Vereenvoudigen van samengestelde wortels

Niels Wardenier 3845443
Studierichting: Wiskunde
Titel: Vereenvoudigen van samengestelde wortels
Begeleider: Prof. Dr. F. Beukers
3 september 2014

Inhoudsopgave

1 Inleiding

In de wiskunde willen we graag dat antwoorden op vraagstukken maximaal vereenvoudingd zijn. We vereenvoudigen bijvoorbeeld breuken, werken haakjes weg en maken breuken gelijknamig. Maar we kunnen bijvoorbeeld ook kijken naar wortel uitdrukkingen. Neem bijvoorbeeld $\sqrt{6+\sqrt{32}}$. Deze worteluitdrukking noemen we samengesteld, omdat we een wortel onder een wortel hebben. We kunnen echter aantonen dat dit getal gelijk is aan $2+\sqrt{2}$, waarbij we dus een andere representatie hebben voor hetzelfde getal met een wortelteken minder. Dit geval zal behandeld worden in hoofdstuk 2.

De aanleiding voor deze scriptie is dat na het lezen een van artikel van Susan Landau [1] waarin we zien dat $\sqrt{\sqrt[3]{28}-\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}(\sqrt[3]{98}-\sqrt[3]{28}-1)$. De rechterkant bestaat uit enkelvoudige wortels, wortels waar niet de wortel van een wortel wordt genomen. De vraag rees wanneer we samengestelde wortels kunnen schrijven als een som van enkelvoudige wortels.

We zijn niet de eerste die naar dit probleem kijkt. Newton en Euler hebben in de achttiende eeuw methodes ontwikkelt, waarbij Euler aantoonde dat de manier van Newton verkeerd was. [2] [3]. Verder heeft ook Ramanujan zich bezig gehouden met samengestelde wortels, hierover meer in hoofdstuk 5.

De hoofdvraag in deze scriptie waar antwoord op wordt gegeven luidt als volgt:

Kunnen we worteluitdrukkingen van de vorm $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b}}$ schrijven als de som van enkelvoudige wortels voor $m=2$ en $m=3$?

Niet alle uitdrukkingen van deze vorm zullen we kunnen vereenvoudigen. We hebben condities nodig om te kunnen vaststellen of een uitdrukking te vereenvoudigen is of niet. In deze scriptie zal duidelijk worden dat we oneindig veel voorbeelden kunnen vinden voor $m=2, n \in \mathbb{N}$ en voor $m=3, n \leq 5$ en hooguit eindig veel voorbeelden als $m=3, n \geq 6$.

Om de hoofdvraag te kunnen we beantwoorden zullen we in hoofdstuk 3 eerst een aantal begrippen introduceren die hierbij van belang zijn. In de daaropvolgende hoofdstukken zullen we verslag doen van onze resultaten.

(Een afspraak die we maken is de volgende: wanneer we $\sqrt[n]{x}$ lezen bedoelen we de positieve n^{de} reële wortel van x, met $x>0$. Oftewel het unieke positieve reële getal a zodat $a^n = x$.)

2 Eerste verkenning: $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ vereenvoudigen

We willen de uitdrukking $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ graag schrijven in de vorm $p+\sqrt{q}$ met $a,b,p,q \in \mathbb{N}$. Hierbij raken we dus een wortelteken kwijt. We zagen hiervan al een voorbeeld in de inleiding. In de handout van binomen van wortels [4] zien we dat als we kwadrateren vinden: $a+\sqrt{b} = p^2+2p\sqrt{q}+q$. Dus er moeten gelden dat $a = p^2+q$ en $b = 4p^2q$. Het voorbeeld in de inleiding was $\sqrt{6+\sqrt{32}}$, dus $a = 6$ en $b = 32$. Oplossen van de vergelijkingen levert inderdaad $p = q = 2$. We kunnen op deze manier nog veel meer vereenvoudigingen vinden. Hieronder geven we enkele voorbeelden:

- $\sqrt{11+\sqrt{72}}, 11 = p^2+q, 72 = 4p^2q$ levert $p = 3, q = 2$, dus $3+\sqrt{2}$
- $\sqrt{4+\sqrt{12}}, 4 = p^2+q, 12 = 4p^2q$ levert $p = 1, q = 3$, dus $1+\sqrt{3}$
- $\sqrt{10+\sqrt{96}}, 10 = p^2+q, 96 = 4p^2q$ levert $p = 2, q = 6$, dus $2+\sqrt{6}$

We zien dat deze methode niet algemeen werkt voor alle paren a, b. Neem bijvoorbeeld $\sqrt{11+\sqrt{70}}$. Dan $a = 11$ en $b = 70$. We krijgen de volgende vergelijkingen: $11 = p^2+q$ en $70 = 4p^2q$. Alleen $p = 1, q = 10; p = 2, q = 7; p = 3, q = 2$ voldoen aan de eerste vergelijking. Deze paren voldoen echter niet aan de tweede vergelijking.

We zullen namelijk later zien dat er ook paren a, b zijn die we kunnen schrijven als de som van 2 wortels, zoals $\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$. Een algemene manier wordt gegeven in hoofdstuk 4.

3 Voorkennis en Diepte

In het volgende hoofdstuk hebben we enige voorkennis van ringentheorie nodig. De meest belangrijke voorkennis zijn de definities van lichaam en lichaamsuitbreiding. Verder is het begrip diepte van belang.

De diepte van een uitdrukking over een lichaam is als volgt gedefinieerd, kies hierbij eerst een grondlichaam, wij zullen kiezen voor $\mathbb{Q}$.

Definitie 1 (Diepte)**.**

- Een element a $\in \mathbb{Q}$ heeft diepte 0
- Een $n^{de} - machtswortel$ van A heeft diepte $1 + Diepte(A)$
- Wanneer we 2 formules A en B bij elkaar optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of delen, dan heeft het resultaat $Diepte = max(Diepte(A), Diepte(B))$

Dus $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ heeft diepte 2 over $\mathbb{Q}$, want 5 heeft diepte 0 over $\mathbb{Q}, 2\sqrt{6}$ heeft diepte 1 over $\mathbb{Q}$, de som $5 + 2\sqrt{6}$ heeft diepte 1 over $\mathbb{Q}$. Opnieuw de wortel nemen levert diepte 2.
We noemen een worteluitdrukking A vereenvoudigbaar wanneer we een uitdrukking A' gelijkwaardig aan A kunnen vinden met $Diepte(A') < Diepte(A)$.

4 Existentiestelling en resultaten

4.1 Existentiestelling

We beschouwen dus definities van lichaam en lichaamsuitbreiding als voorkennis. Een uitbreiding van het lichaam $\mathbb{Q}$ is $\mathbb{Q}^{rad} = \mathbb{Q}(\sqrt[n_1]{a_1}, \sqrt[n_2]{a_2}, \ldots, \sqrt[n_r]{a_r})$ met $a_i \in \mathbb{Q}_{>0}$, $n_i \in \mathbb{Z}, n_i \geq 2$. Dit noemen we de radicaaluitbreiding van $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}^{rad}$ is het kleinste lichaam dat alle elementen van die vorm bevat. Deze uitbreiding gebruiken we in de volgende stelling, die een speciaal geval is van Stelling 5 in het werk van Johannes Blömer, How to Denest Ramanujan's Nested Radicals [5]

Stelling (Hoofdstelling)**.** *Zij $m, n \in \mathbb{N}$ en $d \in \mathbb{Q}_{>0}$. Dan geldt dat $\sqrt[n]{1 + d^{1/m}}$ in de radicaaluitbreiding van $\mathbb{Q}$ ligt dan en slechts dan als er $a_i \in \mathbb{Q}$ met $0 \leq i \leq m-1, A \in \mathbb{Q}$ en $\epsilon \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ bestaan zodat $1 + d^{\frac{1}{m}} = A \cdot d^{\frac{\epsilon}{m}}(a_0 + a_1 d^{\frac{1}{m}} + \ldots + a_{m-1} d^{\frac{m-1}{m}})^n$.*

We zullen deze stelling in het vervolg zonder bewijs aannemen. We kunnen $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{b}}$ herleiden tot $\sqrt[n]{1 + \sqrt[m]{d}}$ met $d = \frac{b}{a}$. In deze paragraaf kiezen we $m = 2$. Verder kiezen we $a, b > 0$ zodat we geen complexe gevallen tegenkomen. We zullen het volgende gevolg gebruiken.

Gevolg. *De uitdrukking $\sqrt[n]{1 + \sqrt{d}}$ is vereenvoudigbaar dan en slechts dan als $1 - d$ of $1 - \frac{1}{d}$ van de vorm $\frac{(1-t)^n}{A_n(t)^2}$ is, met $(1 + \sqrt{t})^n = (A_n(t) + B_n(t)\sqrt{t})$ en $t \in \mathbb{Q}$.*

Bewijs. Uit de hoofdstelling volgt dat $1 + \sqrt{d} = A d^{\frac{\epsilon}{2}}(1 + \alpha\sqrt{d})^n$. We onderscheiden 2 gevallen, $\epsilon = 0$ en $\epsilon = 1$.

Stel $\epsilon = 0$ dan

$$1 + \sqrt{d} = A(1 + \alpha\sqrt{d})^n$$

en substitueer $\alpha^2 d = t$. Dan $1 + \sqrt{d} = 1 + \alpha^{-1}\sqrt{t}$ en $A(1 + \alpha\sqrt{d})^n = A(1 + \sqrt{t})^n$. Dus

$$1 + \alpha^{-1}\sqrt{t} = A(1 + \sqrt{t})^n = A(A_n(t) + B_n(t)\sqrt{t})$$

Vanwege gelijkheid moet gelden dat $A = \frac{1}{A_n(t)}$ en $\alpha^{-1} = \frac{B_n(t)}{A_n(t)}$. Hieruit volgt dat

$$d = \alpha^{-2} t = \frac{B_n(t)^2 t}{A_n(t)^2}$$

Dus

$$1 - d = \frac{A_n(t)^2 - B_n(t)^2 t}{A_n(t)^2}$$

We zagen eerder dat $(1 + \sqrt{t})^n = (A_n(t) + B_n(t)\sqrt{t})$, verder geldt ook $(1 - \sqrt{t})^n = (A_n(t) - B_n(t)\sqrt{t})$. Het product levert nu $(1 - t)^n = A_n(t)^2 - B_n(t)^2 t$, dit levert het gewenste resultaat

$$1 - d = \frac{(1 - t)^n}{A_n(t)^2}$$

Stel nu $\epsilon = 1$, dan

$$1 + \sqrt{d} = A\sqrt{d}(1 + \alpha\sqrt{d})^n$$

en substitueer $\alpha^2 d = t$. Dan $1 + \sqrt{d} = 1 + \alpha^{-1}\sqrt{t}$ en $A\sqrt{d}(1 + \alpha\sqrt{d})^n = A\alpha^{-1}\sqrt{t}(1 + \sqrt{t})^n$. Dus

$$1 + \alpha^{-1}\sqrt{t} = A\alpha^{-1}\sqrt{t}(1 + \sqrt{t})^n = A\alpha^{-1}(B_n(t)t + A_n(t)\sqrt{t})$$

Vanwege gelijkheid moet gelden dat $A = \frac{1}{B_n(t)\alpha^{-1}t}$ en $\alpha^{-1} = \frac{A_n(t)}{B_n(t)t}$. Hieruit volgt dat

$$d = \alpha^{-2}t = \frac{A_n(t)^2 t}{B_n(t)^2 t^2} = \frac{A_n(t)^2}{B_n(t)^2 t}$$

Dus

$$1 - \frac{1}{d} = \frac{A_n(t)^2 - B_n(t)^2 t}{A_n(t)^2}$$

We zagen eerder dat $(1 + \sqrt{t})^n = (A_n(t) + B_n(t)\sqrt{t})$, verder geldt ook $(1 - \sqrt{t})^n = (A_n(t) - B_n(t)\sqrt{t})$. Het product levert nu $(1 - t)^n = A_n(t)^2 - B_n(t)^2 t$, dit levert het gewenste resultaat

$$1 - d = \frac{(1 - t)^n}{A_n(t)^2}$$

4.2 Resultaten voor $\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

Vanwege het gevolg van de hoofdstelling weten we dat $\sqrt[n]{1 + \sqrt{d}}$ alleen kan worden vereenvoudigd als $1 - d$ of $1 - \frac{1}{d}$ van de vorm $\frac{(1-t)^n}{A_n(t)^2}$ is. Voor $n = 2$ betekent dit dus dat $1 - d$ of $1 - \frac{1}{d}$ van de vorm $\frac{(1-t)^2}{(1+t)^2}$ moet zijn. Uitwerken levert dat $d = \frac{4t}{(1+t)^2}$. Stel $t = \frac{p}{q}$, dan laten p en q in *Mathematica* lopen van 1 tot en met 100 en berekenen we de bijbehorende d. Verder stellen we dat $ggd(p, q) = 1$, zodat we breuken vinden in vereenvoudigde vorm. Dan printen we vervolgens een lijst van p en q zodanig dat $d \in \mathbb{Q}$. Stel $d = \frac{b}{a}$. Dan gelden nu de volgende verbanden tussen p, q, a en b: $(\sqrt{q} + \sqrt{p})^2 = \pm\lambda(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ en $(\sqrt{q} - \sqrt{p})^2 = \pm\lambda(\sqrt{a} - \sqrt{b})$. Vermenigvuldigen levert $(q - p)^2 = \lambda^2(a - b)$. Dus $\lambda = \sqrt{\frac{(q-p)^2}{a-b}}$. Met dit gegven zijn we nu in staat om staat om $\sqrt{1 + \sqrt{d}}$ te vereenvoudigen en dus ook $\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ kunnen vereenvoudigen door te vermenigvuldigen met $\sqrt{a}$. Hierboven hebben we opgemerkt dat $(\sqrt{q} + \sqrt{p})^2 = \pm\lambda \cdot (\sqrt{b} + \sqrt{a})$. Dus

$$\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{q} + \sqrt{p})^2}{\pm\lambda}} = \frac{\sqrt{p} + \sqrt{q}}{\sqrt{\pm\lambda}}$$

We voegen hieronder een screenshot toe van het gebruikte *Mathematica* notebook en een tabel met alle resultaten waarbij $0 < a, b < 40$.

```
For[q = 1, q < 100, q++,
    For[p = -100, p < 100, p++,
      If[GCD[p, q] == 1,
        t = p / q;
        d = 4 t / (1 + t) ^2;
        b = Numerator[d];
                  a = Denominator[d];
                      z = (q - p) ^2 / (a - b);
                      r = √z ;
                      If[Abs[a] < 40 && Abs[b] < 40 && Not[Element[√a , Integers] && Element[√b , Integers]],
     Print[ "a=", a, ","" b=", b, " ,""p=", p, ",""q=", q, " ,""r=", r, " k=", (√p + √q) / √r ]];];];]
```

Figuur 1: Mathematica Notebook vereenvoudigen wortels van som van 2 wortels

a	b	Beginvorm	p	q	λ	Resultaat
9	8	$\sqrt{3+\sqrt{2}}$	2	1	1	$1+\sqrt{2}$
4	3	$\sqrt{2+\sqrt{3}}$	3	1	2	$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$
9	5	$\sqrt{3+\sqrt{5}}$	5	1	2	$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{10})$
16	7	$\sqrt{4+\sqrt{7}}$	7	1	2	$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{14})$
36	11	$\sqrt{6+\sqrt{11}}$	11	1	2	$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{22})$
25	24	$\sqrt{5+2\sqrt{6}}$	3	2	1	$\sqrt{3}+\sqrt{2}$
16	15	$\sqrt{4+\sqrt{15}}$	5	3	2	$\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{10})$
25	21	$\sqrt{5+\sqrt{21}}$	7	3	2	$\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{14})$
36	35	$\sqrt{6+\sqrt{35}}$	7	5	2	$\frac{1}{2}(\sqrt{14}+\sqrt{10})$

Tabel 1: Waarden van a en b met $0 < a, b < 40$ waarvoor $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ vereenvoudigd kan worden

4.3 Resultaten voor $\sqrt[n]{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

We kunnen het idee van paragraaf 4.2 ook voor $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ toepassen. We moeten alleen $A_n(t)$ bepalen voor de bijbehorende n, we weten dat $(1+\sqrt{t})^n = A_n(t) + B_n(t)\sqrt{t}$, dus met het binonmium van Newton kunnen we $A_n(t)$ berekenen: $(1+\sqrt{t})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \sqrt{t}^k$. Verder geldt nu dat $(\sqrt{q}+\sqrt{p})^n = \pm\lambda(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ en $(\sqrt{q}-\sqrt{p})^n = \pm\lambda(\sqrt{a}-\sqrt{b})$. Weer het product nemen levert $(q-p)^n = \lambda^2(a-b)$. We vinden nu dus de formule

$$\sqrt[n]{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{\sqrt[n]{\lambda}}$$

In de volgende deelparagrafen geven we nu resultaten voor $n = 3, 4, 5, 7$. We kijken naar $n = 7$ omdat we graag een voorbeeld:

$$\sqrt[7]{139\sqrt{3}+91\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt[7]{64}}$$

uit de handout van binomen [4] willen terug vinden.

4.3.1 Gevolgen voor $\sqrt[3]{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

We bepalen $A_3(t)$: $(1+\sqrt{t})^3 = 1 + 3t + 3\sqrt{t} + 3t\sqrt{t}$ levert $A_3(t) = 1 + 3t$. Opnieuw met *Mathematica* vinden we nu 9 resultaten met $0 < a, b < 200$ hieronder in een tabel weergegeven:

a	b	Beginvorm	p	q	λ	Resultaat
49	50	$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$	2	1	1	$1+\sqrt{2}$
25	25	$\sqrt[3]{5+3\sqrt{3}}$	3	1	2	$\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
4	5	$\sqrt[3]{\sqrt{4}+\sqrt{5}}$	5	1	8	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$
121	175	$\sqrt[3]{11+5\sqrt{7}}$	7	1	2	$\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt[3]{2}}$
27	28	$\sqrt[3]{3\sqrt{3}+2\sqrt{7}}$	7	3	8	$\frac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{7})$
80	81	$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}$	9	5	8	$\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$
175	176	$\sqrt[3]{5\sqrt{7}+4\sqrt{11}}$	11	7	8	$\frac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{11})$
25	52	$\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}$	13	1	8	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{13})$
64	189	$\sqrt[3]{8+3\sqrt{21}}$	21	1	8	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{21})$

Tabel 2: Waarden van a en b met $0 < a, b < 200$ waarvoor $\sqrt[3]{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ vereenvoudigd kan worden

4.3.2 Resultaten voor $\sqrt[4]{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

We bepalen $A_4(t)$: $(1+\sqrt{t})^4 = 1+6t+t^2+4\sqrt{t}+4t\sqrt{t}$ levert $A_4(t) = 1+6t+t^2$. Opnieuw met *Mathematica* vinden we nu 8 resultaten met $0 < a, b < 2000$ hieronder in een tabel weergegeven:

a	b	Beginvorm	p	q	λ	Resultaat
288	289	$\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$	2	1	1	$1+\sqrt{2}$
48	49	$\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}$	3	1	4	$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$
45	49	$\sqrt[4]{7+3\sqrt{5}}$	5	1	8	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\sqrt[4]{2}$
448	529	$\sqrt[4]{23+8\sqrt{7}}$	7	1	4	$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{14})$
637	961	$\sqrt[4]{31+7\sqrt{13}}$	13	1	8	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{13})\sqrt[4]{2}$
960	961	$\sqrt[4]{31+8\sqrt{15}}$	5	3	4	$\frac{1}{2}(\sqrt{10}+\sqrt{6})$
525	529	$\sqrt[4]{23+5\sqrt{21}}$	5	3	8	$\frac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{3})\sqrt[4]{2}$
1617	1681	$\sqrt[4]{41+7\sqrt{33}}$	11	3	8	$\frac{1}{2}(\sqrt{11}+\sqrt{3})\sqrt[4]{2}$

Tabel 3: Waarden van a en b met $0 < a, b < 2000$ waarvoor $\sqrt[4]{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ vereenvoudigd kan worden

4.3.3 Resultaten voor $\sqrt[5]{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

We bepalen $A_5(t)$: $(1+\sqrt{t})^5 = 1+10t+5t^2+5\sqrt{t}+10t\sqrt{t}+t^2\sqrt{t}$ levert $A_5(t) = 1+10t+5t^2$. Opnieuw met *Mathematica* vinden we nu 10 resultaten met $0 < a, b < 3000$ waarvan enkele hieronder in een tabel weergegeven:

a	b	Beginvorm	p	q	λ	Resultaat
1682	1681	$\sqrt[5]{41+29\sqrt{2}}$	2	1	1	$1+\sqrt{2}$
363	361	$\sqrt[5]{19+11\sqrt{3}}$	3	1	8	$\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt[5]{4}}$
125	121	$\sqrt[5]{11+5\sqrt{5}}$	5	1	16	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\sqrt[5]{2}$
2527	2523	$\sqrt[5]{19\sqrt{7}+29\sqrt{3}}$	7	3	16	$\frac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{3})\sqrt[5]{2}$

Tabel 4: Waarden van a en b met $0 < a, b < 3000$ waarvoor $\sqrt[5]{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ vereenvoudigd kan worden

4.3.4 Resultaten voor $\sqrt[7]{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

We bepalen $A_7(t)$: $(1+\sqrt{t})^7 = 1+21t+35t^2+7t^3+7\sqrt{t}+35t\sqrt{t}+21t^2\sqrt{t}+7t^2\sqrt{t}+t^3\sqrt{t}$ levert $A_7(t) = 1+21t+35t^2+7t^3$. Opnieuw met *Mathematica* vinden we nu 5 resultaten met $0 < a, b < 200000$ hieronder in een tabel weergegeven:

a	b	Beginvorm	p	q	λ	Resultaat
57122	57121	$\sqrt[7]{71+169\sqrt{2}}$	2	1	1	$1+\sqrt{2}$
5043	5041	$\sqrt[7]{71+41\sqrt{3}}$	3	1	8	$\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt[7]{8}}$
845	841	$\sqrt[7]{29+13\sqrt{5}}$	5	1	64	$\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt[7]{64}}$
122317	113569	$\sqrt[7]{337+97\sqrt{13}}$	13	1	64	$\frac{1+\sqrt{13}}{\sqrt[7]{64}}$
57967	57963	$\sqrt[7]{91\sqrt{7}+139\sqrt{3}}$	7	3	64	$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt[7]{64}}$

Tabel 5: Waarden van a en b met $0 < a, b < 200000$ waarvoor $\sqrt[7]{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ vereenvoudigd kan worden

4.4 Opmerkingen

In de kolom *Beginvorm* hebben kwadraten uit de worteltermen gehaald bijvoorbeeld: $\sqrt{1682} = \sqrt{841 \cdot 2} = 29\sqrt{2}$. In de kolom *Resultaten* hebben we uitdrukkingen vereenvoudigd: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $\sqrt[4]{4} = \sqrt{\sqrt{2^2}} = \sqrt{2}$.

Verder zien we steeds de vorm $1+\sqrt{2}$ elke keer terugkomt. Dit is echter niet zo vreemd want $(1+\sqrt{2})^n = k + l\sqrt{2}$ met $k, l \in \mathbb{N}$. Zo ook voor $1+\sqrt{3}$ en $1+\sqrt{5}$. We kunnen dus oneindig veel voorbeelden vinden van de vorm $\sqrt[m]{k+l\sqrt{2}}$, bijvoorbeeld $\sqrt[10]{3363+2378\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$

5 Samengestelde Ramanujan Wortels

5.1 Srinivasa Ramanujan

Srinivasa Ramanujan(1887-1920) heeft een belangrijke rol gespeeld bij het vereenvoudigen van samengestelde wortels. Hij kwam namelijk met de volgende stelling voor de wortel van een som van 2 derdemachtswortels:

Stelling. *Voor $m, n \in \mathbb{Z}$ willekeurig geldt:*
$\sqrt{m\sqrt[3]{4(m-2n)} + n\sqrt[3]{4m+n}} = \pm\frac{1}{3}(\sqrt[3]{(4m+n)^2} + \sqrt[3]{4(m-2n)(4m+n)} - \sqrt[3]{2(m-2n)^2}$

Voor bijvoorbeeld $m = 1, n = -1$ vinden we dus dat

$$\sqrt{\sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{3}} = \frac{1}{3}(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{36} - \sqrt[3]{18})$$

Deze identiteit kunnen we simpel nagaan door te kwadrateren. We willen echter weten of deze identiteit alle gevallen afdekt. Hiervoor zullen we de eerder genoemde hoofdstelling gebruiken.

5.2 Vereenvoudigen van $\sqrt{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$

De hoofdstelling vertelt nu dat $\sqrt{1 + \sqrt[3]{d}}$ vereenvoudigbaar is dan en slechts dan als we dit kunnen schrijven in de volgende vorm

$$(A(\sqrt[3]{d}^{\epsilon}))^{\frac{1}{2}}(\alpha + \beta\sqrt[3]{d} + \gamma\sqrt[3]{d^2})$$

met $\alpha, \beta, \gamma, A \in \mathbb{Q}, \epsilon \in \{0, 1, 2\}$. Zoals eerder opgemerkt kunnen we dan ook $\sqrt{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$ vereenvoudigen. Verder kunnen we α uit de vergelijking halen. We vinden

$$(A\alpha^2(\sqrt[3]{d}^{\epsilon}))^{\frac{1}{2}}(1 + x\sqrt[3]{d} + y\sqrt[3]{d^2})$$

met $x = \frac{\beta}{\alpha}$ en $y = \frac{\gamma}{\alpha}$. Noem $A\alpha^2 = A'$ We onderscheiden nu drie gevallen: $\epsilon = 0, \epsilon = 1$ en $\epsilon = 2$. We kunnen deze gevallen echter terugbrengen naar het geval $\epsilon = 0$, want $(A'\sqrt[3]{d}^{\epsilon})^{\frac{1}{2}} = ((A'd^{-\epsilon})d^{\frac{4\epsilon}{3}})^{\frac{1}{2}} = (A^*)^{\frac{1}{2}}d^{\frac{2\epsilon}{3}}$. Met $A^* = A'd^{-\epsilon}$ en $A^* \in \mathbb{Q}$. Wanner we nu $(A^*)^{\frac{1}{2}}d^{\frac{2\epsilon}{3}}$ met $(1 + x\sqrt[3]{d} + y\sqrt[3]{d^2})$ vermenigvuldigen vinden we opnieuw een uitdrukking van de vorm zoals voor $\epsilon = 0$. Deze andere manier van schrijven werkt als de $gcd(n, m) = 1$, dus als m en n co-priem zijn. Dit zullen we in het vervolg gebruiken.

5.2.1 Uitwerking voor $\epsilon = 0$

We vullen in $\epsilon = 0$, dan

$$\sqrt{1 + \sqrt[3]{d}} = (A')^{\frac{1}{2}}(1 + x\sqrt[3]{d} + y\sqrt[3]{d^2})$$

Substitueer nu $x^3 d = t$, dit levert:

$$\sqrt{1 + x^{-1}\sqrt[3]{t}} = (A')^{\frac{1}{2}}(1 + \sqrt[3]{t} + \frac{y}{x^2}\sqrt[3]{t^2})$$

Nu kwadrateren levert:

$$1 + x^{-1}\sqrt[3]{t} = A^{'}((1 + \frac{2ty}{x^2}) + (2 + \frac{y^2 t}{x^4})\sqrt[3]{t} + (\frac{2y}{x^2} + 1)\sqrt[3]{t^2})$$

Hieruit volgt dus dat $\frac{2y}{x^2} + 1 = 0$ en dus $y = -\frac{x^2}{2}$. We vullen deze y in:

$$A^{'}(1 - t + (2 + \frac{1}{4}t)\sqrt[3]{t})$$

Merk nu op dat $A^{'} = \frac{1}{1-t}, x^{-1} = \frac{(2+\frac{1}{4}t)}{1-t}$. Dus $d = x^{-3}t = \frac{(8+t)t}{64(1-t)^3}$. We maken nu opnieuw een *Mathematica* notebook waarbij we $t = \frac{p}{q}$ invullen met $1 \leq (p,q) \leq 1000, gcd(p,q) = 1$. Deze t vullen we dus in bij d, we zijn namelijk opzoek naar de eerste paar gevallen dus kijken alleen we naar $|a,b| < 500$. (Met deze keuze voor p,q is het aannemelijk dat we alle gevallen vinden.) We voegen hieronder een screenshot toe van het gebruikte *Mathematica* notebook.

```
For[q = 1, q < 1000, q++,
    For[p = -100, p < 1000, p++,
      If[GCD[p, q] == 1,
        t = p/q;
        d = ((8 + t)^3 * t) / (64 * (1 - t)^3);
                    b = Numerator[d];
                       a = Denominator[d];
    If[(Abs[a] < 500) && Abs[b] < 500 && Not[Element[a^(1/3), Integers] && Element[b^(1/3), Integers]],
     Print["a=", -a, ","" b=", -b, " ,""p=", p, ","" q=", q]];];];]
```

Figuur 2: Mathematica Notebook vereenvoudigen wortels van som van 2 derdemachtswortels

We hebben nu dus dat $\sqrt{1 + \sqrt[3]{d}} = (A^{'})^{\frac{1}{2}}(1 + \sqrt[3]{t} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{t^2})$. We willen graag vereenvoudigingen vinden met aan de gehele getallen aan de rechterkant dus we passen de coëffiecient $A^{'}$ aan door te delen door $\sqrt[3]{q^2}$ en $(1 + \sqrt[3]{t} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{t^2})$ te vermenigvuldigen met $\sqrt[3]{q^2}$.
De resultaten die we gevonden hebben voor $\sqrt{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$ met $\epsilon = 0$ zien er als volgt uit:

$$\sqrt{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = c \cdot (\sqrt[3]{q^2} + \sqrt[3]{p}\sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{p^2})$$

met $c \in \mathbb{R}$, die we steeds numeriek hebben bepaald met de *Mathematica* functie N, bijvoorbeeld $N(\sqrt{2}) = 1,41421$. We hebben 19 resultaten gevonden, waarrvan er 7 paren zijn (bijv. $a = -4, b = 5$ en $a = -5, b = 4$), waarbij de ene reëel en de ander complex. In dat geval is alleen het reële geval weergegeven in de onderstaande tabellen.

a	b	Beginvorm	p	q	c	$\sqrt[3]{q^2}+\sqrt[3]{p}\sqrt[3]{q}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{p^2}$	Resultaat
-4	125	$\sqrt{5-\sqrt[3]{4}}$	2	1	$\sqrt[3]{2}$	$1+\sqrt[3]{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}-1$
-1	4	$\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}$	4	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$1+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(1+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})$
-4	5	$\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}$	10	1	$\frac{\sqrt[3]{2}}{3}$	$1+\sqrt[3]{10}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{100}$	$\frac{1}{3}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{25})$
-125	128	$\sqrt{4\sqrt[3]{2}-5}$	16	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$1+\sqrt[3]{16}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{256}$	$\frac{1+2\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}$
-27	28	$\sqrt{\sqrt[3]{28}-3}$	28	1	$-\frac{1}{3}$	$1+\sqrt[3]{28}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{784}$	$\frac{1}{3}(\sqrt[3]{98}-\sqrt[3]{28}-1)$
-128	297	$\sqrt{3\sqrt[3]{11}-4\sqrt[3]{2}}$	11	2	$\frac{2}{3}$	$\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{22}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{121}$	$\frac{2}{3}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{22}-\sqrt[3]{121})$
-20	189	$\sqrt{3\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{20}}$	14	5	$\frac{\sqrt[3]{2}}{3}$	$\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{70}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{196}$	$\frac{1}{3}(\sqrt[3]{50}+\sqrt[3]{140}-\sqrt[3]{49})$
-135	256	$\sqrt{4\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{135}}$	32	5	$\frac{1}{3}$	$\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{160}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{1024})$	$\frac{1}{3}(\sqrt[3]{25}+2\sqrt[3]{20}-4\sqrt[3]{2})$
-7	128	$\sqrt{4\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{7}}$	16	7	$\frac{1}{3}$	$\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{112}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{256})$	$\frac{1}{3}(\sqrt[3]{49}+2\sqrt[3]{14}-2\sqrt[3]{4}$

Tabel 6: Waarden van $-500 < a < 0$ en $0 < b < 500$ waarvoor $\sqrt{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$ vervoudigd kan worden

Bij de overige 3 resultaten zijn a, b beide negatief, dus zal $\sqrt{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$ complex zijn. We lossen dit op door beide kanten met $-i$ te vermenigvuldigen. Deze resultaten staan in de tabel hieronder:

a	b	Beginvorm	p	q	c	$-i$	$\sqrt[3]{q^2}+\sqrt[3]{p}\sqrt[3]{q}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{p^2}$	Resultaat
-20	-343	$\sqrt{\sqrt[3]{-343}+\sqrt[3]{-20}}$	2	5	$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}i$	$-i$	$\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt[3]{50}+\sqrt[3]{20}-1)$
-44	-125	$\sqrt{\sqrt[3]{-125}+\sqrt[3]{-44}}$	2	11	$\frac{\sqrt[3]{2}}{3}i$	$-i$	$\sqrt[3]{121}+\sqrt[3]{22}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$	$\frac{1}{3}(\sqrt[3]{242}+\sqrt[3]{44}-1)$
-13	-108	$\sqrt{\sqrt[3]{-108}+\sqrt[3]{-13}}$	4	13	$\frac{1}{3}i$	$-i$	$\sqrt[3]{169}+\sqrt[3]{52}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}$	$\frac{1}{3}(\sqrt[3]{169}+\sqrt[3]{52}-\sqrt[3]{2})$

Tabel 7: Waarden van $-500 < a, b < 0$ waarvoor $\sqrt{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$ vervoudigd kan worden

6 Vereenvoudigen van hogere machtswortels van de som van derdemachtswortels

In dit hoofdstuk zullen we de methode van het vorige hoofdstuk toepassen voor hogere machtswortels. We zullen dit doen voor derde-, vierde- en vijfdemachtswortels. Bij zesde en hogere machtswortels zal onze methode helaas niet meer werken. We komen hier later op terug.

6.1 Vereenvoudigen van derdemachtswortels van de som van derdemachtswortels

We proberen nu dus een methode om uitdrukkingen van de volgende vorm te vereenvoudigen:

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$$

We herhalen ons argument uit het vorige hoofdstuk dat als we $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{d}}$ met $d=\frac{b}{a}$ kunnen vereenvoudigen dat we dan ook $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$ kunnen vereenvoudigen. Uit de hoofdstelling volgt: $\sqrt{1+\sqrt[3]{d}}$ is vereenvoudigbaar dan en slechts dan als dit te schrijven is als

$$(A(\sqrt[3]{d}^{\epsilon}))^{\frac{1}{3}}(\alpha+\beta\sqrt[3]{d}+\gamma\sqrt[3]{d^2})$$

met $\alpha,\beta,\gamma,A\in\mathbb{Q},\epsilon\in\{0,1,2\}$. Verder kunnen α uit de vergelijking halen. We vinden

$$(A\alpha^3(\sqrt[3]{d}^{\epsilon}))^{\frac{1}{3}}(1+z'\sqrt[3]{d}+y'\sqrt[3]{d^2})$$

met $z'=\frac{\beta}{\alpha}$ en $y'=\frac{\gamma}{\alpha}$. Noem $A\alpha^3=A'$.
Substitueer nu $(z')^3d=\delta$ We vinden de volgende uitdrukking:

$$\sqrt[3]{1+(z')^{-1}\sqrt[3]{\delta}}=(A'(\sqrt[3]{d}^{\epsilon}))^{\frac{1}{3}}(1+\sqrt[3]{\delta}+x\sqrt[3]{\delta^2})$$

Met $x=\frac{y'}{(z')^2}$. We onderscheiden nu drie gevallen: $\epsilon=0,\epsilon=1$ en $\epsilon=2$.

6.1.1 Geval 1: $\epsilon=0$

We vullen in $\epsilon=0$:

$$\sqrt[3]{1+(z')^{-1}\sqrt[3]{\delta}}=(A')^{\frac{1}{3}}(1+\sqrt[3]{\delta}+x\sqrt[3]{\delta^2})$$

Tot de derde macht verheffen levert:

$$1+(z')^{-1}\sqrt[3]{\delta}=A'(1+\delta+6\delta x+\delta^2x^3)+(3+3\delta x+3x^2\delta)\sqrt[3]{\delta}+(3+3x+3\delta x^2)\sqrt[3]{\delta^2}$$

Hieruit volgt dat $3+3x+3\delta x^2=0$, dus $\delta=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$. We hebben nu een uitdrukking voor δ in x. Tevens

$$A'=\frac{1}{x-3-\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}},(z')^{-1}=\frac{-3x^3-3x^2-3x}{x^3-3x^2-6x-1}$$

Met *Mathematica* gaan we nu op zoek naar $x \in \mathbb{Q}$, dus van de vorm $x = \frac{p}{q}$. We vinden erg veel oplossingen dus we kiezen $-10 \leq p \leq 10$ en $1 \leq q \leq 10$. Verder kiezen we $gcd(p,q) = 1$, om vereenvoudigde breuken te vinden. Ook sluiten we uit dat a, b beiden derdemacht zijn van een natuurlijk getal.
Op de manier vinden 18 gevallen. Hieronder werken we enkele expliciet uit, we hebben in drie van vier gevallen gekomen voor een geval met gehele δ, dit omdat het er mooier uitziet, helaas is dit niet altijd het geval.

- We hebben $\sqrt[3]{1 + (z^{'})^{-1}\sqrt[3]{\delta}} = (A^{'})^{\frac{1}{3}}(1+\sqrt[3]{\delta}+x\sqrt[3]{\delta^2})$. We vinden $p = q = 1$ als oplossing. Dus $x = 1, \delta = 2, (z^{'})^{-1} = 1$ en $A^{'} = -\frac{1}{9}$. Invullen levert

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{-2}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{9}}(1 + \sqrt[3]{-2} + \sqrt[3]{4})$$

  Vermenigvuldig nu met $\sqrt[3]{-1}$ en we vinden

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

  Een van de voorbeelden van Landau. [1]

- We hebben $\sqrt[3]{1 + (z^{'})^{-1}\sqrt[3]{\delta}} = (A^{'})^{\frac{1}{3}}(1 + \sqrt[3]{\delta} + x\sqrt[3]{\delta^2})$. We vinden $p = 2$ en $q = 1$ als oplossing. Dus $x = 2, \delta = -\frac{3}{4}, (z^{'})^{-1} = \frac{42}{17}$ en $A^{'} = -\frac{4}{17}$. Invullen levert

$$\sqrt[3]{1 + \frac{42}{17}\sqrt[3]{-\frac{3}{4}}} = \sqrt[3]{-\frac{4}{17}}(1 + \sqrt[3]{-\frac{3}{4}} + 2\sqrt[3]{\frac{9}{16}})$$

  Vermenigvuldig nu met $\sqrt[3]{-1}$ en we vinden

$$\sqrt[3]{\frac{42}{17}\sqrt[3]{\frac{3}{4}} - 1} = \sqrt[3]{\frac{4}{17}} - \sqrt[3]{\frac{3}{17}} + 2\sqrt[3]{\frac{9}{68}}$$

  Om gehele getallen in de wortels te verkrijgen vermenigvuldigen we met $\sqrt[3]{34}$, we vinden

$$\sqrt[3]{84\sqrt[3]{\frac{3}{4}} - \sqrt[3]{34}} = \sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{36}$$

- We hebben $\sqrt[3]{1 + (z^{'})^{-1}\sqrt[3]{\delta}} = (A^{'})^{\frac{1}{3}}(1 + \sqrt[3]{\delta} + x\sqrt[3]{\delta^2})$. We vinden $p = 1$ en $q = 3$ als oplossing. Dus $x = \frac{1}{3}, \delta = -12, (z^{'})^{-1} = \frac{39}{89}$ en $A^{'} = -\frac{3}{89}$. Invullen levert

$$\sqrt[3]{1 + \frac{39}{89}\sqrt[3]{-12}} = \sqrt[3]{-\frac{3}{89}}(1 + \sqrt[3]{-12} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{144})$$

  Vermenigvuldig nu met $\sqrt[3]{-1}$ en we vinden

$$\sqrt[3]{\frac{39}{89}\sqrt[3]{12} - 1} = \sqrt[3]{\frac{3}{89}} - \sqrt[3]{\frac{36}{89}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{432}{89}}$$

We vermenigvuldigen nu met $\sqrt[3]{89}$:

$$\sqrt[3]{39\sqrt[3]{12}-89}=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{36}+2\sqrt[3]{2}$$

- We hebben $\sqrt[3]{1+(z')^{-1}\sqrt[3]{\delta}}=(A')^{\frac{1}{3}}(1+\sqrt[3]{\delta}+x\sqrt[3]{\delta^2})$. We vinden $p=1$ en $q=2$ als oplossing. Dus $x=\frac{1}{2},\delta=-6,(z')^{-1}=\frac{21}{37}$ en $A'=-\frac{2}{37}$. Invullen levert

$$\sqrt[3]{1+\frac{21}{37}\sqrt[3]{-12}}=\sqrt[3]{-\frac{2}{37}}(1+\sqrt[3]{-6}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{36})$$

Vermenigvuldig nu met $\sqrt[3]{-1}$ en we vinden

$$\sqrt[3]{\frac{21}{37}\sqrt[3]{6}-1}=\sqrt[3]{\frac{2}{37}}-\sqrt[3]{\frac{12}{37}}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{72}{37}}$$

We vermenigvuldigen nu met $\sqrt[3]{37}$:

$$\sqrt[3]{21\sqrt[3]{6}-37}=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}$$

6.1.2 Geval 2: $\epsilon=1$

Voor het geval $\epsilon=1$ hebben we de formule

$$\sqrt[3]{1+(z')^{-1}\sqrt[3]{\delta}}=(A'(\sqrt[3]{\delta}^{\epsilon}))^{\frac{1}{3}}(1+\sqrt[3]{\delta}+x\sqrt[3]{\delta^2})$$

We vullen in $\epsilon=1$, we vinden:

$$\sqrt[3]{1+(z')^{-1}\sqrt[3]{\delta}}=(A'(\sqrt[3]{d}))^{\frac{1}{3}}(1+\sqrt[3]{\delta}+x\sqrt[3]{\delta^2})$$

Delen door $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\delta}}$ levert:

$$\sqrt[3]{(z')^{-1}+\frac{1}{\sqrt[3]{\delta}}}=(A')^{\frac{1}{3}}(1+\sqrt[3]{\delta}+x\sqrt[3]{\delta^2})^{\frac{1}{3}}.$$

We kunnen nu zien dat we voor δ precies de inverse vinden van δ voor $\epsilon=0$. Dit betekent dus dat we a en b moeten omdraaien. Dit levert geen nieuwe resultaten omdat a en b precies dezelfde rol spelen.($\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a}}$).

6.1.3 Geval 3: $\epsilon=2$

Voor het geval $\epsilon=2$ hebben we formule

$$\sqrt[3]{1+(z')^{-1}\sqrt[3]{\delta}}=(A'(\sqrt[3]{\delta}^{\epsilon}))^{\frac{1}{3}}(1+\sqrt[3]{\delta}+x\sqrt[3]{\delta^2})$$

We vullen in $\epsilon=2$, we vinden:

$$\sqrt[3]{1+(z')^{-1}\sqrt[3]{\delta}}=(A'(\sqrt[3]{d^2}))^{\frac{1}{3}}(1+\sqrt[3]{\delta}+x\sqrt[3]{\delta^2})$$

Tot de derde macht verheffen levert:

$$1+(z^{'})^{-1}\sqrt[3]{\delta}=A^{'}(3+3\delta x+3x^2\delta)\delta+(3+3x+3\delta x^2)\delta\sqrt[3]{\delta}+(1+\delta+6\delta x+\delta^2x^3)\delta\sqrt[3]{\delta^2}$$

Hieruit volgt dat $1+\delta+6\delta x+\delta^2x^3=0$. We merken op dat deze formule kwadratisch is in δ. We passen de abc-formule toe. Dus $a=x^3, b=6x+1$ en $c=1$. Hieruit volgt dat de discriminant gelijk is aan $b^2-4ac=-4x^3+36x^2+12x+1$. Omdat $\delta\in\mathbb{Q}$ moet liggen , zoeken we naar x zodat -$4x^3+36x^2+12x+1$ een kwadraat in $\mathbb{Q}$ is. We lossen op met *Mathematica*: $z^2=-4x^3+36x^2+12x+1$ met $x\in\mathbb{Q}$. Noem $x=\frac{p}{q}$, we laten $-3000\leq p\leq 3000$ en $1\leq q\leq 3000$ lopen, met $gcd(p,q)=1$. We vinden alleen de triviale oplossing $x=0,z=1$. Hieruit concluderen we dus dat we voor $\epsilon=2$ zeer waarschijnlijk geen oplossingen vinden.

6.2 Vereenvoudigen van vierdemachtswortels van de som van derdemachtswortels

We gebruiken exact dezelfde methode als in de vorige paragraaf, dus deze zullen we niet opnieuw uitleggen. We kijken in deze paragraaf alleen naar het geval $\epsilon=0$ omdat de $gcd(n,m)=gcd(4,3)=1$.
We vullen dus in $\epsilon=0$:

$$\sqrt[4]{1+(z^{'})^{-1}\sqrt[3]{\delta}}=(A^{'})^{\frac{1}{4}}(1+\sqrt[3]{\delta}+x\sqrt[3]{\delta^2})$$

Tot de vierde macht verheffen levert:

$$1+(z^{'})^{-1}\sqrt[3]{\delta}=A^{'}(1+4\delta+12\delta x+6\delta^2x^2+4\delta^2x^3)+(4+\delta+12\delta x+6\delta x^2+4\delta^2x^3)\sqrt[3]{\delta}$$
$$+(6+4x+4\delta x+12\delta x^2+\delta^2x^4)\sqrt[3]{\delta^2}$$

Hieruit volgt dat $6+4x+4\delta x+12\delta x^2+\delta^2x^4=0$, dus met de abc-formule volgt dat

$$\delta=\frac{-4x+12x^2\pm\sqrt{(4x+12x^2)^2-4x^4(4x+6)}}{2x^4}$$

We hebben nu een uitdrukking voor δ in x. Verder

$$A^{'}=\frac{1}{1+4\delta+12\delta x+6\delta^2x^2+4\delta^2x^3},(z^{'})^{-1}=\frac{4+\delta+12\delta x+6\delta x^2+4\delta^2x^3}{1+4\delta+12\delta x+6\delta^2x^2+4\delta^2x^3}$$

Omdat $\delta\in\mathbb{Q}$ moet liggen, zoeken we naar x zodat $(-4x+12x^2)^2-4x^4(4x+6)=-16x^5+120x^4+96x^3+16x^2$ een kwadraat in $\mathbb{Q}$ is. We lossen op : $u^2=-16x^5+120x^4+96x^3+16x^2$ met $x\in\mathbb{Q}$. Dit is precies hezelfde als $(u')^2=-16x^3+120x^2+96x+16$ oplossen met $(u')^2=\frac{u^2}{x^2}$, we doen dit met *Mathematica*. De theorie van elliptische krommen vertelt nu dat als we een oplossing vinden, dan bestaan er oneindig veel oplossingen voor deze vergelijking. Noem $x=\frac{p}{q}$, we laten $-1000\leq p\leq 1000$ en $1\leq q\leq 1000$ lopen, met $gcd(p,q)=1$. We vinden de volgende resultaten:

p	q	x	$u^{'}$	Opmerkingen
0	1	0	4	Triviaal
4	1	4	36	
-3	2	$-\frac{3}{2}$	14	
-1	2	$-\frac{1}{2}$	0	Triviaal
-11	4	$-\frac{11}{4}$	$\frac{63}{2}$	
56	9	$\frac{56}{9}$	$\frac{1012}{17}$	
-20	121	$-\frac{20}{121}$	$\frac{2484}{1331}$	
-417	784	$-\frac{417}{784}$	$\frac{6245}{5488}$	

Tabel 8: x zodat $u \in \mathbb{Q}$ met $u^2 = -16x^5 + 120x^4 + 96x^3 + 16x^2$

We hebben 5 bruikbare resultaten gevonden waarvan we er 3 uitwerken:

- $x = 4$, invullen in de formule voor δ, we vinden $\delta_1 = -\frac{1}{8}$ en $\delta_2 = -\frac{11}{16}$. δ_1 levert $A^{'} = \infty$ en dus geen vereenvouding op. δ_2 levert $A^{'} = \frac{8}{1053}$ en $(z^{'})^{-1} = \frac{5}{26}$. Invullen levert:

$$\sqrt[4]{1 + \frac{5}{26}\sqrt[3]{-\frac{11}{16}}} = \sqrt[4]{\frac{8}{1053}}(1 + \sqrt[3]{-\frac{11}{16}} + 4\sqrt[3]{\frac{121}{256}})$$

  Vermenigvuldigen met $\sqrt[4]{26}$ levert:

$$\sqrt[4]{26 - 5\sqrt[3]{\frac{11}{16}}} = \sqrt[4]{\frac{16}{81}}(1 - \sqrt[3]{\frac{11}{16}} + 16\sqrt[3]{\frac{121}{4}}) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{11}{16}} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{121}$$

- $x = -\frac{3}{2}$, invullen in de formule voor δ, we vinden $\delta_1 = -\frac{112}{27}$ en $\delta_2 = 0$. δ_1 levert $A^{'} = \frac{27}{1595}$ en $(z^{'})^{-1} = -\frac{5772}{1595}$. δ_2 levert geen vereenvoudiging op. Invullen levert:

$$\sqrt[4]{1 - \frac{5772}{1595}\sqrt[3]{-\frac{112}{27}}} = \sqrt[4]{\frac{27}{1595}}(1 + \sqrt[3]{-\frac{112}{27}} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(-\frac{112}{27})^2})$$

  Vermenigvuldigen met $\sqrt[4]{1595}$ en derdemachten uitdelen levert:

$$\sqrt[4]{1595 + 3843\sqrt[3]{14}} = -\sqrt[4]{27}(1 - \frac{2}{3}\sqrt[3]{14} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{196})$$

- $x = -\frac{11}{4}$, invullen in de formule voor δ, we vinden $\delta_1 = -\frac{16}{11}$ en $\delta_2 = \frac{80}{1331}$. δ_1 levert $A^{'} = -\frac{11}{405}$ en $(z^{'})^{-1} = \frac{26}{5}$. δ_2 levert $A^{'} = -\frac{14641}{12879}$ en $(z^{'})^{-1} = -\frac{814}{519}$. Invullen voor δ_1 levert:

$$\sqrt[4]{1 + \frac{26}{5}\sqrt[3]{-\frac{16}{11}}} = \sqrt[4]{-\frac{11}{405}}(1 + \sqrt[3]{-\frac{16}{11}} - \frac{11}{4}\sqrt[3]{(-\frac{16}{11})^2})$$

Vermenigvuldigen met $\sqrt[4]{5}$ en derdemachten uitdelen levert:

$$\sqrt[4]{26\sqrt[3]{\frac{16}{11}}-5}=\frac{1}{3}\sqrt[4]{11}(1-\sqrt[3]{\frac{16}{11}}-\frac{11}{4}\sqrt[3]{\frac{256}{121}})$$

Invullen voor δ_2 levert:

$$\sqrt[4]{1-\frac{814}{519}\sqrt[3]{\frac{80}{1331}}}=\sqrt[4]{-\frac{14641}{12897}}(1+\sqrt[3]{\frac{80}{1331}}-\frac{11}{4}\sqrt[3]{(\frac{80}{1331})^2}$$

Vermenigvuldigen met achtereenvolgens $\sqrt[4]{-1}$ en $\sqrt[3]{159}$ levert:

$$\sqrt[4]{148\sqrt[3]{10}-159}=\frac{1}{3}(11+2\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{100})$$

6.3 Vereenvoudigen van vijfdemachtswortels van de som van derdemachtswortels

Voor vijfdemachtswortels van de som van derdemachtswortels geldt $gcd(n,m)=gcd(5,3)=1$, dus het is voldoende om te kijken naar $\epsilon=0$. We hebben de volgende forumle:

$$\sqrt[5]{1+(z')^{-1}\sqrt[3]{\delta}}=(A')^{\frac{1}{5}}(1+\sqrt[3]{\delta}+x\sqrt[3]{\delta^2})$$

Tot de machts vijf verheffen levert:

$$1+(z')^{-1}\sqrt[3]{\delta}=A'((1+\delta(10+20x)+\delta^2(5x+30x^2+10x^3)+\delta^3(5x+30x^2+10x^3))+$$

$$(5+\delta^3x^5+\delta(5+30x+10x^2)+\delta^2(10x^2+20x^3))\sqrt[3]{\delta}+(10+5x+\delta(1+20x+30x^2)+\delta^2(10x^3+5x^4))\sqrt[3]{\delta^2})$$

De coëfficient voor $\sqrt[3]{\delta^2}$ moet dus gelijk zijn aan 0. Uit de abc-forumle volgt dat $1+40x+460x^2+800x^3+500x^4-100x^5$ kwadratisch moet zijn in $\mathbb{Q}$. Dus $z^2=1+40x+460x^2+800x^3+500x^4-100x^5$. Dit kunnen we weer checken met *Mathematica*. Noem $x=\frac{p}{q}$, we laten $-2000\leq p\leq 2000$ en $1\leq q\leq 2000$ lopen, met $gcd(p,q)=1$. We vinden de triviale oplossing $x=0$ en $x=-2$. Echter wanneer de -2 in de formule van δ invoeren vinden we dat de noemer gelijk is aan 0. Dus we vinden daarvoor geen oplossingen.

Uit de theorie van hyper-elliptische krommen volgt dat $z^2=1+40x+460x^2+800x^3+500x^4-100x^5$ hooguit eindig veel oplossingen heeft. Omdat we de grenzen van -2000 tot 2000 hebben laten lopen weten we niet of we alle oplossingen hebben maar het duurt erg lang met *Mathematica* als we de grenzen nog groter laten worden.

Tegen dit probleem gaan we ook voor $n>5$ oplopen, dus hier zullen we onze zoektocht naar vereenvoudigingen van worteluitdrukkingen stoppen.

7 Conclusie

Het doel van deze scriptie was antwoord geven op de hoofdvraag:

Kunnen we worteluitdrukkingen van de vorm $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b}}$ schrijven als de som van enkelvoudige wortels voor $m=2$ en $m=3$?

Uit de hoofstelling en de gevolgen van deze stelling volgt dat we inderdaad kunnen aangeven welke samengestelde wortels als een som van enkelvoudige wortels geschreven kan worden. Bij elk van deze gevallen hebben een vereenvoudige worteluitdrukking gegeven. De meest in het oogspringende resultaten zijn voor ons:

- $\sqrt{\sqrt[3]{28}-\sqrt[3]{27}}=\frac{1}{3}(\sqrt[3]{98}-\sqrt[3]{28}-1)$
- $\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{3}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{25})$
- $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

Vereenvoudigen die ook in het artikel van Landau [1] genoemd worden.

We hebben dus een methode gevonden om n^{de} machtswortels van twee wortels te vereenvoudigen en een methode om k^{de} machtswortels van derdemachtswortels te vereenvoudigen voor $k=2,3$ en 4. Verder volgt dus uit theorie van elliptische krommen dat we oneindig veel voorbeelden kunnnen vinden in deze gevallen.

Voor de vijfdemachtswortel van de som van twee derdemachtswortels hebben we wel een methode gevonden, we weten alleen niet of de hyper-elliptische kromme uit deze paragraaf oplossingen geeft die bruikbaar zijn voor vereenvoudigen van deze gevallen.

Referenties

[1] Landau,S. How to Tangle with a Nested Radical. *The Mathematical Intelligencer Vol. 16 NO.2* (1994), p. 49-55.

[2] Newton, I. and Raphson, J. *Universal Arithmetick: or treatise of Arithmetical Composition and Resolution*, 1720

[3] Euler, L. De extractione radicum ex quantitatibus irrationalibus, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 13* (1751) p. 16-60

[4] Wepster, S.Handout bij de workshop Wortels van Binomen. *Nationale Wiskunde Dagen*(2014), p.3

[5] Blömer, J. How to Denest Ramanujan's Nested Radicals. *Proceedings of the 33rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*(1992) p. 449