
Stap 5: Construeer een lijnstuk met lengte 15:	16 – 1 = 15.	(O2)

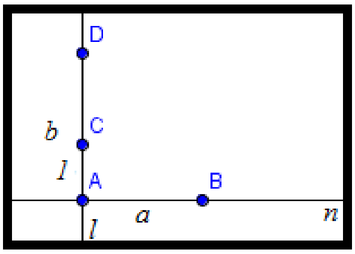
Als je alleen (O1) wil gebruiken, dan doe je de eerste drie stappen, en gaat daarna als volgt verder:

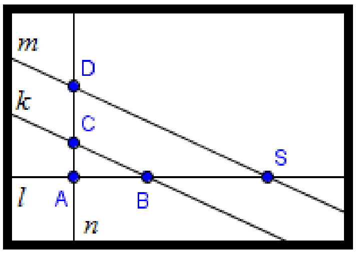
Stap 4: Construeer een lijnstuk met lengte 12:	8 + 4 = 12.	(O1)
Stap 5: Construeer een lijnstuk met lengte 14:	12 + 2 = 14.	(O1)
Stap 6: Construeer een lijnstuk met lengte 15:	14 + 1 = 15.	(O1)

Opdracht 2.4:

Stap 1:	Construeer de lijn n door A en B	(P1)
Stap 2:	Construeer de loodlijn $l$op n door A.	(C2)
Stap 2:	Construeer C op l zodat $AC = 1$	(C4)
Stap 3:	Construeer D op l zodat $AD = b$	(C4)
Stap 4:	Construeer $k$door C en B	(P1)
Stap 5:	Construeer m evenwijdig aan k door D	(C3)
Stap 6:	Noem S het snijpunt van m en n	(P3)







Opdracht 2.5:
Omdat CB en DS evenwijdig lopen is driehoek ASD een snavelfiguur, en dus zijn ΔABC en ΔASD gelijkvormig.
Er geldt dan:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AS}{AD} \rightarrow \frac{a}{1} = \frac{AS}{b}$$

Als je nu kruislings vermenigvuldigt dan krijg je dat $AS = a \cdot b$
Op deze manier kan je twee lijnstukken vermenigvuldigen.

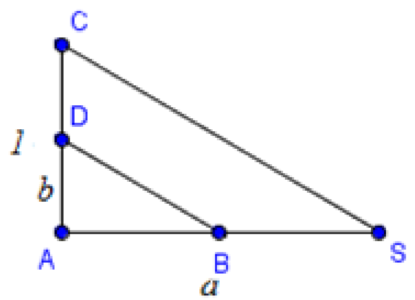
Opdracht 2.6:

Stap 1: Construeer eerst een lijnstuk met lengte 2:	1 + 1 = 2.	(O1)
Stap 2: Construeer een lijnstuk met lengte 3:	2 + 1 = 3.	(O1)
Stap 3: Construeer een lijnstuk met lengte 5:	3 + 2 = 5.	(O1)
Stap 4: Construeer een lijnstuk met lengte 15:	3 · 5 = 15.	(O3)

Opdracht 2.7:
Het gaat het snelst via 81.

Stap 1: Construeer eerst een lijnstuk met lengte 2:	1 + 1 = 2.	(O1)
Stap 2: Construeer een lijnstuk met lengte 3:	2 + 1 = 3.	(O1)
Stap 3: Construeer een lijnstuk met lengte 9:	3 x 3 = 9.	(O3)
Stap 4: Construeer een lijnstuk met lengte 81:	9 x 9 = 81.	(O3)
Stap 5: Construeer een lijnstuk met lengte 79:	81 – 2 = 79	(O2)

Opdracht 2.8



Opdracht 2.9:
Omdat CB en DS evenwijdig lopen is driehoek ABD een snavelfiguur, en dus zijn ΔABD en ΔASC gelijkvormig.

Er geldt: $\frac{AB}{AD} = \frac{AS}{AC} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{AS}{1}$

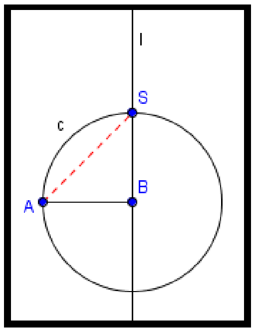
Dus $AS = a/b$
Op deze manier kan je twee lijnstukken door elkaar delen.

Opdracht 2.10:
Alle breuken zijn nu te construeren. Bijvoorbeeld ${}^{1}/_{2},\ {}^{7}/_{8},\ 2\,{}^{3}/_{5}$ etc..

Opdracht 2.11:
$2\,{}^{3}/_{5} = {}^{13}/_{5}$
Dus $2\,{}^{3}/_{5}$ is te maken door (O4) te gebruiken bij twee lijnstukken met lengte 13 en 5.

Opdracht 2.12:

Stap 1:	Construeer een cirkel c met middelpunt B en door A	(P2)
Stap 2:	Construeer de loodlijn l op AB door B	(C2)
Stap 3:	Noem S het snijpunt van c en l	(P3)



Lijnstuk AS heeft lengte $\sqrt{2}$
Bewijs:

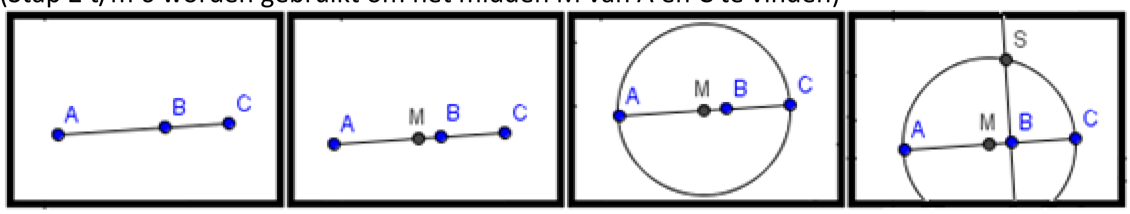
$$BS = AB = 1$$

Dus $AS = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Opdracht 2.13

Stap 1:	Construeer $AC = a + 1$.	(O1)
Stap 2:	Construeer cirkel d met middelpunt A, zodat C op de cirkel ligt.	(P2)
Stap 3:	Construeer cirkel e met middelpunt C, zodat A op de cirkel ligt.	(P2)
Stap 4:	Noem E en F de twee snijpunten van d en e.	(P5)
Stap 5:	Teken de lijn l door E en F.	(P1)
Stap 6:	Noem M het snijpunt van AC en l.	(P3)
Stap 7:	Construeer de cirkel c met middelpunt M zodat A op de cirkel ligt.	(P2)
Stap 8:	Construeer de loodlijn m op AC door B	(C2)
Stap 9:	Noem S het snijpunt van c en m.	(P4)

(Stap 2 t/m 6 worden gebruikt om het midden M van A en C te vinden)



Opdracht 2.14

$\angle ASC$ = 90^0 (Stelling van Thales)

Dus $\angle CSB$ + $\angle ASB$ = 90^0

$\angle SAB$ + $\angle ASB$ = 90^0 (Driehoekssom)

Dus $\angle SAB$ = $\angle CSB$

$\angle SBA$ = $\angle SBC$ = 90^0 (Loodlijn)

Dus ΔABS en ΔSBC zijn gelijkvormig (*hh*)
Er geldt dan:

$$\frac{AB}{BS} = \frac{BS}{BC} \rightarrow \frac{a}{BS} = \frac{BS}{1}$$

Kruislings vermenigvuldigen geeft dan: $(BS)^2 = a$.
Dus $BS = \sqrt{a}$

Opdracht 2.15

Construeer eerst $\sqrt{a}$ met (O5) en construeer daarna $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$

Opdracht 2.16

a) Deze is construeerbaar. Het is namelijk opgebouwd uit wortels, breuken, en positieve gehele getallen.
b) Deze lijkt (nog) niet construeerbaar te zijn. De derdemachtswortel is (nog) niet te construeren.
c) Deze is construeerbaar. Het is namelijk opgebouwd uit wortels, breuken, en positieve gehele getallen. Hoewel machtsverheffen (nog) niet mogelijk is, is kwadrateren wel mogelijk (met O3)
d) Deze lijkt (nog) niet construeerbaar te zijn. De zesdemachtswortel is (nog) niet te construeren.

Opdracht 2.17

a) Omdat beide lijnen een verschillend hellingsgetal hebben, hebben ze ook een verschillende helling, en dus lopen de lijnen niet evenwijdig.

b)
$3x - 2 = -2x + 5{,}5$ (Tel bij beide kanten $2x$ op)
$5x - 2 = 5{,}5$ (Tel bij beide kanten 2 op)
$5x = 7{,}5$ (Deel beide kanten door 5)
$x = 1{,}5$
$y = 3 \cdot 1{,}5 - 2 = 2{,}5$

Dus het snijpunt is (1.5 , 2.5)

Opdracht 2.18

$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ (Trek aan beide kanten $(x-p)^2$ af)

$(y-q)^2 = r^2 - (x-p)^2$ (Neem aan beide kanten de wortel)

$y - q = \pm\sqrt{r^2 - (x-p)^2}$ (Tel aan beide kanten q op)

$y = \pm\sqrt{r^2 - (x-p)^2} + q$

Opdracht 2.19

$3x - 2 = \pm\sqrt{16 - x^2} + 3$ (Trek bij beide kanten 3 af)

$3x - 5 = \pm\sqrt{16 - x^2}$ (Kwadrateer beide kanten)

$9x^2 - 30x + 25 = 16 - x^2$ (Trek bij beide kanten 16 af)

$9x^2 - 30x + 9 = -x^2$ (Tel bij beide kanten x^2 op)

$10x^2 - 30x + 9 = 0$

Met de abc-formule krijg je dan de twee oplossingen:

$x = \frac{30 + \sqrt{540}}{20} \approx 2{,}66$ en $x = \frac{30 - \sqrt{540}}{20} \approx 0{,}34$

Dit geeft $y = 5.99$ en $y = -0.99$ als oplossingen.

Dus de snijpunten zijn: (2.66 , 5.99) en (0.34 , -0.99)

Opdracht 2.20

Het vervangen van y in de formule voor d geeft:

$x^2 + (0.6x - 0.4)^2 = 16$ (Haakjes wegwerken geeft)

$x^2 + 0.36x^2 - 0.48x + 0.16 = 16$

Dit geeft: $1.36x^2 - 0.48x - 15.84 = 0$

Met de abc-formule krijg je de volgende oplossingen:

$x = \frac{0.48 + \sqrt{86.4}}{2.72} \approx 3.59$ en $x = \frac{0.48 - \sqrt{86.4}}{2.72} \approx -3.24$

Opdracht 2.21

Stel dat de originele kubus zijden heeft met lengte 1, dan is de inhoud $1^3 = 1$.

De nieuwe kubus moet dan een inhoud van 2 hebben.

Dan is de zijde van deze kubus: $\sqrt[3]{2}$

Opdracht 2.22

<u>Fase 1: De constructie van $\sqrt{5}$</u>

Gegeven een lijnstuk EF met lengte 1

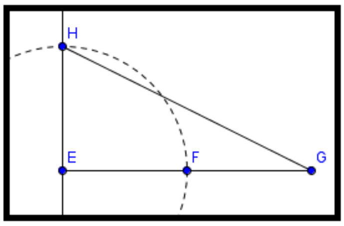
Stap 1: Construeer een lijnstuk met EG lengte 1 + 1 = 2 (O1)

Stap 2: Construeer een loodlijn l op EG door E (C2)

Stap 3: Construeer de cirkel c met middelpunt E, door F (P2)

Stap 4: Noem H het snijpunt van c en l (P4)

Nu geldt: $HG = \sqrt{5}$



<u>Fase 2: De constructie van φ</u>

Gegeven een lijnstuk HG met lengte $\sqrt{5}$

Stap 1: Construeer een lijnstuk HK met lengte $\sqrt{5} + 1$ (O1)

Stap 2: Construeer een lijnstuk HL met lengte $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ (O4)

3. Construeerbaarheid

Opdracht 3.2:

Beide lijnen maken, omdat ze niet evenwijdig lopen, een $\angle\alpha$ met elkaar.

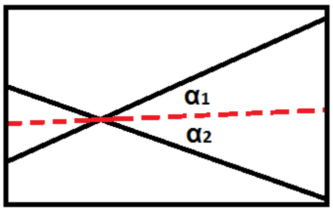
De vouw verdeelt deze hoek in twee hoeken: $\angle\alpha_1$en $\angle\alpha_2$.

Als je nu l op m vouwt, dan valt $\angle\alpha_1$ samen met $\angle\alpha_2$.

Omdat beide hoeken op elkaar vallen zijn ze ook even groot.

De vouw verdeelt $\angle\alpha$ in twee gelijke hoeken,

en dus is de vouw een bissectrice.



Opdracht 3.3:

Bij een rechthoekig blaadje zijn de boven- en onderkant van het papier evenwijdig.

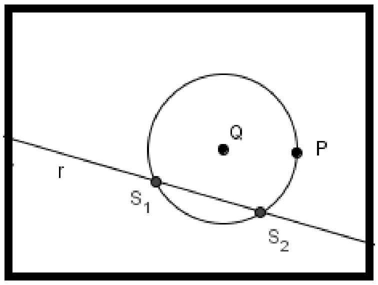
Vouw een rechthoekig blaadje door midden. De boven- en onderkant vallen de op elkaar. De vouw die gemaakt is, vouwt dan twee evenwijdige lijnen op elkaar.

Opdracht 3.4:

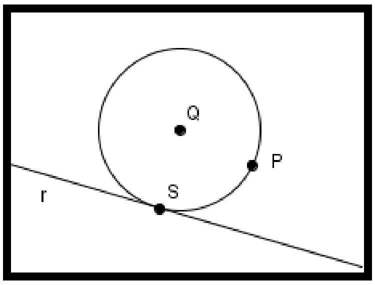
(V4) vouwt de bissectrice van een hoek van 180^0. Dit levert twee hoeken van 90^0 op.

Dus de vouw staat loodrecht op l

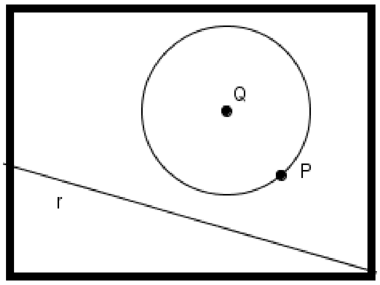
Opdracht 3.5:



De afstand tussen Q en P is groter dan de afstand tussen Q en r



De afstand tussen Q en P is gelijk aan de afstand tussen Q en r

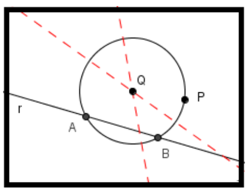


De afstand tussen Q en P is kleiner dan de afstand tussen Q en r

Opdracht 3.6

Als je twee snijpunt hebt, dan gaan de vouwen allebei door Q.

Als je maar één snijpunt gaat de vouw ook door Q.

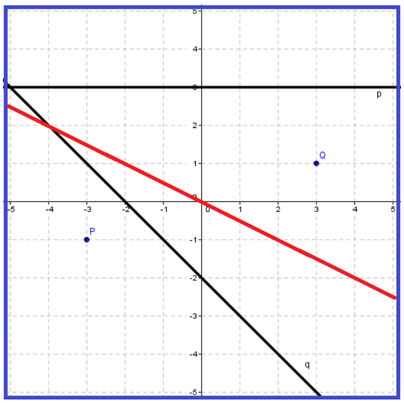


Opdracht 3.7
Q ligt even ver van P als van de snijpunten, want deze liggen allebei op de cirkel met middelpunt Q. Dus ligt Q op de middelloodlijn. Omdat je de middelloodlijn vouwt, ligt Qautomatisch ook op de vouw.

Opdracht 3.8
Een parabool is de conflictlijn van een punt en één lijn. Alle punten op de parabool hebben gelijk afstand tot het punt als tot de lijn. Dit zijn precies de punten waarbij de cirkel met middelpunt Q, door P, één snijpunt heeft met de lijn r.

Opdracht 3.9
De vouw en de parabool hebben maar één gemeenschappelijk punt.
Verder ligt de hele lijn aan dezelfde kant van de parabool, dus is het een raaklijn.

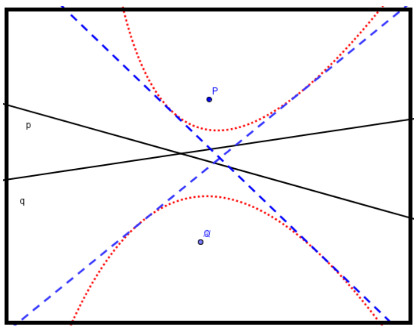
Opdracht 3.11
Hiernaast staat het assenstelsel.
Het vouwen langs de rode lijn (y = -0,5x) geeft de gewenste vouw.
Dan valt P op p en Q op q



Opdracht 3.12
Als P en Q samenvallen (dan heb je maar één punt) en als p en q samenvallen (dan heb je maar één lijn), dan is (V7+) gelijk aan (V7)

Opdracht 3.13

De twee vouwen zijn raaklijnen aan beide parabolen.
Je vouwt dus eigenlijk een gemeenschappelijke raaklijn met (V7+)



4. Vouwen met passer en liniaal

Opdracht 4.1:
Omdat (V4) loodlijnen vouwt, zijn alle vier de hoeken 90^0.
Dus vierhoek $ABCD$ is een rechthoek.
Dan geldt ook: $AB = CD$ en $AD = BC$.

In ΔABC geldt:

$\angle B = 90^0$ (Vanwege de loodlijn (V4))

$\angle A = 45^0$ (Vanwege de bissectrice (V2))

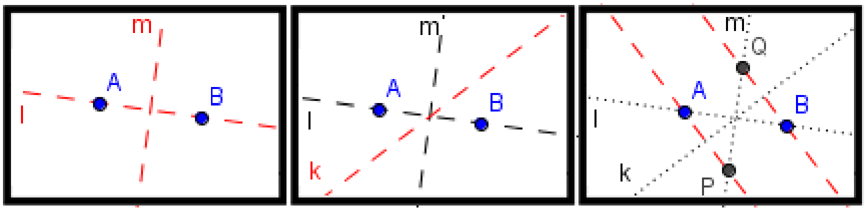
Dus $\angle C = 45^0$ (Som van de hoeken van een driehoek)

Dus is ΔABC een gelijkbenige driehoek en dus geldt: $AB = BC$.

Er geldt in de vierhoek $ABCD$: $CD = AB = BC = AD$.
Omdat alle zijden even lang zijn, en de hoeken 90^0 zijn, is het een vierkant.

Opdracht 4.2

Stap 1: Vouw de lijn l door A en B.	(V6)
Stap 2: Vouw de lijn m door A op B te vouwen.	(V1)
Stap 3: Vouw de lijn k door l op m te vouwen.	(V2)
Stap 4: Vouw k op zichzelf door A.	(V4)
Stap 5: Noem het ontstane snijpunt P	(V5)
Stap 6: Vouw k op zichzelf door B.	(V4)
Stap 7: Noem het ontstane snijpunt Q.	(V5)



Opdracht 4.3

Noem T het snijpunt van MP en l.
Er geldt:

$ST = ST$
$\angle MTS = \angle PTS$ (middelloodlijn)
$MT = PT$ (middelloodlijn)
Dus $\Delta MTS = \Delta PTS$ (ZHZ)
Dus $MS = PS$

Noem Z het snijpunt van m en l.
Er geldt:

$SZ = SZ$
$\angle RZS = \angle QZS$ (middelloodlijn)
$RZ = QZ$ (middelloodlijn)
Dus $\Delta RZS = \Delta QZS$ (ZHZ)
Dus $RS = QS$

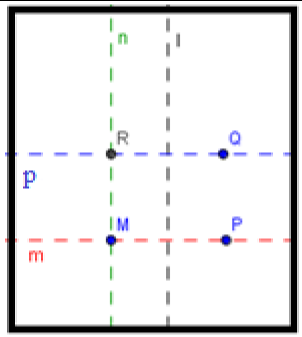
Er geldt dan: $MR = RS - MS = QS - PS = PQ$

Opdracht 4.4

Stap 1: Vouw m, door l op zichzelf te vouwen door M. (V4)
Stap 2: Vouw n, door m op zichzelf te vouwen door M. (V4)
Stap 3: Vouw p, door l op zichzelf te vouwen door Q. (V4)
Stap 4: Noem R het snijpunt van p en n. (V5)

Er geldt: $MR = PQ$

Omdat l evenwijdig loopt aan PQ, geldt dat $QPMR$ een rechthoek is.
Dus geldt $MR = PQ$



Opdracht 4.5

Er zijn twee punten (S_1 en S_2) te vinden. Je voert twee keer de volgende constructie uit.

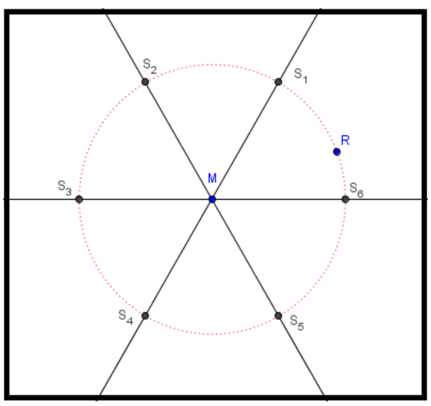
Stap 1: Vouw de lijn n door M en R. (V6)
Stap 2: Vouw lijn m, door n op l te vouwen. (V2)
Stap 3: Vouw lijn k, door lijn m op zichzelf door R. (V4)
Stap 4: Noem S het snijpunt van k en l. (V5)

Nu geldt: $MR = MS$

Opdracht 4.6

Je gebruikt (G2) om de zes snijpunten te vinden.
Je voert drie keer de volgende constructie uit:

Stap 1: Vouw de lijn l door M en R. (V6)
Stap 2: Vouw de lijn m, door l op één van de drie lijnen te vouwen. (V2)
Dit geeft twee vouwen: (de twee bissectrices).
Stap 3: Vouw de lijn k, door m op zichzelf te vouwen, door R (V4)
Je kunt stap 3 twee keer uitvoeren. Voor elke lijn m, één keer.
Stap 4: Noem S het snijpunt van k en de gegeven lijn door M. (V5)

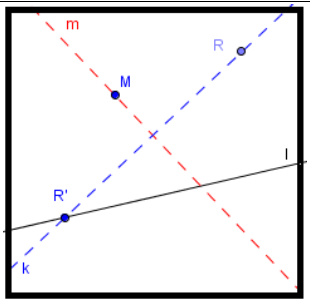


Opdracht 4.7
Er geldt dat $MR = MS$, want S en R liggen op de cirkel met middelpunt M.
Er geldt dat $MP = MP$.
Er geldt dat $\angle MPR = \angle MPS = 90^0$, want m is de loodlijn op l.
Dus $\Delta RMP = \Delta SMP$ (ZZR)

Dus geldt: $SP = PR$.

Opdracht 4.8:
Stap 1: Vouw de lijn m, door R op te vouwen,
zodat m door M gaat. (V7)
Als er twee snijpunten zijn, kan dit twee keer.
Stap 2: Vouw de lijn k, door m op zichzelf te vouwen door R (V4)
Stap 3: Noem R' het snijpunt van k en l.

$R'$is het beeldpunt van R.



Opdracht 4.9
Als R' het beeldpunt is van R, dan ontstaat de lijn $m$door R op R' te vouwen.
Met andere woorden: m is de middelloodlijn van R en R'.
Dus voor alle punten op m, in het bijzonder M, geldt dat de afstand tot R gelijk is aan de afstand tot R'. Dus $MR = MR'$.

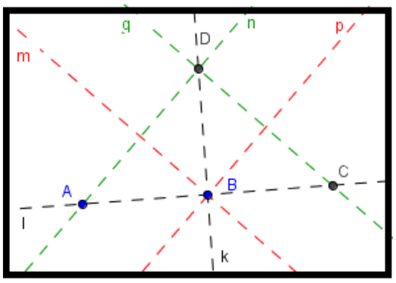
Opdracht 4.10
$c: x^2 + y^2 = 25$
$d: (x - 10.5)^2 + y^2 = 72.25$

$c - d$ wordt dan $21x - 110.25 = -47.25$

Dus $21x = 63$
Dit geeft $x = 3$.
Voor beide snijpunten geldt: de x-coördinaat is 3.

Opdracht 4.11
Gegeven een lijnstuk AB met lengte 1.

Fase 1:
Stap 1: Vouw lijn l door A en B. (V6)
Stap 2: Vouw lijn k, door l op zichzelf te vouwen door B. (V4)
Stap 3: Vouw lijn m door k op l te vouwen. (V2)
Stap 4: Vouw lijn n, door m op zichzelf te vouwen door A. (V4)
Stap 5: Noem D het snijpunt van n en k. (V5)
Stap 6: Vouw lijn p, door k op l te vouwen. (V2)
Stap 7: Vouw lijn q, door p op zichzelf te vouwen door D. (V4)
Stap 8: Noem C het snijpunt van q en l (V5)

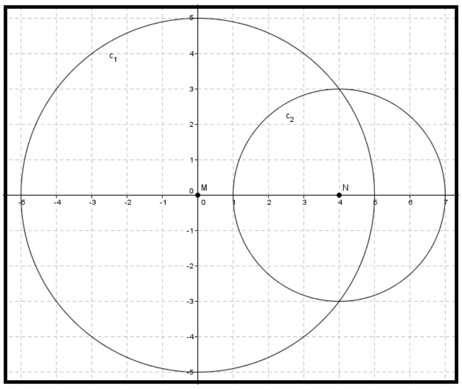


Nu geldt: $AB = BC$.

Fase 2:
Herhaal fase 1 om E te vinden zodat $EC = BC$

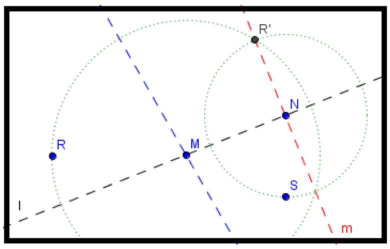
Dan geldt: $AE = AB + BC + EC = 3AB = 3$.

Opdracht 4.12
$c: x^2 + y^2 = 25$
$d: (x-4)^2 + y^2 = 9$



$c - d$ wordt dan: $8x - 16 = 16$
Dus $8x = 32$
Dit geeft $x = 4$.
Voor beide snijpunten geldt: de x-coördinaat is 4.
De punten liggen dus op de lijn: $x = 4$

Opdracht 4.13
Stap 1: Vouw lijn l, door M en N. (V6)
Stap 2: Vouw lijn m, door l op zichzelf te vouwen door N (V4)
De snijpunten liggen dus op deze lijn m.
Stap 3: Vouw R op m en bepaald het beeldpunt R' (G3)



R' is een van de twee snijpunten.

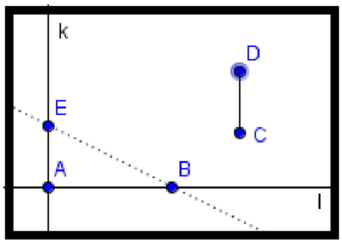
Opdracht 4.14
$c: x^2 + y^2 = r^2$
$d: (x-p)^2 + y^2 = s^2$

$c - d$ wordt dan: $2px - p^2 = r^2 - s^2$
Dus $2px = p^2 - s^2 + r^2$
Dus $x = \frac{p^2 - s^2 + r^2}{2p}$.
De punten liggen op de lijn: $x = \frac{p^2 - s^2 + r^2}{2p}$.

Opdracht 4.15
Gegeven twee lijnstukken $AB = p$ en $CD = r$.

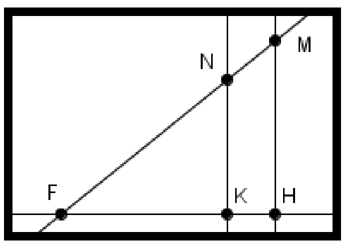
Stap 1: Vouw de lijn l, door A en B. (V6)
Stap 2: Vouw de lijn k, door l op zichzelf te vouwen door A. (V4)
Stap 3: Vouw punt E op k, zodat $AE = CD$ (G1)

Nu geldt (met de stelling van Pythagoras): $EB = \sqrt{p^2 + r^2}$



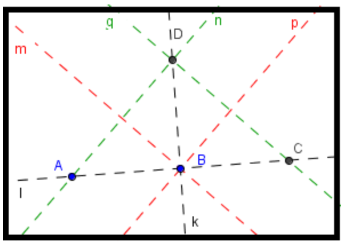
Opdracht 4.16
ΔGFH is een rechthoekige driehoek.
Dus er geldt: $FH = \sqrt{GH^2 - FG^2} = \sqrt{p^2 + r^2 - s^2} = \sqrt{p^2 - s^2 + r^2}$

Opdracht 4.17
Stap 1: Vouw de lijn l, door F en H. (V6)
Stap 2: Vouw K op l, zodat $FK = JP$. (G1)
Stap 3: Vouw de lijn m door l op zichzelf te vouwen door K. (V4)
Stap 4: Vouw de lijn n door l op zichzelf te vouwen door H. (V4)
Stap 5: Vouw N op m, zodat $FN = FH$. (G1)
Stap 6: Vouw de lijn k, door F en N. (V6)
Stap 7: Noem M het snijpunt van k en n. (V5)



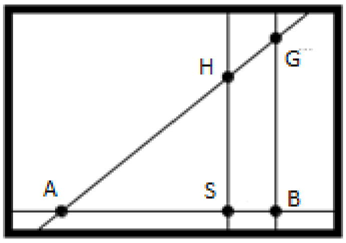
Omdat ΔFHM gelijkvormig is met ΔFKL geldt:
$\frac{FM}{FN} = \frac{FH}{FK}$ dus $FM = \frac{FH \cdot FN}{1} = FH \cdot FN = \sqrt{p^2 - s^2 + r^2} \cdot \sqrt{p^2 - s^2 + r^2} = p^2 - s^2 + r^2$

Opdracht 4.18



Stap 1: Vouw lijn m, door k op l te vouwen. (V2)
Stap 2: Vouw lijn n, door m op zichzelf te vouwen door A. (V4)
Stap 3: Noem D het snijpunt van n en m. (V5)
Stap 4: Vouw lijn p, door k op l te vouwen. (V2)
Stap 5: Vouw lijn q, door p op zichzelf te vouwen door D. (V4)
Stap 6: Noem C het snijpunt van q en l. (V5)

Opdracht 4.19

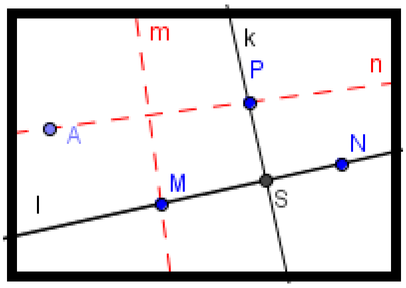


Stap 1: Vouw de lijn l, door A en B. (V6)
Stap 2: Vouw de lijn m, door $l$op zichzelf te vouwen door B. (V4)
Stap 3: Vouw G op m, zodat $AG = CD$ (G1)
Stap 4: Vouw H op m, zodat $AH = EF$ (G1)
Stap 5: Vouw de lijn n, door $l$op zichzelf te vouwen door H. (V4)
Stap 6: Noem S het snijpunt van n en l. (V5)

Omdat ΔABG gelijkvormig is met ΔASH geldt:
$\frac{AB}{AG} = \frac{AS}{AH}$, dus: $\frac{p^2-s^2+r^2}{2p} = \frac{AS}{1}$. Dit geeft$AS = \frac{p^2-s^2+r^2}{2p}$

Opdracht 4.20

De snijpunten liggen op de lijn k, op een afstand r van M. Deze snijpunten vind je als volgt:



Stap 1: Vouw de lijn m, door A op k te vouwen, zodat de vouw door M gaat. (V7)
Stap 2: Vouw de lijn n, door m op zichzelf te vouwen, door A. (V4)
Stap3: Noem P het snijpunt van n en k. (V5)

P is het beeld van A onder de vouw m.
Er geldt daarom: $MP = MA = r$.
Het anders snijpunt Q vind je op dezelfde manier.

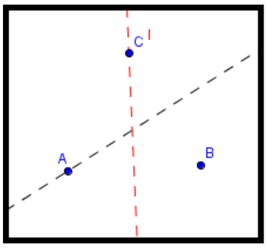
5. Hoeken vouwen

Opdracht 5.1

Stap 1: Vouw de lijn $\boldsymbol{l}$, door $\boldsymbol{A}$ op $\boldsymbol{B}$ te vouwen. (V6)

Stap 2: Vouw $\boldsymbol{B}$ op $\boldsymbol{l}$, zodat de vouw door $\boldsymbol{A}$ gaat, (V7)
en bepaal het beeldpunt $\boldsymbol{C}$. (G3)

Driehoek $\boldsymbol{ABC}$ is een gelijkzijdige driehoek.



Opdracht 5.2

Construeer een regelmatige achthoek.

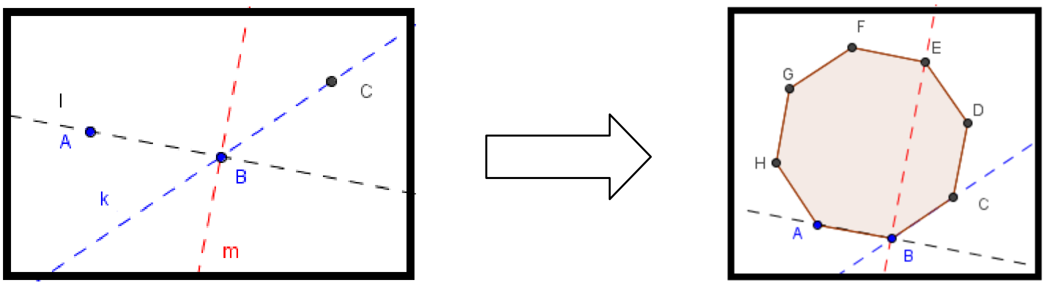
Stap 1: Vouw de lijn $\boldsymbol{l}$, door $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{B}$. (V5)

Stap 2: Vouw lijn $\boldsymbol{m}$, door$\boldsymbol{l}$ op zichzelf te vouwen door $\boldsymbol{B}$. (V4)

Stap 3: Vouw lijn $\boldsymbol{k}$ door $\boldsymbol{m}$ op $\boldsymbol{l}$ te vouwen. (V2)

Stap 4: Vouw $\boldsymbol{A}$ op $\boldsymbol{k}$, zodat de vouw door $\boldsymbol{B}$ gaat (V7)
en bepaal het beeldpunt $\boldsymbol{C}$. (G3)

Stap 5: Herhaal stap 1 t/m 4 met $\boldsymbol{BC}$ (ipv $\boldsymbol{AB}$) zes keer



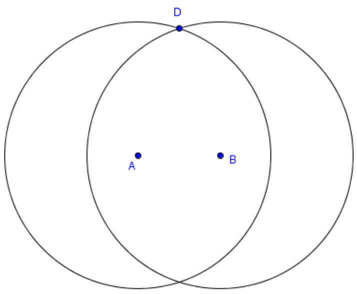
Opdracht 5.3

Het is mogelijk om een lijnstuk met lengte φ te construeren.

Stap 1: Construeer een cirkel met middelpunt A en straal φ. (P2)

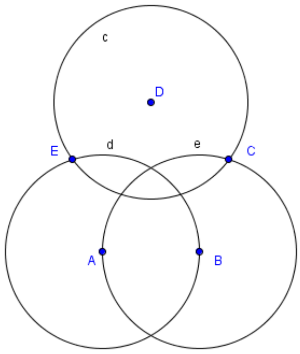
Stap 2: Construeer een cirkel met middelpunt B en straal φ. (P2)

Stap 3: Noem het snijpunt D.



Opdracht 5.4

Stap 1: Teken een cirkel c met middelpunt D en straal 1 (P2)
Stap 2: Teken een cirkel d met middelpunt A en straal 1 (P2)
Stap 3: Teken een cirkel $e$met middelpunt B en straal 1 (P2)
Stap 4: Noem C het snijpunt van c en e (P5)
Stap 5: Noem E het snijpunt van c en d (P5)



Opdracht 5.5

Gegeven een regelmatige n-hoek.

Stap 1: Teken de omgeschreven cirkel.

Stap 2: Teken n gelijkbenige driehoeken.

Stap 3: De tophoek is dan $\frac{360^0}{n}$

Stap 4: De andere twee hoeken zijn dan: $(180^0 - \frac{360^0}{n})/2$

Stap 5: De hoek van een regelmatige n-hoek is dan: $2 \cdot (180^0 - \frac{360^0}{n})/2 = 180^0 - \frac{360^0}{n}$

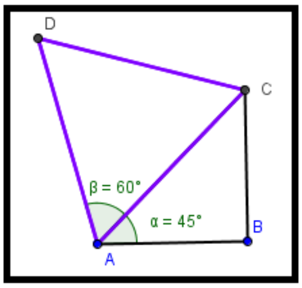
Opdracht 5.6

Vanaf 108^0 krijg je, met de bissectrice, de volgende hoeken:$54^0 27^0$ $13{,}5^0$ etc…
Vanaf 60^0 krijg je, met de bissectrice, de volgende hoeken: 30^0 15^0 $7{,}5^0$ etc…

Opdracht 5.7

Construeer de gelijkzijdige driehoek ACD zoals in opdracht 5.1

Nu geldt: $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 45^0 + 60^0 = 105^0$.



Opdracht 5.8

Door β aan de ene kant van α te construeren krijg je $\alpha + \beta$
Door β aan de andere kant van α te construeren krijg je $\alpha - \beta$

Opdracht 5.9

$108^0 + 60^0 = 168^0$	$168^0 / 2 = 84^0$	$84^0 + 60^0 = 144^0$	$144^0 + 60^0 = 204^0$
$204^0 / 2 = 102^0$	$108^0 - 102^0 = 6^0$	$60^0 - 6^0 = 54^0$	$54^0 / 2 = 27^0$

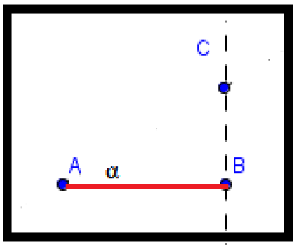
Opdracht 5.10

$$\cos(60^0) = \frac{AB}{1} = AB = 0{,}5$$

Opdracht 5.11

Gegeven een lijnstuk AD met lengte 1, en een lijnstuk PQ met lengte $\cos(\alpha)$.

Stap 1: Vouw de lijn l door A en D (V6)
Stap 2: Bepaal B op l zodat $AB = PQ$ (G1)
Stap 2: Vouw de loodlijn m op l door B. (V4)
Stap 3: Bepaal C op m, zodat $AC = AD$ (G3)
Nu geldt: $\angle BAC = \alpha$



(V6) is uit te voeren met (P1); (G1) is uit te voeren is met (C4); (V4) is uit te voeren met (C2), (G3) is uit te voeren met (P2).

Dus deel 2 van stelling 5.1 is waar voor zowel vouwconstructies als voor constructies met passer en liniaal.

Opdracht 5.12

$\cos(75°) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}}$ is construeerbaar met passer en liniaal (met (O1) t/m (O5)).
Dus zegt stelling 5.1 dat 75^0 construeerbaar is.

Opdracht 5.13

Er geldt: $\cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)$

Dus $\cos(3x) = (2\cos(x)^2 - 1)\cos(x) - (2\sin(x)\cos(x))\sin(x)$

Dus $\cos(3x) = 2\cos(x)^3 - \cos(x) - 2\sin(x)^2\cos(x)$

Dus $\cos(3x) = 2\cos(x)^3 - \cos(x) - 2(1 - \cos(x)^2)\cos(x)$

Dus $\cos(3x) = 2\cos(x)^3 - \cos(x) - 2\cos(\mathrm{x}) + 2\cos(x)^3$

Dus $\cos(3x) = 4\cos(x)^3 - 3\cos(x)$

Opdracht 5.14

Voor $4p^3 - 3p - \frac{1}{2} = 0$ geldt: $a = 4, b = 0, c = -3$ en $d = -\frac{1}{2}$

Dus $q = \frac{2 \cdot 0^3}{27 \cdot 4^3} - \frac{0 \cdot -3}{3 \cdot 4^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{4} = -\frac{1}{8}$ en $p = \frac{-3}{4} - \frac{0^2}{3 \cdot 4^2} = -\frac{3}{4}$ Dus $q^2 + \frac{4}{27}p^3 = -\frac{3}{64} < 0$

Opdracht 5.15

Omdat p ontstaat als je E op E' vouwt, is p de middelloodlijn E van E'.
Dus EE' en p staan loodrecht op elkaar. Hetzelfde geldt voor AA'.

Opdracht 5.16

$\angle A'$ + $\angle T_2$ =90^0 (Som van de hoeken van een driehoek (met $\angle A'UT = 90°$)

$\angle A'$ + $\angle A_2$ =90^0 (Som van de hoeken van een driehoek (met $\angle A'SA_2 = 90°$)

Dus $\angle T_2$ = $\angle A_2$.

Opdracht 5.17

n is de middenloodlijn van A' en E'
A ligt op n

Dit geeft:

$$A'S = E'S$$
$$A'A = E'A$$
$$AS = AS$$

Dus: $\Delta A'AS$ en $\Delta E'AS$ zijn gelijk (zzz)

Daarom geldt: $\angle A_1$=$\angle A_2$

Opdracht 5.18

$\angle A_1$ +$\angle A_2$ + $\angle A_3$ = $\angle A$

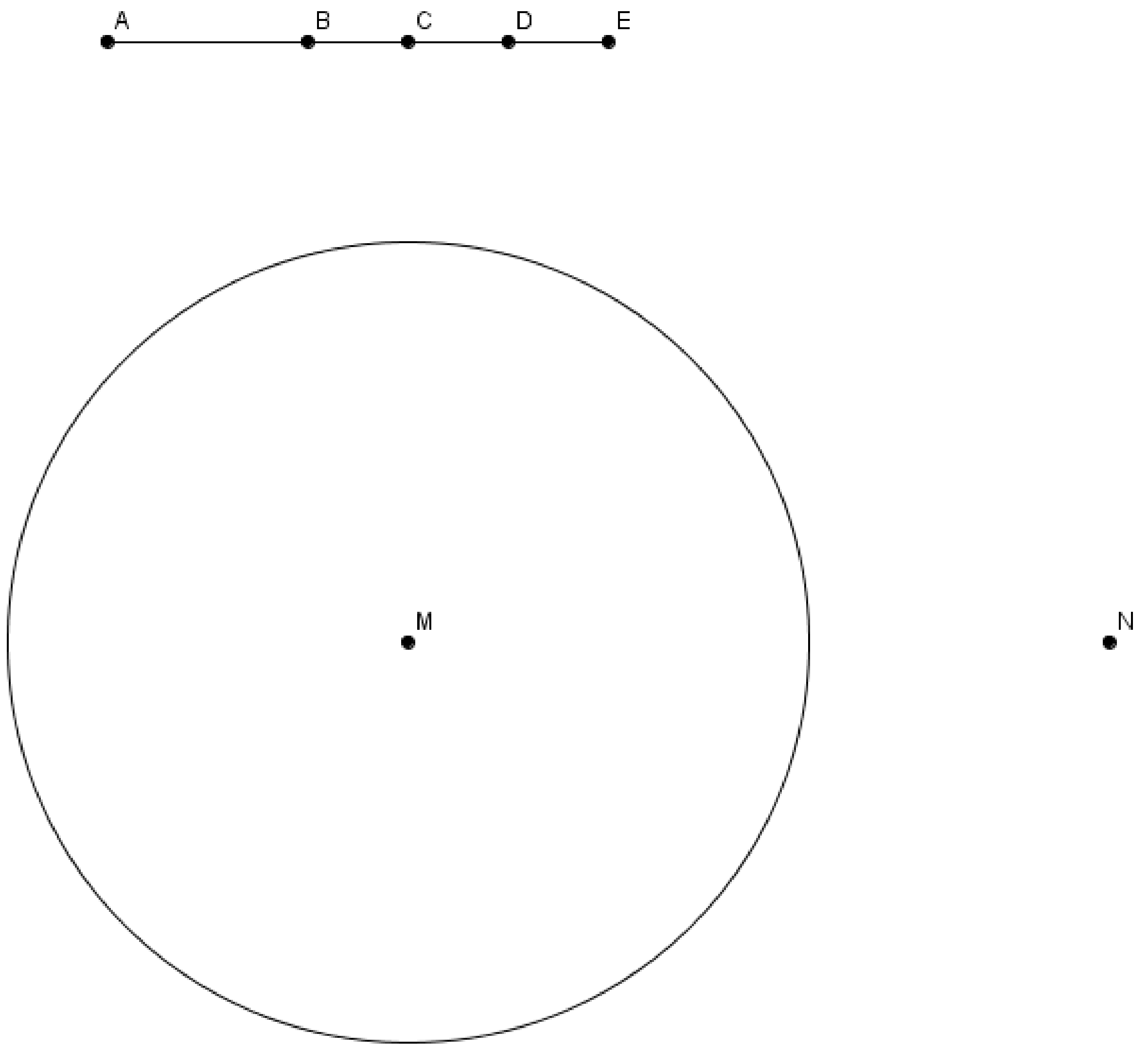
Dus $\angle A_3$ +$\angle A_3$ + $\angle A_3$ = $\angle A$

Dus $\angle A_3$ = $\frac{1}{3}\angle A$

12. WERKBLADEN.

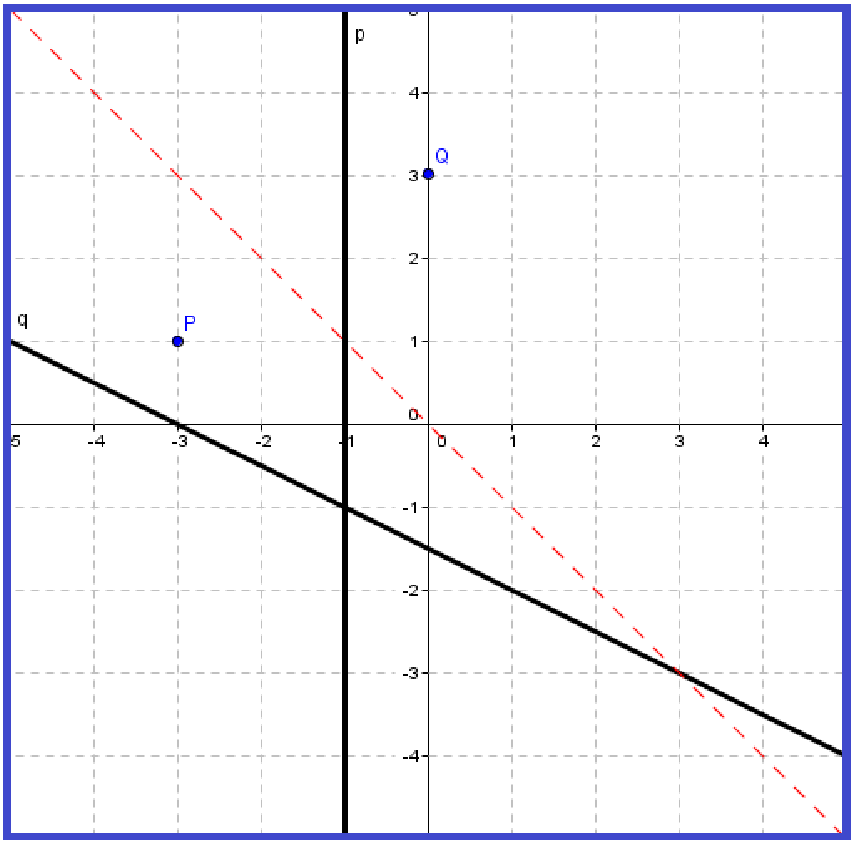
WERKBLAD A:

Opgave 1.8

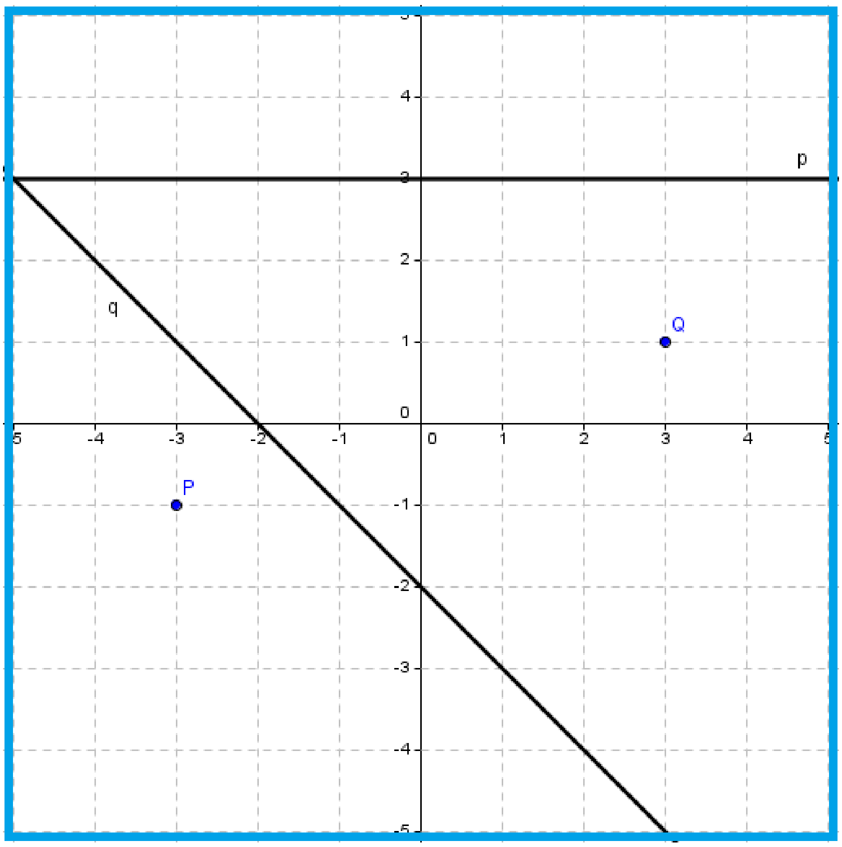


WERKBLAD B

Opgave 3.10

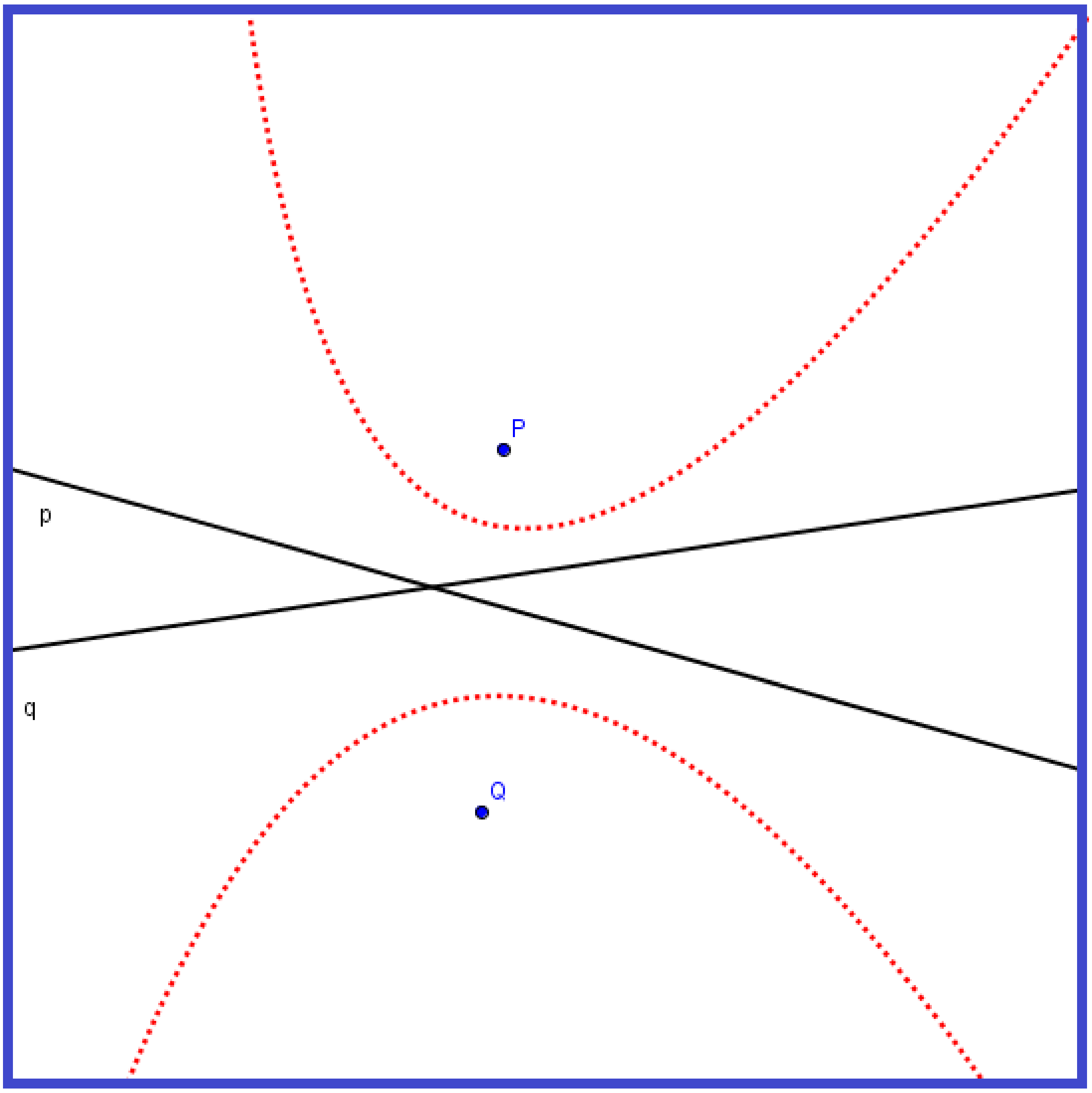


Opgave 3.11



WERKBLAD C

Opdracht 3.13



WERKBLAD D

Opdracht 4.6