

Kant en de niet-euclidische uitdaging

over de impact van niet-euclidische meetkunde
op het transcendentale project.

Universiteit Utrecht
Departement wijsbegeerte

Stijn van der Leest
3292975
08-08-2012

Inhoudsopgave

Inleiding.....	3
1. Transcendentale ruimte.....	6
1.1. Overzicht.....	6
1.2. Het transcendentale project.....	7
1.2.1. De Kritiek van de Zuivere Rede.....	8
1.2.2. Oordelen	9
1.2.3. Kants filosofie van cognitie.....	11
1.3. Argumenten voor transcendentale ruimte.....	11
1.3.1. Twee argumenten voor ruimte als a priori	12
1.3.2. Twee argumenten tegen ruimte als concept.....	13
1.3.3. Het argument van incongruente tegenhangers.....	14
1.3.4. Het argument van de euclidische meetkunde.....	14
2. Het argument van niet-euclidische meetkunde.....	16
2.1. Inleiding en historisch overzicht.....	16
2.1.1. Euclidische meetkunde.....	16
2.1.2. De ontdekking van niet-euclidische meetkunde.....	17
2.1.3. Toepasbaarheid.....	18
2.1.4. De relativiteitstheorie.....	19
2.1.5. De argumenten tegen Kants transcendentale ruimte.....	20
2.2. Helmholtz.....	20
2.2.1. Argumentatiestructuur.....	21
2.2.2. Voorstellingen van niet-euclidische ruimte	22
2.2.3. Het principe van vormbehoud	25
2.2.4. De kwestie van de ruimte als empirisch probleem	26
2.2.5. Conclusie	27
2.3. Carnap.....	28
2.3.1. Argumentatiestructuur.....	28
2.3.2. De werkelijke ruimte is niet-euclidisch.....	28
2.3.3. Geen enkele meetkunde kan zowel synthetisch als a priori zijn.....	31
3. Afweging.....	33
3.1. Opzet.....	33
3.2. Helmholtz' argumentatie.....	33
3.2.1. Het cruciale argument van de voorstelbaarheid.....	35
3.2.2. Is niet-euclidische ruimte voorstelbaar?.....	35
3.2.3. Conclusie.....	37
3.3. Carnaps argumentatie.....	38
3.3.1. Het argument van de relativiteitstheorie.....	38
3.3.2. Ontologie op basis van conventie en simpliciteit.....	39
3.3.3. Het argument van de twee meetkundige methoden	41
3.4. Tot slot.....	42
3.4.1. Recapitulatie.....	42
3.4.2. Het probleem van de ruimte in de moderne natuurwetenschap.....	43
3.4.3. Een oplossing?.....	44
Conclusie.....	46
Bibliografie.....	47

Inleiding

Immanuel Kant verbijsterde eind achttiende eeuw de filosofische wereld met een geheel nieuwe vorm van filosofie. In zijn zoektocht naar de grenzen van ons kenvermogen moest hij concluderen dat een wetenschappelijk verantwoorde metafysica alleen kan bestaan na een radicale reconceptie van wat wij de kenbare natuur noemen. Zijn zogeheten 'copernicaanse wending' redt onze kennis van de objectieve natuur door deze te definiëren als een object voortkomend uit het kennend subject. Het voornaamste slachtoffer van deze wending is wat Kant noemt het transcendentaal realisme: het idee van een van ons onafhankelijke, maar toch kenbare objectieve natuur.

Objectieve kennis van de door ons kenvermogen gedefinieerde natuur blijft mogelijk omdat Kant een aantal a priori elementen in onze kennis aanwezig acht. De aanschouwingsvormen van ruimte en tijd, alsmede de logische categorieën, vormen de basis waarop wij de objectieve (zuivere) wetenschappen kunnen funderen. De idee van apriorisme in onze kennis heeft sinds de hoogtijdagen van het kantianisme echter sterk aan aanhang ingeboet. In het licht van het hedendaags natuurwetenschappelijk onderzoek, waarin gebruik wordt gemaakt van nauwelijks inzichtelijke en radicaal contra-intuïtieve methoden, lijkt het idee van noodzakelijkheid in onze 'oude' kijk op de wereld zelfs volkomen irrelevant. Waarom zou iemand überhaupt nog willen vasthouden aan het werk van een gedateerde filosoof?

Een archetypisch voorbeeld van een rotsvast geacht domein in ons denken, dat in het licht van de huidige wetenschap moet worden verworpen, is dat van de Euclidische meetkunde. Deze werd voorheen als volkomen onweerlegbaar beschouwd, en dient onder meer daarom als basis voor Kants notie van ruimte als zuivere aanschouwingsvorm. Toch wordt tegenwoordig beweerd dat deze oer-meetkunde het licht van de moderne wetenschap moet worden verworpen, met alle gevolgen van dien voor Kants transcendentale filosofie. In *The Cambridge Companion to Kant and Modern Philosophy* wordt geconcludeerd:

"The single most important event for the evaluation of Kant's theory of space was the discovery of non-euclidean geometries in the nineteenth century and the subsequent conclusion that physical space-time is non-euclidean in the twentieth. (...) There remains very little for Kant to be right about, as regards the necessary relation of Euclid's geometry to any aspect of our experience."¹

¹ Gary Hatfield, "Kant on the Perception of Space (and Time)," in: *The Cambridge Companion to Kant and Modern Philosophy* ed. Paul Guyer. (New York: Cambridge University Press, 2006) 88-89.

De gebruikelijke interpretatie van deze kwestie luidt: Kants filosofie steunt essentieel op een euclidisch beschreven ruimte, de komst van niet-euclidische meetkunde betekent dat de ruimte niet meer noodzakelijk euclidisch hoeft te zijn, daarom kunnen we Kants notie van transcendentale ruimte verwerpen.

In de wetenschapsfilosofie worden dergelijke kwesties doorgaans echter niet zo gemakkelijk besloten. De bovenstaande argumentatie is onvoldoende om Kants positie te weerleggen zolang niet precies duidelijk wordt wat de status is van de niet-euclidische meetkunde, hoe de euclidische meetkunde en Kants notie van zuivere ruimte daarmee worden weerlegd, en in hoeverre dit fataal is voor het transcendentale project.

De vraag die ik in dit onderzoek wil beantwoorden is: hoe luidt het argument van de niet-euclidische meetkunde en in hoeverre vormt het een weerlegging van Kants notie van ruimte als zuivere aanschouwingsvorm?

Om tot een gebalanceerd antwoord te komen in deze kwestie zal ik in het eerste hoofdstuk beginnen met een beknopte uiteenzetting van Kants uitgangspunten, alsmede de precieze argumenten waarmee hij de ruimte als zuivere aanschouwingsvorm verdedigt. Hiervoor zal ik mij uiteraard beroepen op de *Kritiek van de Zuivere Rede*, waarin het transcendentale project wordt vormgegeven. Ter ondersteuning zal ik tevens gebruik maken van de *Prolegomena* – die bedoeld is als inleiding, verduidelijking en verdediging van het voornoemde meesterwerk – en Sebastian Gardners instructieve *Routledge Philosophy Guidebook to Kant and the Critique of Pure Reason*.

Het tweede hoofdstuk zal gewijd worden aan het eerste deel van de hoofdvraag, de filosofische articulatie van het argument van niet-euclidische meetkunde. Hiervoor zal ik gebruik maken van het werk van respectievelijk Hermann Helmholtz en Rudolf Carnap. Zij geven volgens de zojuist geciteerde Gary Hatfield uitdrukking aan de basale argumenten uit niet-euclidische meetkunde tegen Kant.² In het invloedrijke artikel "Origin and Meaning of Geometrical Axioms" uit 1876 bespreekt Helmholtz de filosofische implicaties van het bestaan van niet-euclidische meetkunde, en de mogelijkheid dat deze voorstelbaar gemaakt kan worden. Carnap behandelt in de hoofdstukken 15 t/m 18 van zijn *Philosophical Foundations of Physics* uit 1966 de gevolgen van de niet-euclidische meetkunde voor Kant, op basis van het feit dat de relativiteitstheorie gebruik maakt van gekromde niet-euclidische ruimtetijd.

² Hatfield, "Kant on the Perception of Space (and Time)," 88-89, 93.

In mijn bespreking zal ik vaststellen dat er drie uitgangspunten zijn waarop de niet-euclidische argumentatie tegen Kant gebaseerd kan worden. Deze zijn 1) het bestaan van niet-euclidische meetkunde 2) de voorstelbaarheid van niet-euclidische ruimte en 3) de functie van niet-euclidische meetkunde in de moderne natuurwetenschappen. Ik zal bespreken hoe de vermeende verwerping van Kants filosofie uit ieder van deze punten tot stand komt. Aangezien verdere argumentatie in deze kwestie altijd op een van dezen lijkt te moeten berusten zal ik deze bespreking van het argument van niet-euclidische meetkunde als voldoende uitputtend beschouwen.

Hoofdstuk drie zal gewijd worden aan het tweede en belangrijkste deel van de hoofdvraag: kunnen we de verschillende uitingsvormen van het argument van niet-euclidische meetkunde beschouwen als een succesvolle aanval op Kants notie van ruimte als zuivere aanschouwingsvorm? Ik zal op basis van Kants argumenten vóór, en de argumenten van Helmholtz en Carnap tégen de transcendentale ruimte een afweging maken van de relatieve kracht van de tegenargumenten. Daarnaast zal ik onderzoeken of de uitgangspunten van Helmholtz en Carnap als een zinvol alternatief kunnen gelden voor ons begrip van de ruimte. Ten koste van wat kunnen we Kant hierin nog verdedigen, en wat zijn de kosten van een verwerping? Uiteindelijk hoop ik een grondige filosofische analyse te kunnen geven van het argument van de niet-euclidische meetkunde, en te zien op welke manier wij dit vermeende a priori element in onze kennis zouden moeten ontmaskeren als een vermomd empirisch fenomeen.

1. Transcendentale ruimte

1.1. Overzicht

Om een goed beeld te krijgen van de rol van euclidische meetkunde in de transcendentale filosofie dient men te focussen op Kants definitie van ruimte als zuivere aanschouwingsvorm (ofwel 'transcendentale ruimte').

In dit hoofdstuk zal ik uiteenzetten welke rol de meetkunde speelt in de transcendentale bewijsvoering en wat de implicaties zijn van transcendentale ruimte voor het menselijk kenvermogen. De precieze argumenten voor transcendentale ruimte worden gegeven in de "transcendentale esthetica", het hoofdstuk in de *Kritiek* gewijd aan een 'kritische beschouwing van de principes van onze zintuiglijke gewaarwording'.³ Voordat we ons in een meer gedetailleerde bespreking storten zal ik een beeld schetsen van het project dat Kant met de *Kritiek* voor ogen heeft. Dit niet alleen uit goed academisch gebruik, maar ook omdat het elders in dit onderzoek van pas kan komen, wanneer een afweging dient te worden gemaakt van de kracht van Kants argumentatie.

Een interpretatie van het zenuwsapverterende project is dankzij Kants beruchte bondigheid een heikel karwei. De precieze evolutie van Kants denken, de onontkoombare interne discrepanties van binnen de kritische filosofie en de verscheidenheid aan interpretaties ervan zijn voor deze exercitie slechts van belang voor zover zij nodig zijn ter verduidelijking van de idee van transcendentale ruimte. Zolang er geen sprake is van onderlinge tegenspraak zal ik de A- en B-versie van de *Kritiek*, alsmede de *Prolegomena* beschouwen als verschillende uitingvormen van dezelfde filosofie. In mijn verwijzen naar het transcendentale project ben ik mij bewust van de problemen die met een eenduidige lezing van Kants werk gepaard gaan, maar permitteer ik mij desondanks een duiding te geven van de gangbare interpretatie van Kants werk.

In dit hoofdstuk zal ik beginnen met een korte bespreking van de filosofische problemen waar Kant voor stond, gevolgd door de belangrijkste pijlers waarop de *Kritiek* is gegrondvest (§1.2). Daarna volgen de zes argumenten die Kant geeft ter verdediging van zijn notie van ruimte, en de rol die de euclidische principes vervullen in onze zuivere aanschouwing (§1.3). Zodoende hoop ik een voldoende beeld te kunnen geven van de positieve argumenten voor Kants transcendentale positie, om dat beeld vervolgens te kunnen afzetten tegen de objecties vanuit de niet-euclidische

³ Immanuel Kant, *Kritiek van de zuivere rede*, vert. Jabik Veenbaas en Willem Visser, (Amsterdam: Boom, 2004), 120-121 (A21/B35).

meetkunde.

1.2. Het transcendentale project

Het hoofddoel dat Kant met de *Kritiek van de Zuivere Rede* voor ogen heeft is het vinden van een wetenschappelijk verantwoorde metafysica. Zijn methode behelst een kritisch onderzoek naar de werking van de menselijke rede.⁴ We zien in deze doelstelling de invloed van de twee destijds dominante filosofische stromingen op Kants denken: het rationalisme en het empirisme. Beide tradities maken aanspraak op een objectieve methode voor rationele kennis, maar de respectievelijke uitgangspunten van waaruit zij werken bleken volkomen incompatibel. Het empirisme stond voor een inductieve wetenschappelijke methode, waarin de verwerkte resultaten van de ervaring onze enige toegang vormen tot de werkelijkheid. Het rationalisme ging uit van een op de wiskunde gebaseerde deductieve methode, waarin de rationele structuur van de werkelijkheid – die direct ter beschikking staat van het menselijk intellect – kan worden vastgesteld door middel van een onderzoek naar de concepten van de rede.⁵

Kants oorspronkelijke liefde ging uit naar de rationalistische zienswijze, naar de transcendentale metafysica van de Leibniz-Wolff traditie, waarin de rationele structuur van de werkelijkheid diende als het bewijs voor Gods bestaan, en waarin de ethiek kon worden gegrondvest. Hij omarmde echter ook de newtoniaanse natuurkunde als de uitgelezen bron voor kennis van de door mechanische principes gestuurde wereld.⁶ Kant zocht in zijn filosofie verwoed naar een manier om beide tradities met elkaar in overeenstemming te brengen in één metafysica. Gaandeweg zijn filosofische carrière raakte hij echter teleurgesteld in de rationalistische traditie, die met haar aanspraak op toegang tot het bovennatuurlijke soms de neiging vertoonde tot verregaande esoterische conclusies. Kants twijfels over het rationalisme betroffen vooral de wijze waarop de rationalistische metafysica werd bedreven. De wiskundige methode van deductie volstond volgens Kant niet voor de metafysica, omdat de concepten waaruit men kennis wilde deduceren niet onmiddellijk helder gedefinieerd kunnen worden. De metafysica zou volgens Kant beter van onderaf kunnen beginnen, met concepten als de primaire data, om na een natuurwetenschappelijke wijze van onderzoek te komen tot sluitende definities.⁷ Intussen kon de empiristische traditie Kant ook niet geheel bekoren. Hij was onder de indruk van de bewijskracht van de newtoniaanse natuurkunde, maar concludeerde dat ook haar inductieve bron een filosofische – dat

⁴ Immanuel Kant, *Prolegomena*, vert. Jabik Veenbaas en Willem Visser, 2^e dr (Amsterdam: Boom, 2004), 12.

⁵ Sebastian Gardner, *Kant and the Critique of Pure Reason*, (London: Routledge 1999), 15-16.

⁶ Gardner, *Kant and the Critique of Pure Reason*, 14.

⁷ Gardner, *Kant and the Critique of Pure Reason*, 15-16.

wil zeggen metafysische – grondslag nodig heeft, waarop haar objectieve zekerheid kan worden gebaseerd. Maar welk principe kan ons garanderen dat de objecten die ons toeschijnen als representatie ook op eenzelfde wijze bestaan in de natuur? Dergelijke vragen bleven in de empirische traditie onbeantwoord.⁸

Kants metafysische twijfel kwam tot een hoogtepunt na zijn kennismaking met David Hume's inductieprobleem. Hume onderschrijft het empiristische uitgangspunt dat wij onze kennis van de wereld baseren op onze zintuiglijke waarneming. Maar hoe kan deze waarneming een basis verschaffen voor de meer abstracte begrippen in onze kennis? Wanneer wij spreken van de gebeurtenis 'A' als oorzaak voor 'B', dan baseren wij dit volgens Hume op basis van een constante waargenomen correlatie tussen beiden. Maar hoe zouden wij op basis van deze correlatie concluderen dat A de oorzaak is van B? Erger nog: hoe kunnen wij spreken van een wetmatigheid als wij slechts de alle instanties van deze correlatie hebben waargenomen tot op dít moment? Hume kwam tot de conclusie dat wetmatigheden, zoals gebruikt in de natuurkunde van Newton, een ultieme filosofische basis missen.⁹ Hij stelde dat het simpelweg een ongefundeerde gewoonte van de menselijke geest is om natuurwetten te zien, daar waar wij eigenlijk slechts een correlatie waarnemen. Hume concludeerde daarom dat niet alleen de rationalistische filosofie, maar ook alle empiristische metafysica, en dus alle filosofie zou moeten worden verworpen. In zijn eigen woorden: "commit it (...) to the flames, for it can contain nothing but sophistry and illusion".¹⁰

1.2.1. De Kritiek van de Zuivere Rede

Een dergelijk scepticisme was voor Kant onacceptabel. Dat er na eeuwen van wijsbegeerte nog altijd geen oplossing was gevonden voor het probleem van kennis noemt hij het 'schandaal van de filosofie'.¹¹ De Kritiek was zijn antwoord op deze sceptische uitdaging. Met een onderzoek naar de grenzen van ons kenvermogen wilde hij een basis verschaffen voor een metafysica op basis waarvan wij kennis over de wereld kunnen rechtvaardigen.¹² Elementair voor Kant is de volgende vaststelling: de menselijke rede kan alleen worden toegepast op het empirische materiaal dat ons in onze aanschouwing toekomt. Wanneer wij deze limitatie accepteren dan wordt het echter onmogelijk iets te zeggen over de aard van de objecten die deze representaties in onze geest veroorzaken. Er is tenslotte een verschil tussen het object zelf (na de

⁸ Gardner, *Kant and the Critique of Pure Reason*, 34.

⁹ Eric Schliesser, "Hume's Newtonianism and Anti-Newtonianism", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2008 Edition)*, ed. Edward N. Zalta, <http://plato.stanford.edu/archives/win2008/entries/hume-newton/> (geraadpleegd 19 juli 2012).

¹⁰ David Hume, *Enquiries Concerning Human Understanding*, ed. L. Selby-Bigge (London: Oxford University Press, 1902), 165.

¹¹ Kant, *Kritiek van de zuivere rede*, 88 (B XXXIX voetnoot).

¹² Kant, *Prolegomena*, 12.

copernicaanse wending: het *ding an sich*) en de voorstelling hiervan aan onze kenvermogens. Tenzij wij op enige wijze een vooraf ingestelde overeenkomst tussen onze aanschouwing en de werkelijkheid accepteren – iets waar volgens Kant geen filosofische grondslag voor kan bestaan – zullen wij moeten accepteren dat de wereld an sich niet kenbaar is.¹³

Kant komt tot de conclusie dat zekere kennis niet mogelijk is zolang wij blijven vasthouden aan een object van kennis onafhankelijk van het kennende subject. Zijn oplossing wordt de 'copernicaanse revolutie van de filosofie' genoemd. Volgens Kant heeft de door ons gekende wereld geen van ons onafhankelijke realiteit. Het onderwerp van kennis is wat wij kunnen noemen een object-voor-ons,¹⁴ dat wil zeggen: een object dat voortkomt uit het intellect van het kennend subject. De copernicaanse metafoor betreft volgens Gardner onze kennis over de hemellichamen. Copernicus leerde ons dat wij de zon ten onrechte beschreven als draaiend om de aarde. Dit bleek geen objectieve beschrijving van een eigenschap van het hemellichaam maar een toedichting waarvan wij aardbewoners zelf de architect zijn.¹⁵ In de filosofie van Kant zijn de eigenschappen die aan de natuur worden toegeschreven op eenzelfde wijze afkomstig en afhankelijk van het subject, dat de natuur tot het object maakt van haar kennis. Het subject creëert zodoende zelf de enige realiteit waar het toegang toe heeft.

1.2.2. Oordelen

Kant was zich ervan bewust dat zijn copernicaanse wending verregaande gevolgen kan hebben wanneer hij zich niet zou distantiëren van de traditionele idealistische metafysica, waarin het bestaan van een objectieve wereld doorgaans geheel ontkend wordt. Kants transcendentiaal idealisme kenmerkt zich echter door het bestaan van a priori elementen in onze cognitie. Deze elementen garanderen dat een eenduidig kenbare wereld alsnog binnen bereik blijft, en een solipsisme als dat van Berkeley verworpen. De a priori elementen in onze cognitie kennen hun belangrijkste uitingsvorm in de zuivere wetenschappen, de wis- en natuurkunde.¹⁶ Hoe deze wetenschappen tot stand komen wordt inzichtelijk door Kants onderscheid tussen de mogelijke oordelen die wij kunnen hebben. Het inductieprobleem is gebaseerd op de humiaanse tweedeling tussen zogenaamde 'relations of ideas' en 'matters of fact'. Het onderscheid berust volgens Kant op de misvatting dat rationalistische ideeën alleen analytisch kunnen zijn, en synthetische oordelen altijd alleen aan feiten uit de

¹³ Gardner, *Kant and the Critique of Pure Reason*, 34.

¹⁴ Gardner, *Kant and the Critique of Pure Reason*, 39.

¹⁵ Gardner, *Kant and the Critique of Pure Reason*, 42.

¹⁶ Kant, *Prolegomena*, 15.

ervaring kunnen worden toegeschreven. Met Kants nieuwe definitie van de kenbare natuur kan hij deze misvatting weerspreken.

Analytische uitspraken zijn volgens Kant verklarend, zij voegen niets toe aan onze kennis maar verhelderen deze slechts. Zo wordt bijvoorbeeld in de uitspraak 'deze cirkel is rond' aan het subject (cirkel) een predikaat (rondheid) toegeschreven dat al besloten ligt in het subject zelf (cirkels zijn per definitie rond). Analytische oordelen zijn altijd a priori, omdat voor de waarheid ervan geen kennis van de wereld nodig is. Zij berusten op concepten, die worden beoordeeld aan de hand van de wet van non-contradictie. Deze verbiedt ons bijvoorbeeld te stellen dat een cirkel een andere vorm kan hebben dan de ronde.¹⁷ Synthetische oordelen op hun beurt zijn volgens Kant uitbreidend, zij voegen meer toe dan in het subject ligt besloten en vergroten daardoor onze kennis van het subject.¹⁸ Een voorbeeld hiervan is de uitspraak 'Deze cirkel is rood'. Niets in het begrip cirkel impliceert dat zij rood moet zijn. Het betreft hier een contingente uitspraak, die we kunnen onderzoeken op haar waarheid.

Ervaringsoordelen gaan volgens Kant nooit over de concepten, en zijn dus altijd synthetisch. Een ervaringsoordeel gaat tenslotte altijd over standen van zaken in de wereld. Kant stelt echter in tegenstelling tot Hume dat deze implicatie niet omgedraaid kan worden: synthetische oordelen vallen niet automatisch in het domein van het zintuiglijke. Dit is het geval bij oordelen uit de wiskunde en de meetkunde. Beide disciplines bieden waarheid onafhankelijk van de ervaring, maar er is wel degelijk sprake van een uitbreiding van onze kennis. Kant geeft het voorbeeld van het euclidische axioma dat een rechte lijn tussen twee punten ook altijd de kortste lijn hiertussen vormt. In het begrip 'rechte lijn' bevindt zich echter geen informatie over de lengte ervan, en dus kan het idee van korthed niet aan het concept 'rechte lijn' worden ontleend.¹⁹ Een analyse van het begrip 'rechte lijn' zal niet voldoende zijn om de noodzakelijke waarheid van deze uitspraak te rechtvaardigen. Alle euclidische axioma's hebben volgens Kant een synthetische opmaak, maar zijn niet afkomstig uit de ervaring. Zij zijn dus synthetisch a priori.

De synthetische oordelen a priori zijn voor Kants transcendentale filosofie van levensbelang. Zij vormen de basis van de zuivere wetenschap waarmee de willekeur van een volledig idealistische wereld kan worden voorkomen. De vraag is echter hoe Kant kan verklaren dat oordelen onafhankelijk van de ervaring toch als zeker kunnen worden gekenmerkt. Hoe weten wij dat de euclidische axioma's waar zijn? Waar halen

¹⁷ Kant, *Prolegomena*, 47 (AA 4, 267).

¹⁸ Kant, *Prolegomena*, 46 (AA 4, 266).

¹⁹ Kant, *Prolegomena*, 49 (AA 4, 269).

wij de grondslag voor dergelijke schijnbaar rationalistische proposities vandaan? Kants filosofie van cognitie biedt soelaas.

1.2.3. Kants filosofie van cognitie

Kants analyse van cognitie poneert het samenspel van twee menselijke kenvermogens: de zintuiglijke aanschouwing en het verstand. De aanschouwing biedt ons de indrukken van de empirische waarneming maar geeft ons, zoals Hume al concludeerde, geen mogelijkheden deze te verwerken tot kennis. Het betreft hier slechts losse indrukken. In ons verstand is de vorming van algemene uitspraken wél mogelijk, namelijk op basis van concepten die we slechts kunnen 'vullen' met de indrukken van onze aanschouwing. Zo wordt ons concept van 'boom' gevuld door alle losse aanschouwingen van bomen, maar geeft de aanschouwing van een boom op zichzelf ons geen kennis van wat boomheid zou kunnen betekenen. Volgens Gardner moeten we het onderscheid tussen deze twee vermogens zien als het onderscheid tussen het particuliere en het universele, maar ook als het onderscheid tussen het passieve vermogen om geaffecteerd te worden door onze zintuigen en de actieve intellectuele creatie die plaatsheeft in de vorming van concepten.²⁰ Beide ingrediënten zijn dus in Kants analyse noodzakelijk voor kennis. De aanschouwing alleen levert ons geen bekendheid met de objecten die ons toeschijnen, concepten hebben particuliere instanties nodig omdat zij anders nergens over gaan. Hieruit volgt Kants beroemde uitspraak: "gedachten zonder inhoud zijn leeg, aanschouwingen zonder begrippen zijn blind".²¹

We zien nu hoe zuivere kennis mogelijk kan zijn. Als er patronen te vinden zijn in onze aanschouwing dan kunnen hiermee concepten in ons verstand worden gevormd die, mits op betrouwbare wijze verwerkt, de garantie kunnen bieden op zekere kennis. Nu zijn we aangekomen bij de plaats van de transcendentale ruimte in Kants filosofie. Kant stelt dat onze aanschouwing een basis kan verschaffen voor zuivere kennis door middel van de twee aanschouwingsvormen, de transcendentale ruimte en tijd.

1.3. Argumenten voor transcendentale ruimte

Om te komen tot de noodzakelijke elementen in ons denken haalt Kant er eerst alles uit weg wat niet noodzakelijk geacht kan worden. Allereerst kunnen we datgene schrappen wat ons verstand aan de waarneming toevoegt. Nu we ons beperken tot de aanschouwing kunnen we alle concrete objecten wegdenken die zich door middel van onze zintuigen aan ons presenteren. Wat overblijft is slechts de vorm waarin deze

²⁰ Gardner, *Kant and the Critique of Pure Reason*, 66-67.

²¹ Kant, *Kritiek van de zuivere rede*, 148 (A51/B75).

objecten moeten worden gegeven, oftewel de zuivere aanschouwing.²² Er zijn volgens Kant twee elementen die wij nooit weg kunnen denken, namelijk de principes van ruimte en tijd. Alles wat wij aanschouwen, aanschouwen wij als zijnde buiten ons, en op verschillende plaatsen in de ruimte. Was dit niet zo, dan zouden wij überhaupt geen zintuiglijke ervaring kunnen hebben van zaken buiten ons lichaam. Ook voor tijd geldt dat wij alles noodzakelijk moeten veronderstellen als verschijnend in een bepaalde volgorde, we kunnen ons namelijk niet voorstellen dat alles exact tegelijkertijd zou plaatsvinden, laat staan als dit alles ook nog zou gebeuren op dezelfde plaats.²³ De tijd is voor deze bespreking niet belangrijk, voor het overzicht volstaat dat Kant zijn argumenten voor tijd op eenzelfde wijze vormgeeft als die van de transcendentale ruimte.

Nu Kant ons een idee heeft gegeven waarom ruimte als noodzakelijke vorm van onze gewaarwording moet worden verondersteld, geeft hij een aantal argumenten om deze stelling te waarborgen. In de *Transcendentale Esthetica* poneert hij vier argumenten tegen de gangbare alternatieven voor zijn zienswijze op de aard van de ruimte. Hiermee geeft hij tevens de grenzen aan van wat wij aan de ruimte kunnen toeschrijven. Een aansluitend vijfde geeft hij later, in de *Prolegomena*. Een essentieel laatste argument verschijnt in de B-versie van de *Kritiek*. In dit argument komt de euclidische meetkunde duidelijk naar voren als een essentieel ingrediënt voor Kants argumentatie voor transcendentale ruimte. Ik zal de verschillende argumenten nu uiteenzetten en bespreken maar zal mij, daar waar de euclidische meetkunde niet ter sprake komt, niet uitgebreid bezighouden met het interpreteren van de soms wat summier weergegeven opvattingen.

1.3.1. Twee argumenten voor ruimte als a priori

De eerste twee argumenten die Kant geeft, dienen als bewijs voor het idee dat ruimte als zuivere aanschouwingsvorm preferentie verdient boven het idee dat de ruimte zelf een empirisch begrip is dat uit de zintuiglijke ervaring kan worden afgeleid. Deze laatste opvatting werd bijvoorbeeld aangehangen door Newton, die ruimte zag als een empirisch bestaand gegeven.

Het eerste argument tegen deze laatste opvatting is dat ruimte al verondersteld moet worden wil onze ervaring mogelijk zijn. Anders zouden wij objecten tenslotte niet als buiten ons kunnen veronderstellen. Het begrip ruimte is dus essentieel voor de ervaring, en kan dus niet aan deze ervaring worden ontleend.²⁴ Ruimte is volgens Kant a priori, in die zin dat zij vooraf moet gaan aan onze ervaring. Zij kan dus geen

²² Kant, *Kritiek van de zuivere rede*, 121 (A22/B36).

²³ Kant, *Kritiek van de zuivere rede*, 122 (A23/).

²⁴ Kant, *Kritiek van de zuivere rede*, 123 (A23/B38).

substantie zijn die wij empirisch kunnen onderzoeken.

Het tweede argument tegen ruimte als niet a priori gaat als volgt: we kunnen ons ruimte voorstellen als leeg – zonder objecten – maar kunnen nooit een voorstelling maken van een object zonder of buiten de ruimte.²⁵ Ruimte is dus essentieel voor ons begrip van de buitenwereld, maar is zelf niet afhankelijk van het bestaan van objecten. Hiermee lijkt Kant de bewijslast te leggen bij de empirist, wanneer deze zou stellen dat de ruimte empirisch afleidbaar is uit de objecten van onze gewaarwording. Anderzijds geeft dit argument uiting aan de prima facie overtuiging dat we ruimte niet kunnen wegdenken. De empirist heeft hiervoor, in tegenstelling tot Kant, geen goede verklaring.²⁶ Kant kan concluderen dat de ruimte beter kan worden gezien als a priori aanschouwingsvorm.

1.3.2. Twee argumenten tegen ruimte als concept

Het tweede paar argumenten moet laten zien dat ruimte ook niet beschouwd kan worden als een concept dat uitdrukking geeft aan de verhouding tussen objecten. Tijdens Kants leven voerden voorstanders van deze door Leibniz aangehangen opvatting een felle filosofische strijd tegen de newtoniaanse zienswijze.²⁷ Kant wil echter aantonen dat ruimte überhaupt niet beschouwd kan worden als een concept, of beter: dat het idee van ruimte als aanschouwingsvorm ook hier geprefereerd dient te worden.

Het derde argument vertelt ons dat het concept 'ruimte' uitdrukking kan geven aan een oneindig aantal afgebakende plaatsen tussen objecten. Aangezien de ruimte een egaal geheel is kunnen we deze delen van de ruimte echter slechts definiëren als onderdeel van de totale ruimte.²⁸ Hoewel wij concepten hebben van zowel de onderdelen als de totale ruimte, zijn deze eerste concepten pas mogelijk door onze aanschouwingsvorm van de totale ruimte die er aan voorafgaat.²⁹ Als het idee van ruimte als concept voorafgegaan moet worden door de transcendentale ruimte, dan is deze laatste met goed recht een mogelijkheidsvoorwaarde voor de eerste.

Het vierde argument moet het derde verder bekrachtigen: als de totale ruimte een concept was zou het concept bestaan uit een oneindig aantal delen, dat in de ruimte kan worden gespecificeerd. Volgens Kant kan een concept wel een oneindig aantal eigenschappen hebben, maar niet een oneindige instantie met een oneindig aantal gelijke delen behelzen. Het zou voor de eindige geest dan onmogelijk zijn het

²⁵ Kant, *Kritiek van de zuivere rede*, 123 (A24/B38-39).

²⁶ Andrew Janiak, "Kant's Views on Space and Time", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2009 Edition)*, ed. Edward N. Zalta, <http://plato.stanford.edu/archives/fall2009/entries/kant-spacetime/> (geraadpleegd 12 juni 2012).

²⁷ Gardner, *Kant and the Critique of Pure Reason*, 70-71.

²⁸ Kant, *Kritiek van de zuivere rede*, 123-124 (A25/B39).

²⁹ Gardner, *Kant and the Critique of Pure Reason*, 78.

gehele concept te bevatten. Gardner stelt dat we dit argument beter kunnen bevatten als uitdrukking van het idee dat wij een oneindig concept niet kunnen definiëren. We kunnen de ruimte alleen maar bevatten als onbegrensd (wat zou er tenslotte aan de andere kant van deze grens moeten zijn?) en oneindig deelbaar. Dit maakt het dus onmogelijk dat ruimte een concept is.

1.3.3. Het argument van incongruente tegenhangers

Het vijfde argument, van incongruente tegenhangers (incongruent counterparts), vormt een derde argument tegen de leibniziaanse opvatting van ruimte als een concept. Kant werkt het uit in de *Prolegomena* (§13). Het argument is het meest inzichtelijk in het voorbeeld van de handschoenen. Leibniz zou de helften van een paar handschoenen moeten identificeren als identiek aan elkaar, omdat zijn concept van ruimte als de verhouding tussen ruimtelijke punten aan beide handschoenen dezelfde eigenschappen zou toeschrijven.³⁰ Het gaat hier echter om twee gelijkvormige maar gespiegelde objecten, geschikt voor het dragen aan de linker- respectievelijk de rechterhand. De handschoenen zijn dus gelijkvormig, maar passen niet op elkaar en zijn daarmee incongruent. Volgens Kant moet er een referentie worden gemaakt naar de richting die het object heeft in de totale ruimte om alle eigenschappen van de beide handschoenen te identificeren. Dat wij het door iedereen gekende onderscheid tussen een linker- en een rechter handschoen niet kunnen verklaren met Leibniz' conceptuele ruimte is een fundamenteel defect van deze zienswijze. Ruimte als zuivere aanschouwingsvorm kan daarom worden geprefereerd, omdat hiermee een referentie kan worden gemaakt naar de noties van links- of rechtshandigheid.³¹

1.3.4. Het argument van de euclidische meetkunde

Het laatste en voor ons belangrijkste argument is het argument van meetkunde. We zagen eerder dat Kant meetkunde opwerpt als synthetisch a priori, en dat hij deze pure wetenschap beschouwt als een van de garanties tegen een verregaand idealisme. We hadden hiervoor echter een noodzakelijk element in ons denken nodig. Deze kan Kant met de ruimte als zuivere aanschouwingsvorm geven. De euclidische axioma's kunnen worden gegrondvest in onze zuivere aanschouwing van de ruimte, ons inzicht in de waarheid hiervan is zodoende onmiddellijk en noodzakelijk, omdat deze aanschouwing zelf op noodzakelijkheid berust. Alléén transcendentale ruimte kan garant staan voor deze opvatting van meetkunde. De optelsom is eenvoudig: meetkunde kan niet worden gegrondvest in concepten, aangezien zij niet analytisch is, en ze kan niet uit de ervaring worden verklaard want haar uitspraken zijn

³⁰ Kant, *Prolegomena*, 67 (AA 4, 286).

³¹ Gardner, *Kant and the Critique of Pure Reason*, 80.

noodzakelijk waar. De alternatieve verklaringen van Newton en Leibniz kunnen om deze reden dan ook geen stand houden.³²

Dit laatste argument, dat in de B-versie van de *Kritiek* is bijgevoegd en niet tot de oorspronkelijke hoofdargumentatie lijkt te behoren, kan dus worden gezien als het sluitstuk op de voorgaande argumenten.³³ Ruimte is geen empirisch gegeven en geen concept. Alle argumenten wijzen in dezelfde richting: het feit dat de ruimte noodzakelijk vooraf moet gaan aan onze empirische aanschouwing en niet afhankelijk is van de objecten, het feit dat ruimte voorafgaat moet gaan aan ieder concept van haar onderdelen en dat een oneindig concept als ruimte voor ons niet te bevatten zou zijn en het feit dat we in de ruimte spiegelbeelden kunnen definiëren en dat we de zuivere meetkunde kunnen waarborgen. Het fenomeen dat wij aanduiden als ruimte wordt het beste inzichtelijk als we haar definiëren als een zuivere aanschouwingsvorm, besloten in ons cognitieve gestel. Op deze wijze waarborgt Kant onze objectieve kennis van de natuur, zelfs als wij deze natuur definiëren als het object van ons denken.

³² Gardner, *Kant and the Critique of Pure Reason*, 80-81.

³³ Gardner, *Kant and the Critique of Pure Reason*, 80.

2. Het argument van niet-euclidische meetkunde

Nu we hebben gezien wat de rol is van de euclidische meetkunde in Kants beargumenteren van transcendentale ruimte kunnen we ons richten op de implicaties van de niet-euclidische meetkunde. Eerst zal ik echter een korte inleiding geven in de werking van niet-euclidische meetkunde, haar verhouding tot de euclidische voorouder en haar wetenschappelijke toepassing in de relativiteitstheorie (§2.1). Daarna zal ik uiteenzetten welke filosofische argumenten Hermann von Helmholtz (§2.2) en Rudolf Carnap (§2.3) te berde brengen.

2.1. Inleiding en historisch overzicht

2.1.1. Euclidische meetkunde

Ten tijde van de publicatie van de *Kritiek* halfweg de achttiende eeuw, gold de euclidische meetkunde als hét schoolvoorbeeld van een onbetwifelbare wetenschappelijke discipline. Deze klassieke meetkunde werd ongeveer eenentwintig eeuwen eerder opgesteld door Euclides. Hij leidde de eigenschappen van meetkundige vormen af van een vijftal intuïtief onweerlegbare stellingen – ook wel de axioma's genoemd –, waarvan de eerste luidt dat twee punten kunnen worden verbonden door een rechte lijn. Aangezien deze axioma's intuïtief onmiddellijk inzichtelijk zijn en een meetkunde op grond van alternatieve axioma's onmogelijk leek, had men goede redenen om aan te nemen dat Euclides' werk de enige ware meetkunde moest zijn.³⁴ Een van de axioma's werd echter al sinds de Griekse oudheid hevig bediscussieerd. Het nogal omzichtig geformuleerde parallellenpostulaat werd niet altijd eenduidig begrepen en leek ook niet noodzakelijkerwijs aan te sluiten bij de overige axioma's. Ook de meer heldere equivalente formulering van de Schotse wiskundige John Playfair in 1795 – 'Door een punt buiten een oneindig lange rechte lijn gaat precies één oneindig lange lijn die de eerste niet snijdt' –, kon de twijfel niet geheel wegnemen.

Hoewel er nog altijd hard gewerkt werd aan een sluitend bewijs voor dit axioma twijfelde weinigen aan de uiteindelijke waarheid van de euclidische meetkunde. Een eventuele fout in het parallellenpostulaat zou ongetwijfeld kunnen worden gerepareerd. Voortschrijdend inzicht in de geometrie en de natuurwetenschappen zouden echter aan deze speciale status een hardhandig einde maken.

³⁴ Philip Chapin Jones, "Kant, Euclid and the Non-euclidean," *Philosophy of Science* 13.2 (1964), 140.

2.1.2. De ontdekking van niet-euclidische meetkunde

De bewijsvoering van de euclidische meetkunde liet zo lang op zich wachten omdat het vrijwel onmogelijk is de universele consistentie van de meetkunde te vatten met in diagrammen opgestelde modellen, zoals in de euclidische traditie gebruikelijk was; de lijnen van Euclides moeten bijvoorbeeld oneindig kunnen worden doorgetrokken, iets wat op de tekentafel een heikele onderneming is. Ontwikkelingen in de wiskunde en de logica verruimden echter de mogelijkheden. Op basis hiervan ontwikkelde men de analytische geometrie, een algebraïsche methode waarmee met grote precisie kon worden vastgesteld of de verschillende euclidische axioma's inderdaad een consistent geheel vormden.³⁵

De Duitse wiskundige Carl Friedrich Gauss was de eerste die, gaandeweg de negentiende eeuw, begon te morrelen aan de euclidische constructies. Hij ontdekte door middel van de analytische benadering dat een consistente meetkunde mogelijk was zonder het beruchte parallellenpostulaat. Sterker nog: hij ontdekte de mogelijkheid tot nieuwe consistente meetkundige systemen met op de plaats van het vijfde axioma een alternatieve stelling. Gauss vermoedde echter grote weerstand tegen zijn opvattingen en zou zijn opvattingen uit angst voor zijn academische carrière nooit publiceren.³⁶ De eer kwam toe aan de Russische meetkundige Nikolai Ivanovich Lobachevski, die in 1829 een nieuwe geometrie creëerde op basis van het postulaat dat er bij een rechte lijn een oneindig aantal parallelle lijnen loopt door een naastgelegen punt. Deze niet-euclidische meetkunde wordt hyperbolisch genoemd en vormde het eerste volwaardige alternatief voor de zo lang onaantastbaar geachte euclidische tegenhanger. In 1854 zorgde de Duitse wiskundige Bernhard Riemann voor een tweede doorbraak: op basis van het postulaat dat er voor geen enkele rechte lijn een parallelle lijn bestaat bewees hij de mogelijkheid van een oneindig aantal nieuwe meetkundige systemen. Deze geometrie noemt men elliptisch, of, om voor de hand liggende redenen, Riemann-geometrie.³⁷

De euclidische meetkunde was dus niet langer de enige speler in het veld der geometrie, maar het was vooralsnog niet onmiddellijk duidelijk wat de impact was van de alternatieven. In eerst instantie bestonden de nieuwe geometrische systemen louter uit een verzameling algebraïsche formules, zonder duidelijke extensie in de daadwerkelijke wereld. Wat bewezen deze constructies nu eigenlijk? Wat moeten wij ons voorstellen bij een ruimte waarin hyperbolische en elliptische meetkunde opgaat? Het werd al snel duidelijk dat een afwijking van het parallellenpostulaat moest

³⁵ Rudolf Carnap, *Philosophical Foundations of Physics*, ed. Martin Gardner (New York: Basic Books, 1966), 127.

³⁶ Carnap, *Philosophical Foundations of Physics*, 130-131.

³⁷ Carnap, *Philosophical Foundations of Physics*, 132-134.

betekenen dat we te maken hebben met een ruimte die niet vlak is. Vlakke ruimte wil zeggen: de egale driedimensionale ruimte zoals die ons doorgaans intuïtief duidelijk is. Elliptische meetkunde bleek echter ook een inzichtelijke toepassing te hebben: wij kunnen haar werking inzien wanneer wij platte (tweedimensionale) geometrische vormen construeren op de oppervlakte van een bol, in geometrisch jargon een 'sfeer' genoemd. Wie hierop twee oneindig te verlengen parallelle lijnen wil trekken komt bedrogen uit: het is wegens de kromming van het bolle oppervlak niet mogelijk. Eugenio Beltrami bewees pas in 1868 dat ook de hyperbolische Lobachevski-meetkunde toepasbaar is. Hij maakte hierbij gebruik van het oppervlak van de binnenkant van een halve bol.³⁸ Meetkunde op een pseudosfeer is lastiger in te beelden wegens de oneindige extensie van deze ingewikkelde geometrische figuren. Wanneer we ons hierin zouden verdiepen, zou echter inzichtelijk worden dat er op een hyperbolisch oppervlak voor iedere rechte lijn een oneindig aantal parallelle lijnen bestaat door een naastgelegen punt.³⁹

2.1.3. Toepasbaarheid

Nu men zich iets kon voorstellen bij het soort van meetkunde dat Lobachevski en Riemann hadden ontdekt, ontstond een vraag van nog grotere importantie: wat hebben we aan deze meetkunde? Gauss was wederom de eerste die hierop een antwoord trachtte te formuleren. Wat nu als de ruimte waarin wij ons bevinden helemaal niet noodzakelijk een vlakke euclidisch signatuur heeft? Als er meerdere geometrische systemen mogelijk zijn dan moeten we kunnen uitzoeken welke van toepassing is in onze ruimte. Gauss kwam op het idee dat dit vraagstuk empirisch kon worden opgelost. Ieder van de drie mogelijke meetkonden levert een andere waarde voor wat in de analytische geometrie de *measure of curvature* heet. Deze waarde definieert dus of we spreken van vlakke, elliptische of hyperbolische meetkunde, en is de algebraïsche uitdrukking van de kromming van de ruimte die in het geval van vlakke euclidische ruimte altijd nul is. Een verschil in deze kromming heeft echter meetbare gevolgen voor geometrische figuren: zo heeft een driehoek in euclidische meetkunde in totaal altijd precies 180 graden, in hyperbolische meetkunde altijd minder dan 180 graden en in elliptische meetkunde altijd méér.⁴⁰ Gauss heeft naar verluid al halverwege de negentiende eeuw geprobeerd om door middel van optische metingen, staande op een bergtop met uitzicht op twee andere pieken, het totaal aantal graden van een zo groot mogelijke voorgestelde driehoek te controleren.⁴¹

³⁸ Hermann von Helmholtz, "The Origin and Meaning of Geometrical Axioms," *Mind* 1.3 (1876), 311.

³⁹ Carnap, *Philosophical Foundations of Physics*, 133.

⁴⁰ Carnap, *Philosophical Foundations of Physics*, 133.

⁴¹ Carnap, *Philosophical Foundations of Physics*, 135.

Hoewel de uitkomst van het experiment niet is gedocumenteerd – en een gemeten afwijking van de ouderwetse 180 graden bijzonder onwaarschijnlijk is – was het idee van de vraagstelling revolutionair: als wij empirisch kunnen vaststellen of de ruimte zich al dan niet gedraagt volgens de euclidische principes, dan lijkt hiermee een kantiaans apriorisme niet meer op zijn plaats in de meetkunde.

2.1.4. De relativiteitstheorie

Steeds meer wetenschappers hielden zich bezig met het vraagstuk van de aard van onze ruimte, en de eventuele implicaties hiervan voor de natuurkunde. Voorlopig werd een daadwerkelijke afwijking van de newtoniaanse natuurkunde onmogelijk geacht en kon men zich niet goed voorstellen dat er een kromming in de ruimte kon bestaan. Bovendien was men met de bestaande meetapparatuur voorlopig niet in staat de uiterst summiere kosmische afwijkingen vast te stellen.⁴² De doorbraak kwam in 1916, met de relativiteitstheorie van Albert Einstein. Einstein stelde dat de newtoniaanse wetten niet volstaan voor een accurate beschrijving van het gedrag van hemellichamen. Hij gaf een geheel nieuwe beschrijving van de ruimte, die door de aanwezigheid van massa en energie kan worden gekromd. De aarde, met haar zwakke gravitatieveld, veroorzaakt een nauwelijks waarneembare afwijking van de euclidische ruimte. Sterren zoals onze zon creëren echter een duidelijke kromming in de structuur van de ruimte en verstoren dus haar egaliteit.⁴³

Voor zijn berekeningen maakt Einstein gebruik van Riemann-meetkunde. Wanneer hij zou kunnen laten zien dat deze berekeningen gebruikt kunnen worden voor concrete kosmische voorspellingen, dan kon hij zijn theorie bewijzen. Het bestaan van een universeel euclidische ruimte zou hiermee voor de natuurkunde verworpen zijn. Een eerste bewijs kwam in 1919, toen Arthur Eddington een zonsverduistering aangreep om te meten wat er gebeurt wanneer de lichtstralen afkomstig van sterren de zon rakelings passeren op weg naar onze aardse telescopen. De test was een groot succes: een summier maar meetbaar verschil in de positie van vaste sterren was meetbaar ten opzichte van de gewone nachtelijke momenten waarbij er geen zon nabij is.⁴⁴ Einsteins voorspelling, dat lichtstralen zouden worden gebogen door het gravitatieveld van de zon, leek hiermee bevestigd. Vanaf dit moment wordt in de natuurwetenschap algemeen aanvaard dat de relativiteitstheorie, met de Riemann-geometrie als hulpmiddel, een correcte beschrijving geeft van de werkelijkheid op kosmische schaal. Tot op de dag van vandaag zijn alle verdere waarnemingen in het vakgebied in overeenstemming met de relativiteitstheorie, die

⁴² Hermann von Helmholtz, "The Origin and Meaning of Geometrical Axioms (II)," *Mind* 3.10 (1878), 221.

⁴³ Carnap, *Philosophical Foundations of Physics*, 152.

⁴⁴ Carnap, *Philosophical Foundations of Physics*, 158.

daarom in veler ogen kan wordt beschouwd als een natuurkundig feit.

2.1.5. De argumenten tegen Kants transcendentale ruimte

Pakweg anderhalve eeuw na de publicatie van Kants meesterwerk lijkt een essentieel kernpunt van zijn transcendentale systeem op brute wijze weerlegd door de wetenschap. De komst van de niet-euclidische meetkunde, de inzichtelijkheid ervan en haar toepassing in de zeer succesvolle relativiteitstheorie, dragen allemaal bij aan het beeld dat het kantiaans apriorisme zijn beste tijd heeft gehad.⁴⁵ De vraag is echter: wat zijn de precieze filosofische argumenten vanuit de niet-euclidische meetkunde tegen Kants notie van transcendentale ruimte? De voornaamste filosofische vertegenwoordigers van de idee dat de bovengenoemde ontwikkelingen een weerlegging vormen van Kant zijn Helmholtz en Carnap. Hun kritiek steunt – in lijn met de zojuist geschetste historische ontwikkeling – op drie uitgangspunten:

1. het bestaan van coherente niet-euclidische alternatieven voor de vlakke meetkunde;
2. de mogelijkheid ons de werking van niet-euclidische geometrie voor te stellen;
3. de toepasbaarheid van de niet-euclidische geometrie in de relativiteitstheorie.

Helmholtz (1821-1894) schreef *The Origin and Meaning of Geometrical Axioms* in 1876, ruim voor de opkomst van de relativiteitstheorie, en argumenteert zodoende vanuit de filosofische consequenties van (1) en (2), terwijl hij (3) houdt voor een theoretische mogelijkheid, te bevestigen of ontkrachten door de empirie. Carnap (1891-1970) publiceerde *Philosophical Foundation of Physics* in 1966 en bespreekt met wat meer afstand de implicaties van (3) en (1), terwijl hij (2) onbelangrijk acht voor zijn argumentatie, maar ook afdoende bewezen door Helmholtz. Omdat de auteurs verschillende uitgangspunten hanteren voor hun kritiek op Kant, zal ik de beide argumentaties apart behandelen. Hoe dit verschil in uitgangspunten zijn weerslag heeft op de wijze waarop Kant wordt getroffen en kan worden verdedigd, komt aan de orde na de nu volgende uiteenzetting van de argumenten uit de niet-euclidische meetkunde.

2.2. Helmholtz

Helmholtz opent zijn kritiek aan het adres van Kant met de opmerking dat a priori kennis niet bestaat. Zogeheten aprioristen zien volgens Helmholtz ten onrechte de resultaten van de alledaagse ervaring aan voor noodzakelijkheden in het menselijk

⁴⁵ Jones, “Kant, Euclid and the Non-euclidean,” 138.

denken. De invloed van het constante spervuur van gewaarwordingen vormt echter een afdoende verklaring voor het bestaan van deze zogenaamde a priori denkpatronen. Het is, aldus Helmholtz, in ieder geval niet uit te sluiten dat ons denken niet toch op de een of andere wijze beïnvloed is door de meest algemene resultaten van onze ervaring.⁴⁶

Later nuanceert Helmholtz zijn empiristische uitgangspunt enigszins. Zijn argument zou niet gericht zijn op een notie van ruimte als transcendentale aanschouwingsvorm. Helmholtz' steen des aanstoots is veeleer het idee dat hierin ook de axioma's van de meetkunde kunnen worden gefundeerd. Want wat waarborgt deze stap precies? Kant fundeert zijn bewijs ervoor in de stelling dat de axioma's synthetisch a priori zijn. Dit weerspreekt Helmholtz echter stellig. Het bestaan van meerdere meetkundige systemen laat volgens hem zien dat we geen apriorisme toe kunnen schrijven aan de euclidische axioma's. Helmholtz ziet dit echter eerder als een versterking van het kantiaanse systeem dan een weerlegging. Kant staat zelf vijandig tegenover het bestaan van onnodige metafysica; "his system seems to be freed from inconsistency, and a clearer notion of the nature of intuition is obtained, if the *a priori* origin of the axioms is abandoned, and geometry is regarded as the first and most perfect of the natural sciences".⁴⁷

2.2.1. Argumentatiestructuur

De bewijsvoering van Helmholtz is tweeledig: hij stelt dat een van de pijlers onder Kants speciale plaats van de euclidische meetkunde, het gegeven dat wij ons geen andere geometrie kunnen voorstellen, kan worden verworpen. Hij geeft vervolgens enkele mogelijke manieren om ons niet-euclidische ruimte voor te stellen. Uit deze inzichtelijkheid volgt volgens Helmholtz de mogelijkheid dat niet-euclidische geometrie een beschrijving kan vormen van de werkelijke ruimte. Helmholtz ziet echter een probleem: "The axioms of geometrie (...) constitute a form into which any empirical content whatever will fit (...). This is true, however, not only of Euclid's axioms but also of the axioms of spherical and pseudospherical geometry".⁴⁸ Wanneer we onze wereld beschrijven is het dus altijd dit op zowel euclidische als niet-euclidische wijze te doen, afhankelijk van verdere aannames in onze fysica. We kunnen stellen dat de ruimte noodzakelijk euclidisch van aard is, maar daarvoor hebben we eerst een principe nodig die garandeert dat fysieke objecten niet naargelang hun plek in de ruimte kunnen vervormen (vanaf nu het 'principe van vormbehoud' genoemd). Zonder een dergelijke bijsluiter valt niet zinvol te onderzoeken welke meetkunde de ruimte

⁴⁶ Helmholtz, "The Origin and Meaning," 302.

⁴⁷ Helmholtz, "The Origin and Meaning (II)," 213-214.

⁴⁸ Helmholtz, "The Origin and Meaning," 321.

beschrijft. "As soon as certain principles (...) are conjoined with the axioms of geometry we obtain a system of real import, and which can be verified or overturned by empirical observation".⁴⁹ Met het principe van vormbehoud vervalt dus de transcendentale status van de euclidische axioma's. We kunnen onderzoeken welke van de drie systemen met een constante *measure of curvature* de ruimte beschrijft, zoals Gauss al zei: door het meten van driehoeken. Helmholtz vervolgt: "If such a system were to be taken as a transcendental form (...) there must be assumed a pre-established harmony between form and reality".⁵⁰ Het feit dat er meerdere mogelijke beschrijvingen zijn van de ruimte moet dus leiden tot een verwerping van het idee wij aan onze aanschouwing noodzakelijkheid kunnen toeschrijven.

De drie claims van Helmholtz die ik in de volgende paragrafen zal bespreken, gaan dus als volgt. De belangrijkste is de claim dat wij ons een niet-euclidische ruimte kunnen voorstellen (§2.2.2). De tweede is dat we voor een beschrijving van de ruimte het principe van vormbehoud nodig hebben (§2.2.3). De derde claim is dat wanneer we aan de euclidische axioma's het principe van vormbehoud toevoegen, de kwestie van de ruimte een empirisch vraagstuk wordt (§2.2.4).

2.2.2. Voorstellingen van niet-euclidische ruimte

Kants bewijs voor de noodzakelijke herkomst van de geometrische axioma's uit onze aanschouwing is volgens Helmholtz gebaseerd op het idee dat het onmogelijk is om mentale voorstellingen te vormen van objecten in een ruimte die afwijkt van euclidische meetkunde. Hij wil aantonen dat dit een onjuiste aanname is door te laten zien dat een dergelijke niet-euclidische voorstelling wel degelijk mogelijk is.⁵¹ Helmholtz stelt dat er maar één passende definitie is van 'zich voorstellen' die in deze context van toepassing is, namelijk: "het vermogen om je een hele serie zintuiglijke ervaringen voor de geest te halen die je in een bepaalde situatie zou hebben".⁵²

Hij waarschuwt echter dat het voor de geest halen van een niet-euclidische ruimte niet gemakkelijk zal zijn. We hebben namelijk de taak ons iets voor te stellen dat we nog nooit hebben waargenomen. We zullen ons een niet-euclidische ruimte daarom nooit met eenzelfde snelheid en gemak kunnen inbeelden als onze vertrouwde euclidische omgeving.⁵³ Dit sluit echter de mogelijkheid op een representatie niet uit. Ook geeft hij een analogie met eerdere wetenschappelijke omwentelingen: toen werd

⁴⁹ Helmholtz, "The Origin and Meaning," 321.

⁵⁰ Helmholtz, "The Origin and Meaning (II)," 321.

⁵¹ Helmholtz, "The Origin and Meaning (II)," 212.

⁵² Helmholtz, "The Origin and Meaning," 304.

⁵³ Helmholtz, "The Origin and Meaning (II)," 215.

ontdekt dat de aarde rond was, en om de zon draaide in plaats van de zon om haar, toonde ons menselijk voorstellingsvermogen zich in eerst instantie ook uiterst weerbarstig. Uiteindelijk moeten wij echter toegeven dat het doorzetten van de weinige voorstanders van het onvoorstelbare uiteindelijk heeft geleid tot een beter begrip van de wereld. Ook nu zouden wij er volgens Helmholtz beter aan doen niet koppig te blijven vasthouden aan het idee dat onze huidige representatie van de ruimte is ingegeven door een absolute noodzakelijkheid.⁵⁴

We kunnen ons allereerst voorstellen dat wij platte tweedimensionale wezens zijn, die leven op het oppervlak van een figuur in euclidische ruimte. Hiervoor dienen wij alleen de hoogtedimensie weg te denken uit onze gewaarwording.⁵⁵ Wij zouden onze ruimte in dit geval kenmerken als tweedimensionaal en ons aardoppervlak als plat. Wanneer wij op een euclidische vlakte zouden leven zouden wij terecht de euclidische meetkunde hanteren. Zouden wij ons echter op een sfeer bevinden, dan zouden we al snel uitvinden dat het onmogelijk is om twee oneindige parallelle lijnen te trekken. Bovendien zou iedere driehoek in totaal meer dan 180 graden meten. Ook als tweedimensionale inwoners van een zadelvormige pseudosfeer zouden we een eigen meetkunde opwerpen. We zouden een oneindig aantal parallelle lijnen kunnen trekken voor iedere rechte lijn en het totaal aan graden van de hoeken van een driehoek zou altijd kleiner zijn dan 180.⁵⁶ De kromming van ons oppervlak zouden we door ons gebrek aan een zichtsdimensie echter niet kunnen waarnemen.

Zo kunnen we ons dus voorstellen welke gewaarwordingen wij zouden hebben als tweedimensionale wezens in een niet-euclidische ruimte. Uiteraard wordt ons inzicht in dit gedachte-experiment vergemakkelijkt omdat wij zelf daarnaast een toeschouwerpositie kunnen bekleden vanuit een euclidisch oogpunt. Zouden wij ons eenzelfde voorstelling willen maken van driedimensionale niet-euclidische ruimte dan staan wij echter voor een onmogelijkheid. Een representatie van buitenaf vereist altijd een extra dimensie, zoals we gekromde tweedimensionale meetkunde slechts kunnen voorstellen in driedimensionale euclidische ruimte.⁵⁷ Als inwoners van een driedimensionale ruimte ontberen wij de perceptuele vermogens om ons een dimensie voor te stellen die wij nooit hebben gekend. Een vierde dimensie is tenslotte niet in enige mate inzichtelijk te maken in analogie met onze bestaande drie.⁵⁸ In Helmholtz' definitie van wat het is om een voorstelling te hebben is een archimedisch

⁵⁴ Helmholtz, "The Origin and Meaning (II)," 214.

⁵⁵ Helmholtz, "The Origin and Meaning," 308.

⁵⁶ Helmholtz, "The Origin and Meaning," 311.

⁵⁷ Helmholtz, "The Origin and Meaning," 304.

⁵⁸ Helmholtz, "The Origin and Meaning," 308.

gezichtspunt echter niet nodig. Voor het argument volstaat dat wij ons kunnen indenken welke gewaarwordingen iemand zou hebben in niet-euclidische ruimte.

Volgens Helmholtz kunnen we ons een voorstelling maken van hoe het zou zijn om als een euclidische waarnemer een pseudosferische wereld te beleven. We kunnen ons de pseudosferische ruimte voorstellen als een wereld gezien vanaf het midden van een sfeer, zoals wij zaken zouden waarnemen kijkend door een convexe (bolle) lens of spiegel. Vanuit het midden van deze ruimte zou het ons toeschijnen alsof de meest verafgelegen objecten slechts op een beperkte afstand van ons verwijderd zijn. Wanneer we vanuit het midden van de sfeer naar buiten zouden lopen, zou het lijken alsof de objecten voor ons in de diepte zouden uitdijen en de achterliggende objecten zouden krimpen. Wanneer we twee ogenschijnlijk parallelle rechte lijnen zouden volgen dan zouden we zien dat zij toch in toenemende mate divergeren naarmate we verder naar buiten zouden lopen. Achter ons zouden deze lijnen lijken te convergeren, zonder echter ooit tot daadwerkelijke intersectie te komen.⁵⁹

Het tegenovergestelde effect zou worden bewerkstelligd wanneer men een sferische wereld zou betreden. Meer afgelegen objecten zouden verder weg lijken en groter dan ze daadwerkelijk zijn. We zouden ze daarom sneller dan verwacht tegenkomen als we erop af zouden lopen. De meest verafgelegen objecten zouden flink uitdijen, en daarom een uitgestrekte en vertroebelde indruk maken. Aangezien de zichtlijnen in een sfeer - evenals de meridianen op een bol - oneindig zouden kunnen blijven circuleren, zouden wij een constant zicht hebben op de achterkant van ons hoofd, dat over de horizon zou zijn uitgesmeerd.⁶⁰

We kunnen ons de hierboven beschreven voorstellingen in sferische en pseudosferische ruimte dus uitstekend voor de geest halen. Sterker nog, er is geen wezenlijk verschil met het kijken door een speciale bril of prisma. In eerst instantie zouden we verward raken door de indrukken, maar we weten dat het netvlies zich kan aanpassen aan een nieuwe ruimte, zoals het zich ook kan aanpassen wanneer mensen zich een nieuwe bril laten aanmeten. Na enige tijd met deze extreme sferische of pseudosferische bril rond te hebben gelopen, zou de illusie verdwijnen en zouden we de afstanden weer correct kunnen inschatten.⁶¹

Helmholtz stelt hiermee te hebben laten zien dat wij ons met behulp van de gekende wetten der optica goed kunnen voorstellen hoe een niet-euclidische ruimte

⁵⁹ Helmholtz, "The Origin and Meaning," 317.

⁶⁰ Helmholtz, "The Origin and Meaning," 318.

⁶¹ Helmholtz, "The Origin and Meaning," 317.

zou inwerken op ons gezichtsvermogen. Hij stelt vast dat wij daarom niet zijn gebonden aan een vaste manier van waarnemen, en dat de axioma's van de meetkunde op geen enkele manier afhangen van een oorspronkelijke vorm van onze perceptuele vermogens.⁶²

2.2.3. Het principe van vormbehoud

Met een kleine aanpassing aan het zojuist doorlopen gedachte-experiment kunnen we volgens Helmholtz inzien dat het toch mogelijk is om een niet-euclidische ruimte euclidisch te beschrijven, en andersom. We zullen zien dat de mogelijkheid om de ruimte van een eenduidige beschrijving te voorzien, afhangt van onze keuze in fysische basisprincipes.

Helmholtz stelt voor even aan te nemen dat de wereld zoals waargenomen in een bolle spiegel een echte niet-euclidische wereld betreft.⁶³ De spiegelwereld kent een vervlakking in de derde dimensie, objecten in de verte zijn veel kleiner en platter dan objecten die vlak voor de spiegel zijn gepositioneerd. Toch blijven onze rechte lijnen ook voor deze spiegelwereld recht, hoewel ze er voor ons krom uit zien. De meetlat in de spiegelwereld zou namelijk meekrimpen en uitzetten met de rest van het universum en daarom zouden onze spiegelbeelden dezelfde meetkundige bevindingen doen als wijzelf hier. Het betreft hier tenslotte een spiegelbeeld. Het is voor de bewoner van de spiegel onmogelijk om in te zien dat zijn wereld verwrongen is, en die van ons recht.⁶⁴

Zolang wij aannemen dat objecten in de spiegelwereld geen vaste vorm hebben, kunnen wij vaststellen dat beide werelden door euclidische wetten bepaald worden, aangezien meten in de wereld vóór de spiegel dezelfde resultaten op zou leveren als in de spiegelwereld. Wanneer wij ons echter voorstellen dat we niet weten welke natuurwetten er gelden in de beide werelden aan weerszijden van de spiegel, dan zouden wij er niet achter kunnen komen wiens wereld door welke principes wordt geregeerd, laat staan welke wereld de echte is. Net zoals het mogelijk is de spiegelwereld te beschrijven in euclidische termen, zou men onze wereld vanuit de spiegel kunnen beschrijven in niet-euclidische termen. Alleen zouden zij dan nu van onze wereld aannemen dat er iets vreemds aan de hand is met de vorm van objecten.⁶⁵ Dit alles onderschrijft volgens Helmholtz het belang van de fysische principes voor de meetkunde. We kunnen ons niet betekenisvol afvragen wat de aard is van de ruimte zonder een uitspraak te doen over de vormvastheid van objecten,

⁶² Helmholtz, "The Origin and Meaning," 319.

⁶³ Helmholtz, "The Origin and Meaning," 316.

⁶⁴ Helmholtz, "The Origin and Meaning," 315-316.

⁶⁵ Helmholtz, "The Origin and Meaning," 316.

omdat we ons anders altijd een onoplosbaar conflict met een spiegelwereld kunnen voorstellen.⁶⁶ Alleen wanneer we zouden kunnen vaststellen dat de objecten in de spiegelwereld net zoals onze objecten onvervormbaar zijn, kunnen wij besluiten dat de spiegelwereld verwrongen wordt door de bolheid van de spiegel zelf of een in de spiegel aanwezige niet-euclidische ruimte.

Het probleem met de spiegelwereld is voor Helmholtz echter eenvoudig op te lossen. We hebben namelijk goede redenen om het principe van vormbehoud aan te nemen, omdat wij weten dat objecten in onze ruimte niet in vorm variabel zijn. Voor het doen van geometrie is het noodzakelijk metingen te verrichten in de wereld. Dit is een onzinnige bezigheid wanneer objecten van vorm veranderen naargelang hun plaats in de ruimte verschilt. Helmholtz herinnert ons eraan dat we rechtheid van lijnen afmeten aan lichtstralen, die in onze ervaring de meest rechte lijn tussen twee punten vormen (in jargon heet dat geodetisch).⁶⁷ Onze belangrijkste methode voor metingen wordt gevormd door zichtlijnen, en ons optische gestel is ons belangrijkste meetinstrument. We weten uit ervaring dat ons eigen lichaam niet van vorm verandert naargelang het zich door de ruimte zou verplaatsen, en dus kunnen we vaststellen dat ons optische systeem een betrouwbaar meetinstrument is voor het werken met lichtstralen. Als ons lichaam toch variabel van vorm zou zijn, zouden wij echter geen enkele manier meer hebben om te meten aan welke axioma's onze ruimte gehoorzaamt.⁶⁸ Daarom kunnen en moeten wij het principe van vormbehoud aannemen als uitgangspunt voor onze verdere discussie.

2.2.4. De kwestie van de ruimte als empirisch probleem

Pas wanneer we de axioma's van de geometrie samenvoegen met het principe van vormbehoud, hebben wij zoals we zagen een beschrijving van de ruimte die we op betekenisvolle wijze kunnen toetsen. We hebben nu, kortom, de mogelijkheid om te bepalen welke meetkundige axioma's op de ruimte van toepassing zijn. De vraag is nu: zijn deze axioma's euclidisch of niet? We zagen al dat Gauss een methode in gedachten had om door het meten van optische driehoeken te bepalen welke waarde voor *measure of curvature* de ruimte heeft. Deze uitkomst bepaalt welke geometrie voor de ruimte geldt: alleen de waarde van nul garandeert ons een euclidische opmaak. Helmholtz benadrukt dat dit een empirische kwestie is, die niet vooraf op transcendentale wijze kan worden besloten omdat ook het broodnodige onderliggende principe voor het doen van metingen uit de empirie afkomstig is. We weten tenslotte

⁶⁶ Helmholtz, "The Origin and Meaning," 316.

⁶⁷ Helmholtz, "The Origin and Meaning," 314.

⁶⁸ Helmholtz, "The Origin and Meaning," 315.

uit de ervaring dat onze eigen lichamen niet vervormbaar.⁶⁹

Er resten voor de kantiaan nu nog twee opties wanneer hij, naast het gegeven dat de aard van de ruimte empirisch toegankelijk is, wil blijven vasthouden aan euclidische ruimte als zuivere aanschouwingsvorm. De eerste is dat ook de empirisch gemeten ruimte blijkt te gehoorzamen aan de euclidische principes. Nu de fysieke metingen met de kantiaanse opmaak overeenkomen, is de transcendentale hypothese echter volkomen onnodig. De enige manier om vol te houden dat er sprake is van een betekenisvolle aanschouwingsvorm, is wanneer Kant zou willen verdedigen dat er een vooraf ingestelde harmonie bestaat tussen onze aanschouwing en de werkelijkheid.⁷⁰ Hiermee zou de aanschouwingsvorm weer een gezaghebbend principe zijn. Een dergelijke harmonie zou Kant echter nooit willen verdedigen: we zagen in §1.2 al dat het ontbreken van een grond waarop wij een dergelijke harmonie filosofisch kunnen vaststellen juist de belangrijkste aanleiding vormde voor de copernicaanse wending.

Ook wanneer de resultaten van de pure meetkunde niet overeen zouden komen met metingen in de fysieke wereld, ontstaat er een probleem voor Kant. Stel dat na zorgvuldig meten ontdekt wordt dat onze ruimte pseudosferisch van aard is. Wat moeten wij nu met onze zuivere euclidische aanschouwing? We zagen dat wie opgegroeid is in onze euclidische ruimte bij het betreden van sferische of pseudosferische ruimte in eerst instantie allerlei vreemde optische malversaties zou tegenkomen. Na een tijd zou het gezichtsvermogen gewend raken aan de nieuwe wereld, en zouden inschattingen weer normaliseren. Het is dus best mogelijk dat wij ondanks onze euclidische aanschouwingsvorm toch in een pseudosferische ruimte leven. De pure geometrie kan ons hier een valse weerspiegeling geven van de fysieke werkelijkheid. In dit geval zouden wij haar als zodanig moeten ontmaskeren, en accepteren dat zij geen basis kan vormen voor onze kennis van de wereld.⁷¹

2.2.5. Conclusie

Volgens Helmholtz vormt onze alledaagse ervaring dat objecten vormvast zijn uiteindelijk onbewust de voornaamste reden waarom Kant de vlakke ruimte aanneemt als een noodzakelijk gegeven. Dit leidde hem vervolgens tot de verwerping van alle ruimtelijke voorstellingen die ermee in conflict zijn. Helmholtz heeft echter vast kunnen stellen dat deze kennis indirect gewoon empirisch verworven is, verkregen via de dagelijkse impressies van de buitenwereld op onze zintuigen. Het kantiaanse idee van een transcendentale vorm die gegeven is vóór de ervaring is een uitstekend

⁶⁹ Helmholtz, "The Origin and Meaning (II)," 218-219.

⁷⁰ Helmholtz, "The Origin and Meaning (II)," 225.

⁷¹ Helmholtz, "The Origin and Meaning (II)," 220-221.

verklaarbare misvatting.⁷²

2.3. Carnap

2.3.1. Argumentatiestructuur

De argumentatie van Carnap kent een zekere overlap met de hierboven gegeven beschouwing van Helmholtz. Carnap formuleert echter zijn twee argumenten op een nietsontziende wijze. Hij begint met een uitgebreide uiteenzetting van de redenen waarom de niet-euclidische meetkunde essentieel is voor een accurate beschrijving van de wereld in de relativiteitstheorie. Deze komt deels overeen met het historisch overzicht aan het begin van dit hoofdstuk. Hij stelt daarna in tegenstelling tot Helmholtz - die de ontdekkingen in de moderne natuurkunde niet meer meemaakte - dat de werkelijke aard van de ruimte niet-euclidisch is. Zijn tweede argument is de stelling dat een meetkundige propositie überhaupt onmogelijk zowel a priori als synthetisch kan zijn, en dat Kant dus een incoherente notie bezigt. Hiervoor heeft hij slechts het gegeven nodig dat er andere meetkundige systemen bestaan dan dat van Euclides. De voorstelbaarheid van de niet-euclidische systemen vindt Carnap onbelangrijk, maar acht hij voldoende bewezen door Helmholtz. De redenen hiervoor zullen aan bod komen.

Carnap verdedigt dus twee stellingen, die wij hieronder zullen bespreken. Allereerst stelt hij dat uit natuurkundig onderzoek is gebleken dat de werkelijke ruimte niet-euclidisch is (2.3.2). Het tweede argument ontkent de mogelijkheid dat de zogeheten pure meetkunde zowel synthetisch als a priori kan zijn, op grond van het nieuwe onderscheid tussen analytische en fysische geometrie.

2.3.2. De werkelijke ruimte is niet-euclidisch

Net als Helmholtz ziet Carnap in de komst van de niet-euclidische meetkunde een probleem voor de a priori status van de meetkunde. Sterker nog: een van de redenen waarom we pas zo laat hebben ingezien dat het parallellenpostulaat los staat van de rest van de euclidische axioma's, is dat men zo lang bleef volharden in het zoeken van meetkundige oplossingen in onze intuïtieve aanschouwing. Voor Kant was het uittekenen van meetkundige constructen in diagrammen slechts een fysisch hulpmiddel voor onze zuivere aanschouwing. Deze laatste kon meetkundig gezien geen fouten maken en is daarmee gezaghebbend voor onze geometrische inzichten.⁷³ De axioma's van Euclides zijn volgens Kant door een redelijk mens niet te ontkennen, onmiddellijk inzichtelijk en behoren tot de meest zuivere wetenschap. Carnap stelt dat

⁷² Helmholtz, "The Origin and Meaning," 320.

⁷³ Carnap, *Philosophical Foundations of Physics*, 126.

de komst van de analytische geometrie echter onomstotelijk heeft bewezen dat het parallellenpostulaat onafhankelijk is van de rest van Euclides' uitgangspunten. De met onze intuïtie botsende niet-euclidische systemen zijn volgens Carnap echter meer dan onschuldige *logic games*. Zij schuiven ons de taak in de schoenen om uit te zoeken welke meetkunde waar is.⁷⁴ Carnap bedoelt hiermee: de enige meetkunde die waar is, is de meetkunde die onze ruimte beschrijft.

We zagen al dat het totaal aantal graden van de hoeken van een driehoek ons kan vertellen welke meetkunde in onze ruimte van toepassing is. Uit Helmholtz' voorbeeld van de spiegelwereld (§2.2.3) kunnen we echter opmaken dat het áltijd mogelijk is de ruimte euclidisch te beschrijven als we bereid zijn te sleutelen aan onze fysische wetten. De Franse wiskundige en wetenschapsfilosoof Henri Poincaré nam dit punt van Helmholtz over, en ontwikkelde hieruit zijn wetenschappelijk 'conventionalisme'. Hij stelde dat we in de wetenschap altijd meerdere opties hebben voor een beschrijving van de werkelijkheid. Wanneer wij een niet-euclidische ruimtekromming vaststellen, hebben we dus altijd een keuze: ofwel we accepteren niet-euclidische meetkunde en hoeven niet te sleutelen aan de reeds bestaande natuurwetten, ofwel we accepteren de noodzaak tot nieuwe natuurwetten en kunnen verder met euclidische meetkunde.⁷⁵ Wanneer wij echter weigeren ergens in ons systeem een hypothese als vooronderstelling te nemen, dan kunnen wij – zoals we al zagen bij Helmholtz – niet zinvol praten over de structuur van onze ruimte. Dit volgt uit het feit dat we haar niet objectief kunnen representeren als ingebed in een vierdimensionale ruimte, tezamen met het geven dat er minstens twee perfect equivalente theorieën zijn om haar te beschrijven.⁷⁶

Poincaré, die zijn conventionalisme ontwikkelde vlak voor het uitkomen van de relativiteitstheorie, stelde dat we omwille van inzichtelijkheid en eenvoud altijd zouden kiezen voor een systeem waarin euclidische meetkunde behouden wordt.⁷⁷ Carnap onderschrijft de equivalentie van de genoemde theorieën, maar weerspreekt het idee dat euclidische meetkunde een streepje voor heeft. De komst van de algemene relativiteitstheorie is voor Carnaps argumentatie van doorslaggevend belang. Zeer kortweg stelde Einstein hier dat de structuur van onze ruimte wordt bepaald door een oneindig aantal gravitatievelden, die ontstaan door de aanwezigheid van objecten zoals hemellichamen. Rondom de aarde is deze afwijking zo zwak dat zij destijds zelfs met de beste meetapparatuur niet kon worden waargenomen. Carnap bevestigt het idee dat er nog altijd een equivalente theorie mogelijk was waarin de ruimte in

⁷⁴ Carnap, *Philosophical Foundations of Physics*, 130.

⁷⁵ Carnap, *Philosophical Foundations of Physics*, 144-145.

⁷⁶ Carnap, *Philosophical Foundations of Physics*, 171.

⁷⁷ Carnap, *Philosophical Foundations of Physics*, 145.

euclidische termen zou worden beschreven. Einstein had destijds echter goede redenen om dit niet te doen.

Hoewel Carnap Poincaré's uitgangspunten accepteert wil hij niet zo ver gaan om diens conventionalisme te omarmen. Hij stelt dat de keuze voor een conventionele wetenschappelijke maat alleen initieel is. Na onze keuze kunnen wij de natuurkunde omarmen als een discipline waaraan objectieve kennis van de natuur ontspringt. In de fysica wordt de lichtstraal sinds jaar en dag beschouwd als geodetisch, ofwel recht. Reden hiervoor is, zoals Helmholtz al vaststelde, het gegeven dat ons lichaam niet vervormbaar is. Daardoor kunnen we optisch, – en dus empirisch – vaststellen wat de aard van de ruimte is.⁷⁸ Uit het experiment van Eddington bleek dat het licht rondom de zon afbuigt van zijn gebruikelijke rechte baan. Aangezien de lichtstraal geodetisch is, kunnen we vaststellen dat de afbuiging slechts verklaarbaar kan zijn met de gekromde ruimte rondom de zon.

Het probleem van het conventionalisme is hiermee nog niet opgelost. Carnap is zich echter terdege bewust van de wankele grondslag die het principe van vormbehoud geeft voor de zwaarwegende ontologische aanspraken van de relativiteitstheorie. Hij werpt nog een tweede uitgangspunt op als ondersteuning: de keuze voor de relativiteitstheorie is gebaseerd op de 'simpliciteit van het totale fysische systeem' die met deze keuze zou ontstaan.⁷⁹ Carnap neemt aan dat binnen de natuurkunde het eenvoudigste systeem de voorkeur verdient boven andere. Hij accepteert hiervoor Reichenbachs principe dat universele effecten, die overal in het universum op een gelijke mate geldig zijn, altijd omschreven kunnen worden naar differentiële effecten, die een begrensde werking hebben en daarom niet zomaar kunnen worden omschreven.⁸⁰ We kunnen de ruimte na de relativiteitstheorie nog altijd beschrijven middels het universele effect van de euclidische ruimte, maar dit zou grondige aanpassing vergen in onze gekende wetmatigheden van bijvoorbeeld lichtstralen en planeetbanen. We kunnen dezelfde ruimte echter ook niet-euclidisch beschrijven en onze gekende wetten der fysica behouden. We houden met het wegschrijven van de universele euclidische ruimte een overzichtelijker systeem van differentiële, waarmee de simpliciteit van onze fysica kan wordt gegarandeerd. Carnap erkent dat er zonder het aannemen van een stelregel als die van Reichenbach geen antwoord mogelijk is op de vraag wat de structuur is van de ruimte. Hij accepteert Reichenbachs principe echter als geldig en concludeert daarom: de ruimte is niet-euclidisch.⁸¹

⁷⁸ Carnap, *Philosophical Foundations of Physics*, 160.

⁷⁹ Carnap, *Philosophical Foundations of Physics*, 168.

⁸⁰ Carnap, *Philosophical Foundations of Physics*, 170-171.

⁸¹ Carnap, *Philosophical Foundations of Physics*, 171.

Carnap verzet zich tegen de mogelijke kantiaanse objectie dat de moderne natuurwetenschap, aangezien zij zich louter hult in algebraïsche spreuken, helemaal geen beschrijving meer kan vormen van de wereld. De algebra van de analytische geometrie geeft volgens Carnap juist wel degelijk een fysische beschrijving van de werkelijkheid.⁸² Wanneer wij onze wereld vierdimensionaal zouden kunnen waarnemen, zouden wij zien dat lichtstralen gebogen worden door de ruimte, die echt gekromd is. Dat wij ons hier geen voorstelling van kunnen maken, is in zijn ogen geen goed argument. Waarom zou een fysische beschrijving van de wereld worden belemmerd door onze psychische vermogens? De mathematische modellen van de geometrie en de relativiteitstheorie kunnen heel goed een accurate beschrijving geven van de werkelijkheid, al laat ons voorstellingsvermogen ons bij het bestuderen van bijvoorbeeld Minowski-diagrammen in de steek. Onze behoefte aan intuïtieve modellen zit een goed begrip van de moderne natuurwetenschap in dit geval alleen maar in de weg. Bovendien stelt Carnap vast dat zelfs als onmiddellijke inzichtelijkheid wordt meegewogen in de natuurwetenschap, de gedachte-experimenten van Helmholtz een afdoende voorstelling zouden geven van niet-euclidische ruimte.⁸³ Daarom kunnen we Kants idee van transcendentale euclidische ruimte als verworpen beschouwen. Het idee dat de ruimte slechts euclidisch van aard kan zijn, is ontkracht door voortschrijdend inzicht in de natuurwetenschap.

2.3.3. Geen enkele meetkunde kan zowel synthetisch als a priori zijn

Het tweede argument van Carnap is gebaseerd op het eenvoudige feit dat er niet-euclidische meetkunde bestaat die op analytische wijze tot stand is gekomen. De conjunctie van zekere en betekenisvolle kennis, samenkomend in Kants contradictoire notie van meetkunde als synthetisch a priori, staat hiermee op de tocht. Carnap definieert Kants onderscheidingen tussen oordelen als volgt: analytische uitspraken behelzen niets meer dan de betekenis en relaties van de termen, terwijl synthetische uitspraken ons iets vertellen over de wereld.⁸⁴ A priori uitspraken vereisen geen verwijzing naar de ervaring, er hoeft niets in de wereld te zijn wat hen waar maakt. Bij a posteriori kennis is dit wel nodig. Kants positie kunnen we aldus samenvatten: geometrie is onafhankelijk van de ervaring waar (we kunnen ons niets anders voorstellen dan de axioma's), en beschrijft tegelijkertijd de structuur van de werkelijkheid.⁸⁵

Volgens Carnap is het niet onlogisch dat Kant destijds koos voor een dergelijke

⁸² Carnap, *Philosophical Foundations of Physics*, 167.

⁸³ Carnap, *Philosophical Foundations of Physics*, 172.

⁸⁴ Carnap, *Philosophical Foundations of Physics*, 178.

⁸⁵ Carnap, *Philosophical Foundations of Physics*, 180.

typering van de meetkunde: er bestond simpelweg maar één meetkunde en deze was voor zover men wist ook toepasbaar op de wereld. Wat Kant niet kon weten is dat met de komst van de niet-euclidische meetkunde een verschil zou ontstaan tussen analytische en fysische geometrie. Aangezien analytische geometrie zich slechts bezighoudt met de logische samenhang tussen de verschillende elementen, kunnen wij deze discipline terecht typeren als a priori. Daarnaast bestaat er nog fysische geometrie: uitgangspunten in deze meetkunde zijn echte punten in de fysieke ruimte, waarop wij berekeningen kunnen loslaten.⁸⁶ Deze geometrie is synthetisch, zij gaat duidelijk over de wereld. Sterker nog, haar taak is te beslissen welke van de analytische mathematische constructen van toepassing is op de wereld. Wanneer we nu zeggen dat euclidische meetkunde a priori zeker is omdat er geen ruimte is om te twijfelen aan de houdbaarheid van de axioma's, dan is dit correct voor analytische geometrie. Wanneer we hieraan toevoegen dat deze meetkunde ook synthetisch is, en dus iets zegt over de wereld, dan hebben we het over de fysische geometrie. Maar fysische geometrie is nooit a priori zeker, aangezien de daadwerkelijke ruimte eerst onderzocht moet worden. Er bestaat dus geen meetkundige methode die zowel a priori als synthetische kennis oplevert. Sterker nog: als we empirisme accepteren bestaat er überhaupt geen a priori kennis, omdat kennis altijd over de wereld moet gaan. Carnap besluit, in de woorden van Einstein: "As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain, as far as they are certain, they do not refer to reality."⁸⁷

⁸⁶ Carnap, *Philosophical Foundations of Physics*, 181.

⁸⁷ Carnap, *Philosophical Foundations of Physics*, 183.

3. Afweging

3.1. Opzet

Nu alle voor- en tegenargumenten in de kwestie van de transcendentale ruimte op tafel liggen is het tijd om de balans op te maken: geeft het argument van niet-euclidisch meetkunde voldoende reden voor een verwerping van Kants ruimte als zuivere aanschouwingsvorm?

Bij wijze van startpunt zal ik de tegenargumenten van Helmholtz en Carnap steeds eerst onderbrengen in een argumentatieschema, zodat met meer precisie vastgesteld kan worden welke premissen cruciaal zijn voor een verwerping van Kant. Daarna zal ik bekijken of de argumentatie geldig is en of de premissen voldoende krachtig zijn om te fungeren als basis voor de argumentatie. Naast de vraag waar Kants filosofie precies geraakt wordt door de tegenargumenten zal ook een beschouwing worden gegeven van de respectievelijke filosofische uitgangspunten van Helmholtz en Carnap, en de implicaties daarvan voor de kracht van hun beider argumentaties (dit alles in respectievelijk §3.2 en §3.3). Ik zal eindigen met een beschouwing van de problemen die ontstaan bij het vaststellen van de aard van de ruimte, en onderzoeken of een definitieve oplossing hier mogelijk is (§3.4).

3.2. Helmholtz' argumentatie

De argumentatiestructuur van Helmholtz ontspringt op elegante wijze uit de overtuiging dat de voorstelbaarheid van niet-euclidische meetkunde kan worden vastgesteld. Aangezien de ruimte nu op rechtmatige wijze in meerdere equivalente theorieën kan worden beschreven, kan Helmholtz concluderen dat de axioma's van de euclidische meetkunde op zichzelf nooit kunnen dienen als een beschrijving van de ruimte. Dit leidt hem tot de conclusie dat aan de euclidische axioma's, zelfs als zij de meest adequate beschrijving van de ruimte zouden zijn, nooit een transcendentale rol kan worden toegeschreven. Wanneer het ondersteunende principe van vormbehoud wordt toegevoegd, resteert een empirisch probleem en spelen transcendentale overwegingen geen rol van betekenis meer als basis voor onze kennis. We kunnen dit alles vastleggen in het volgende schema:

- P1: Kant stelt dat wij ons geen andere ruimte kunnen voorstellen dan diegene waarin de euclidische meetkunde geldt.
- P2: Als we ons geen andere ruimte kunnen voorstellen, dan is er slechts één meetkunde die van toepassing kan zijn op de ruimte.

P3: We kunnen ons echter een ruimte voorstellen die zich volgens niet-euclidische principes gedraagt.

C1: Het is niet zo dat er slechts één meetkunde van toepassing kan zijn op de ruimte.

P4: Als C1, dan is het altijd mogelijk om iedere ruimte op zowel euclidische als niet-euclidische wijze te beschrijven, afhankelijk van de fysische principes die we accepteren.

P5: Als het mogelijk is om ruimte op meerdere manieren te beschrijven dan zijn de euclidische axioma's op zichzelf betekenisloos en kunnen wij ze niet langer accepteren als transcendentale beschrijving van de ruimte.

C2: We kunnen de euclidische axioma's op zichzelf niet accepteren als transcendentale beschrijving van de aard van de ruimte.

P6: Als C2, dan kunnen we pas vaststellen welke meetkunde de ruimte beschrijft wanneer we een fysisch principe zoals dat van vormbehoud accepteren.

P7: Zodra we een fysisch principe accepteren, kunnen we op empirische wijze onderzoeken welke meetkunde op onze ruimte van toepassing is.

P8: Als de gevolgtrekkingen van P6 en P7 correct zijn, dan is de idee van euclidische ruimte als zuivere aanschouwingsvorm overbodig.

P9: Als de idee van euclidische ruimte op grond van de empirische alternatieven overbodig is, en we zouden er toch aan blijven vasthouden, dan moeten wij ofwel een vooraf ingestelde harmonie veronderstellen tussen zuivere aanschouwing en werkelijkheid, ofwel accepteren dat de beide methoden conflicteren. Beide gevolgen zijn voor Kant onwenselijk.

C3: De kwestie van de aard van de ruimte is empirisch op te lossen. Dit maakt de idee van ruimte als zuivere aanschouwingsvorm ofwel overbodig, ofwel onwenselijk.

Na de nodige opschoning kan de argumentatie van Helmholtz beschouwd worden als helder, en geldig in logische opmaak. Iedere stap volgt netjes uit de vorige en de conclusies zijn daarom gerechtvaardigd. Om te zien of de conclusies van Helmholtz ook overtuigend zijn, zullen wij de kracht van de afzonderlijke premissen aan een kritisch onderzoek moeten onderwerpen.

3.2.1. Het cruciale argument van de voorstelbaarheid

Zoals we eerder konden vaststellen, staat of valt de argumentatie van Helmholtz met premisse P3: de voorstelbaarheid van niet-euclidische ruimte. Deze vormt de voorwaarde voor conclusie C1, die op haar beurt weer via de tussenliggende premissen een voorwaarde vormt voor conclusie C2. De stap naar conclusie C3 is alleen te maken onder voorwaarde van C2.

De argumentatie zou Kant als volgt kunnen raken. De eerste twee argumenten van Kant voor de transcendentale ruimte, waarin wordt gesteld dat de ruimte niet empirisch kan zijn (§1.3.1), zouden worden verworpen door de conclusie C3. Als de ruimte ook empirisch te onderzoeken is, kunnen we niet redelijkerwijs blijven vasthouden aan ruimte als zuivere aanschouwingsvorm die voorafgaat aan de empirie. De empirische ruimte vormt dan een meer begrijpelijke en bovendien beter te controleren rechtvaardiging. Premisse P3 is nog op een andere wijze cruciaal. Zij vormt namelijk op zichzelf ook een doorslaggevend argument tegen Kants notie van ruimte als zuivere aanschouwingsvorm. Kant heeft de unieke euclidische opmaak van de ruimte nodig voor zijn argumenten tegen ruimte als Leibniziaans concept (§1.3.2). Hij stelt hier dat de ruimte een gelijkmatige oneindige eenheid zou moeten vormen, hetgeen bijzonder implausibel zou worden in het licht van de niet-euclidische alternatieven. Belangrijker nog zijn de consequenties voor Kants laatste argument, van de meetkunde als synthetisch a priori (§1.3.4). Wanneer het mogelijk is dat de ruimte een concept is, dan is het ook mogelijk dat de meetkunde geen synthetische maar een analytische wetenschap is, waarin slechts wordt verklaard wat al in de euclidische axioma's besloten ligt. Ten slotte treft de niet-euclidische meetkunde Kants filosofie ook in brede zin. Mocht de euclidische ruimte als enige voorstelbare ruimte wegvallen, dan verdwijnt ook de garantie op een objectief kenbare natuur. Het contingente gat in onze aanschouwing zal iedere noodzaak in onze kijk op de wereld wegnemen, vooral wanneer we ons realiseren dat de kantiaanse argumenten voor transcendentale tijd op eenzelfde wijze tot stand kwamen en dus ook vatbaar worden voor de empiristische kritiek.

Kortom: als Helmholtz de inzichtelijkheid van niet-euclidische ruimte kan bewijzen, zou Kants transcendentale filosofie fataal getroffen worden. De vraag is dus: kunnen we de cruciale premisse P3 onderschrijven? Zijn de gedachte-experimenten van Helmholtz overtuigend genoeg om te stellen dat we ons niet-euclidische ruimte kunnen voorstellen?

3.2.2. Is niet-euclidische ruimte voorstelbaar?

Over de tweedimensionale constructen kunnen we kort zijn. Hoewel Helmholtz stelt

dat het eenvoudig is een dimensie uit onze perceptie weg te denken, is het betwifelbaar of wij ons zinvol kunnen indenken hoe de belevingswereld van een tweedimensionaal wezen eruit zou zien. Dit experiment vormt hoogstens een gemankeerde analogie met de wijze waarop een driedimensionale niet-euclidische ruimte begrepen zou kunnen worden. Het feit dat de tweedimensionale werelden door Helmholtz slechts voorstelbaar kunnen worden gemaakt in een euclidische ruimte (door ze te representeren op een euclidische bol of zadel in de vlakke ruimte) vormt echter eerder een bevestiging van het kantiaanse idee dat we ruimte het beste kunnen zien als een noodzakelijke aanschouwingsvorm, dan een verwerping ervan.

Helmholtz onderschrijft dit probleem zelf ook. Hij geeft toe dat een objectieve voorstelling van driedimensionale niet-euclidische ruimte alleen mogelijk is door wezens begiftigd met een vierdimensionale opmaak.⁸⁸ Helmholtz stelt echter dat wij de ruimte helemaal niet van buitenaf hoeven te representeren. Hij geeft een heel andere definitie van 'je een voorstelling maken' namelijk: "het vermogen om je de hele serie zintuiglijke ervaringen voor de geest te halen die je in een bepaalde situatie zou hebben".⁸⁹ We zullen niet verder op de precieze voorstellingen ingaan. Helmholtz was een expert op het gebied van de optica, en er is nooit een fatale fout aangetoond in zijn gedachte-experiment. Ik zal het daarom beschouwen als een correcte weergave van de eersteperoons voorstellingen die wij in niet-euclidische ruimte zouden hebben. Zodoende kunnen we accepteren dat Helmholtz volgens zijn eigen definitie inzichtelijk heeft gemaakt hoe wij ons niet-euclidische meetkunde kunnen voorstellen.

Toch rijst het vermoeden dat Helmholtz' wijze van voorstellen niet de juiste is voor een verwerping van het kantiaanse project. Helmholtz geeft weliswaar een idee van enkele mogelijke zintuiglijke impressies van niet-euclidische ruimte. Hij maakt daarmee echter niet inzichtelijk hoe een dergelijke ruimte zou functioneren en op welke wijze zij zou resulteren in het door Helmholtz geschetste gezichtsbedrog. Wanneer we stilstaan midden in het centrum van een sferische of pseudosferische ruimte zien we de wereld misschien zoals beschreven in de gedachte-experimenten, maar wat gebeurt er wanneer we ons niet middenin zouden bevinden en niet alleen maar rechtuit zouden kijken? Hoe moeten we ons bewegen in deze niet-euclidische ruimte überhaupt voorstellen? Kunnen we door ruimtekromming heen lopen? Welk effect heeft de kromming op ons bewegen, en op het bewegen van de aarde? Op welke wijze bevindt de aarde zich in een gekromde ruimtetijd? Op dit soort vragen geeft Helmholtz geen antwoord en evenmin bieden zijn opmerkingen een

⁸⁸ Helmholtz, "The Origin and Meaning," 319.

⁸⁹ Helmholtz, "The Origin and Meaning," 304.

aanknopingspunt voor enige inzichtelijkheid. Voor een échte voorstelling van de niet-euclidisch ruimte hebben we dus toch het soort voorstelling nodig die we volgens Helmholtz niet bezitten: een aanschouwing in vier dimensies waarin wij onze ruimte modelleren. Helmholtz velt nu zijn eigen vonnis: "If we should define thus: 'Nothing is to be held as imaginable in space, of which we cannot actually construct a model with existing bodies,' – all discussion of the question in dispute is, no doubt, cut short."⁹⁰ Dit is echter precies het soort voortstelling dat we nodig hebben voor inzicht in de werking van niet-euclidische ruimte.

Dit kunnen we inzien wanneer we teruggaan naar de kantiaanse argumentatie voor transcendentale ruimte. Als ruimte een aanschouwingsvorm is dan moet deze volgens Kant vaststaan, zij mag niet afhankelijk zijn van de ervaring maar dient hieraan vooraf te gaan. Het betreft hier een zuivere aanschouwingsvorm, die ook geldt als er geen verdere objecten in de ruimte zouden bestaan.⁹¹ We dienen ons de ruimte als een egaal en in principe oneindig ding voor te stellen, maar bovenal: we dienen in de ruimte meetkundige problemen te kunnen definiëren en oplossen. Hiervoor hebben wij een algemeen beeld nodig van onze ruimte. Kant vraagt ons niet simpelweg de ruimte te aanschouwen door onze ogen open te doen en rond te lopen, hij vraagt ons de ruimte als een geheel voor te stellen, en erover na te denken wat haar eigenschappen zijn.⁹² Natuurlijk kunnen we ons voorstellen hoe we de wereld waarnemen door afwijkende lenzen, maar daarmee hebben we ons geen voorstellingen gemaakt van hoe deze ruimte er echt uit zou zien. Pas wanneer we in de buurt komen van een antwoord op vragen aangaande de werking van ruimtekromming kan men beweren dat niet-euclidische ruimte inzichtelijk zou kunnen zijn.

3.2.3. Conclusie

Hoewel we Helmholtz' weergave van de impressies in een sferische en pseudosferische ruimte kunnen onderschrijven, vormt het geheel onvoldoende aanknopingspunt om in kantiaanse zin een niet-euclidische ruimte inzichtelijk te hebben gemaakt. Sterker nog: de problemen die wij ondervinden bij het volgen van Helmholtz gedachte-experimenten, als gevolg van het ontbreken van een vierdimensionale aanschouwing, lijken alleen maar te bevestigen dat wij afhankelijk zijn van een onontkoombare oorspronkelijke ruimte-aanschouwing. Deze is noodzakelijk driedimensionaal, en juist daarom kunnen wij geen goede voorstelling maken van hoe kromming van de ruimte mogelijk is. Helmholtz geeft nog meer

⁹⁰ Helmholtz, "The Origin and Meaning (II)," 216.

⁹¹ Kant, *Kritiek van de zuivere Rede*, 123 (A24/B39).

⁹² Kant, *Kritiek van de zuivere Rede*, 123-124 (A25/B39).

aanleiding om het kantiaanse beeld van een noodzakelijk aanschouwingsvorm te omarmen wanneer hij stelt dat ons gezichtsvermogen zich rap zou aanpassen aan een niet-euclidisch ruimte. We zouden in eerst instantie weliswaar last hebben met het inschatten van afstand, maar na een poosje zou onze aanschouwing de onregelmatigheden corrigeren en zouden wij de wereld gewoon weer waarnemen volgens euclidische principes.⁹³ Deze these kunnen wij onderschrijven met het oog op latere experimenten met het menselijk gezichtsvermogen. Zelfs het effect van lenzen waarin de wereld ondersteboven wordt weergegeven wordt uiteindelijk door ons gestel geneutraliseerd. Dit lijkt een verdere bevestiging van de aanwezigheid van een transcendentale uitgangspositie in ons zichtsvermogen.

Een korte conclusie kan volstaan: hoewel de argumentatie van Helmholtz potentieel vernietigend is voor de kantiaanse zienswijze op ruimte, kunnen wij niet concluderen dat er sprake is van een weerlegging. Essentieel daarvoor is de voorstelbaarheid van euclidische meetkunde. Deze weet Helmholtz ondanks verwoede pogingen niet hard te maken, omdat wij voor een goed begrip van ruimte haar niet van binnenuit dienen te kunnen representeren. Alleen een voorstelling van ruimte als een geheel zou hier volstaan, maar Helmholtz erkent dat dit onmogelijk is. Zijn argumenten zijn daarom onvoldoende krachtig om Kants theorie van transcendentale ruimte te weerleggen.

3.3. Carnaps argumentatie

Carnap formuleert twee argumenten tegen de ruimte als zuivere aanschouwingsvorm. Het eerste zal ik het 'argument van de relativiteitstheorie' noemen. Hierin stelt Carnap dat de relativiteitstheorie op doorslaggevende wijze heeft aangetoond dat de ruimte als niet-euclidisch moet worden gezien. Het tweede argument zal ik het 'argument van de twee meetkundige methoden' noemen. Het geeft uiting aan het idee dat meetkunde nooit zowel synthetisch als a priori kan zijn.

3.3.1. Het argument van de relativiteitstheorie

Het eerste argument kan gereconstrueerd worden tot het volgende schema:

- P1: Kant stelt dat de structuur van de ruimte noodzakelijk euclidisch is.
P2: De relativiteitstheorie leert ons dat de structuur van de ruimte niet-euclidisch is.
P3: De relativiteitstheorie is gezaghebbend als het gaat om het vaststellen van de structuur van de ruimte.
-
- C1: De structuur van de ruimte is niet noodzakelijk euclidisch.

⁹³ Helmholtz, "The Origin and Meaning," 320.

Ook van dit argument kunnen we vaststellen dat het logisch geldig is. Premisse P3 ondersteunt premisse P2, waarmee de conclusie C1 kan worden gewaarborgd. Rest nu wederom de vraag of de premissen ook als overtuigend kunnen worden beschouwd.

De premissen P1 en P2 kunnen we oormerken als overtuigend. Kant stelt dat de euclidische meetkunde a priori en synthetisch is, en uitdrukking geeft aan noodzakelijkheden die wij in onze zuivere aanschouwing moeten aannemen. De relativiteitstheorie is gebaseerd op de gedachte dat de structuur van de ruimte niet-euclidisch is omdat diens egaliteit verstoord wordt door gravitatievelden. De geldigheid van het argument hangt af van premisse P3: als de relativiteitstheorie gezaghebbend is, dan kunnen we de conclusie over de niet-euclidische structuur van de ruimte oormerken als gerechtvaardigd. Van deze empirische bewijsvoering zou de verstokte kantiaan natuurlijk kunnen zeggen dat Kant de notie van een empirisch kenbare ruimte überhaupt zou afwijzen. Met enige welwillendheid kunnen we Carnaps empirisme echter definiëren als een alternatieve opvatting van de ruimte, die op grond van de veel bredere bewijslast moet worden geprefereerd boven de transcendentale zienswijze. Dit beeld zou Kants notie van ruimte niet zozeer direct verwerpen, maar wel in een onherstelbaar diskrediet brengen.

Uiteraard kunnen we stellen dat de relativiteitstheorie zeer gezaghebbend is wanneer het gaat om het vaststellen van de wetten der fysica. Binnen de moderne natuurkunde vormt zij een essentiële steunpilaar, waarvan geen enkel element tot op heden is weerlegd. Wanneer de relativiteitstheorie dus uiting geeft aan het idee dat de ruimte niet-euclidisch is, betreft het hier *prima facie* een gezaghebbende uitspraak. Er is echter een kanttekening: Helmholtz en Poincaré lieten zien dat het altijd mogelijk is om elke ruimte zowel euclidisch als niet-euclidisch te beschrijven. Waarop baseerde Einstein zijn keuze voor de niet-euclidische versie?

3.3.2. Ontologie op basis van conventie en simpliciteit

Om de bovenstaande vraag te kunnen beantwoorden moet gekeken worden naar de kwestie van het conventionalisme. Carnap stelt dat er goede redenen zijn om aan te nemen dat objecten een vaste vorm hebben en dat lichtstralen geodetische lijnen vormen. Dit verklaard hij met hetzelfde argument als Helmholtz, dat wij slechts zinvol kunnen spreken van het doen van metingen als wij deze fysische aannames handhaven. Daarna is er de kwestie van de simpliciteit: het idee dat de eenvoudigste wetenschappelijke theorie de beste is (zie §2.3.2). Ook dit kunnen we met goed recht een oncontroversee principe noemen: een theorie die een enorme verscheidenheid aan ingewikkelde componenten herbergt is voor de natuurkunde altijd minder aantrekkelijk dan een verklaringsmodel gebaseerd op enkele eenvoudige

uitgangspunten. Wat Carnap echter niet duidelijk maakt is hoe we, in ogenschouw nemende de principes van conventie en simpliciteit, kunnen garanderen dat de uitspraken van de natuurkunde een ontologische extensie hebben. Met andere woorden: hoe kunnen we aan het feit dat wij nu eenmaal meten met ons lichaam als basis, en het principe dat een simpele theorie preferentie verdient, de garantie ontlenuen dat de door de relativiteitstheorie aangehaalde ruimte ook werkelijk bestaat? Hiervoor geeft Carnap geen argumenten. De reden hiervoor is begrijpelijk. Om vol te kunnen houden dat ontologische aannames kunnen worden gegrondvest in een discipline waarin conventie en simpliciteit belangrijke uitgangspunten zijn, moeten wij veronderstellen dat het universum in hapklare brokken ter beschikking staat van het menselijk intellect. Dit intellect moet op haar beurt een vooraf ingestelde capaciteit bezitten om deze informatie op apodictische wijze te verwerken. Dergelijke proposities kan men niet empirisch of natuurkundig onderbouwen. Zij vereisen een metafysische grondslag die Kant zou doen huiveren. Zijn weigering zich hierop te moeten beroepen is zelfs de belangrijkste aanleiding voor de transcendentale exercitie.⁹⁴

Wat betekent dit voor de afweging van het argument van Carnap? Weliswaar is de relativiteitstheorie gezaghebbend als het gaat over wetenschappelijke uitspraken over de aard van de ruimte. Zoals Poincaré al aangaf is men zich in de natuurkunde echter welbewust van het feit dat de wereld ook altijd met een alternatieve equivalente theorie beschreven zou kunnen worden. Dat men goede redenen heeft om de relativiteitstheorie te omarmen staat zonder meer vast. Dat er gezien het probleem van conventionalisme geen absolute ontologische uitspraken gedaan kunnen worden over de ontologische status van de objecten zou buiten kijf moeten staan. We zouden kunnen stellen dat het argument van de relativiteitstheorie ongeldig is wanneer we zouden expliciteren dat premisse P2 een ontologische uitspraak betreft, en dat in premisse P3 de relativiteitstheorie geen afdoende basis kent om met grote absoluutheid ontologische uitspraken te doen.

Wie de probleemstelling van Poincaré accepteert, kan niet anders dan erkennen dat de natuurkunde gebaseerd is op een conventioneel pragmatisme, en niet op archimedische alwetendheid. Het gegeven dat er altijd een keuze is tussen verschillende systemen betekent dat de uiteindelijke keuze ofwel gebaseerd moet worden op een a priori principe dat de keuze noodzakelijkheid verschaft, of – voor wie geen liefhebber is van apriorisme – op een niet-noodzakelijk principe waarvoor nooit een andere onderbouwing mogelijk is dan de pragmatische. Enige mate van apriorisme zou Carnap hier dus kunnen helpen, maar helaas wijst hij haar bestaan

⁹⁴ Gardner, *Kant and the Critique of Pure Reason*, 34-35.

met grote stelligheid van de hand. We kunnen daarom concluderen dat het onmogelijk is om premisse P3 te handhaven op basis van Carnaps uitgangspunten. De relativiteitstheorie zou ontologisch gezien gezaghebbend moeten zijn, maar de geschiedenis van de wetenschapsfilosofie leert ons dat het erg onverstandig is de meest recente theorie te bombarderen tot het bastion van zekere kennis. Daarom volstaat dit argument niet voor een verwerping van Kant.

3.3.3. Het argument van de twee meetkundige methoden

In zijn tweede argument tegen de transcendentale ruimte argumenteert Carnap tegen de stelling van Kant dat de geometrie zowel een synthetische als een a priori wetenschap is. We kunnen het als volgt reconstrueren:

P1: Synthetische kennis gaat over de wereld.

P2: A priori kennis is bewijsbaar zonder een beroep te hoeven doen op de ervaring.

P3: Alleen analytische geometrie is bewijsbaar ongeacht de ervaring. Alleen fysische geometrie gaat over de wereld.

P4: Geometrie kan nooit zowel analytisch als fysisch zijn.

C1: Geometrie kan nooit zowel synthetisch als a priori zijn.

Ook dit argument is logisch gezien geldig: uit het feit dat meetkunde nooit beide helften van het door Carnap gedefinieerde onderscheid tussen analytische (alleen a priori) en fysisch (alleen synthetisch) kan zijn, volgt noodzakelijkerwijs de conclusie dat meetkunde nooit zowel synthetisch als a priori is. De vraag is echter of de premissen van Carnap overtuigend zijn.

Wanneer we het door Carnap gegeven onderscheid tussen analytische en fysische geometrie aannemen, kunnen de premissen P3 en P4 worden goedgekeurd. De analytische geometrie houdt zich tenslotte bezig met de logische samenhang van de elementaire axioma's die als basis worden aangenomen. Wanneer dergelijke geometrie dus consistent is, is zij altijd a priori geldig en kan zij niet door de ervaring worden weersproken. De fysische geometrie kijkt puur naar de lijnen en punten die wij aan de wereld kunnen toewijzen, en kijkt dan welke meetkunde van toepassing is. We kunnen dus veilig vaststellen dat fysische geometrie over de wereld gaat.

Ook Carnaps definitie van 'a priori' in premisse P2 kunnen we goedkeuren. Deze is zelfs een stuk helderder dan het ambigu klinkende 'voorafgaand aan de ervaring'. In premisse P1 geeft Carnap echter een gevaarlijke definitie van synthetische kennis: "a synthetic statement (...) has a factual content. As with most scientific statements, it is synthetic because it goes beyond the assigned meanings of the terms. It tells

something about the nature of the world.”⁹⁵ Hoewel hij deze uitspraak doet in een hoofdstuk waarin hij Kants notie van synthetisch a priori bespreekt, definieert hij 'synthetisch' hier niet op kantiaanse wijze. Kant stelt duidelijk dat, hoewel empirische oordelen altijd synthetisch zijn, synthetische oordelen beter gedefinieerd kunnen worden als uitbreidend; in de zin dat in een synthetisch oordeel aan het subject kennis wordt toegevoegd die niet te herleiden is tot de betekenis ervan. Aan het meetkundige voorbeeld dat Kant hierbij geeft (van de rechte lijn tussen twee punten)⁹⁶ kunnen we zien dat Carnaps definitie van synthetische oordelen niet volstaat als hij ze opvat als gaande over de wereld. Het lijkt erop dat Carnap Kant hier niet erg welwillend interpreteert, aangezien hij een van de belangrijkste termen in diens filosofie definieert in de termen van de humiaanse positie waar Kant juist tegen ageert.

Dit vormt een probleem voor Carnap: wanneer we de correcte kantiaanse definitie aan het argumentatieschema toe zouden voegen is deze niet langer sluitend. De premisse P1 wordt nu: “synthetische kennis is uitbreidend”. Aangezien Carnap geen argumenten geeft waarom alléén fysische geometrie uitbreidend zou zijn, vervalt premisse P3. Er schuilt nu niet langer een tegenspraak in de stelling dat de geometrie zowel a priori als synthetisch kan zijn. Het tweede argument van Carnap tegen Kant kan dus verworpen worden op grond van een onrechtmatige interpretatie van Kants werk.

3.4. Tot slot

3.4.1. Recapitulatie

In de bovenstaande bespreking is beargumenteerd waarom we de argumenten van Helmholtz en Carnap tegen de transcendentale ruimte niet kunnen beschouwen als overtuigend.

Helmholtz zou een vernietigend argument hebben tegen de transcendentale ruimte als hij de inzichtelijkheid van niet-euclidische ruimte zou kunnen verdedigen. Aangezien deze inzichtelijkheid meer vereist dan de door Helmholtz gegeven eerstpersoons indrukken kunnen we concluderen dat hij hierin niet is geslaagd. Aangezien zijn verdere argumentatie volledig steunt op de inzichtelijkheid van niet-euclidische ruimte kunnen wij zijn argument tegen Kant beschouwen als onsuccesvol.

Carnap weigert consequent mee te gaan in het kantiaanse discours en weersprekt Kant op een geheel andere wijze. Hij pleit impliciet voor het empirisme als de enige juiste grondslag voor kennis. Hoewel de relativiteitstheorie een uiterst

⁹⁵ Carnap, *Philosophical Foundations of Physics*, 178.

⁹⁶ Kant, *Prolegomena*, 49 (AA 4, 269).

succesvolle methode is, kunnen we hieraan, wegens Poincaré's probleem van conventionalisme, echter geen ontologische kracht toeschrijven. Daarom kan Carnap weliswaar met recht beweren dat de ruimte niet-euclidische beschreven kan worden, maar niet dat deze niet-euclidisch *is*. Het is dus niet aangetoond dat de transcendentale ruimte met de komst van de relativiteitstheorie verworpen is. Door zijn weigering om in te gaan op de voorstelbaarheid van de ruimte zoals Kant deze definieert plaatst Carnap zich niet zozeer tegenover maar eerder náást Kant met een alternatieve verklaring. Aangezien deze is gebaseerd op de empiristische grondslag die Kant juist verwerpt als zinvol uitgangspunt biedt de argumentatie van Carnap weinig meer dan een herhaling van in de discussie al afgeschreven premissen.

Ook Carnaps bewering dat kennis in het algemeen en meetkunde in het bijzonder niet zowel a priori als synthetisch kan zijn, berust op een empiristische uitgangspositie. Aangezien hij Kant niet in diens eigen woorden citeert, kunnen we vaststellen dat Carnaps argument de vorm heeft van cirkelredenering: hij neemt tenslotte de tegenovergestelde positie van Kant aan om van daaruit te bewijzen dat deze ongelijk heeft. Ook het argument van de twee meetkundige methoden kan zodoende worden verworpen.

3.4.2. Het probleem van de ruimte in de moderne natuurwetenschap

Nu kan men tegenwerpen dat in deze conclusies wel erg onwelwillend omgegaan wordt met de overduidelijke vooruitgang die dagelijks in de moderne natuurwetenschap wordt geboekt. Het is inmiddels ruimschoots bewezen dat de relativiteitstheorie werkt: onze satellietnavigatie zou ons binnen enkele kilometers het spreekwoordelijke bos in sturen zonder een correctie van de sneller lopende atoomklokken in de satellieten. Ook in de deeltjesfysica en sterrenkunde wordt met veel succes gebruik gemaakt van deze theorie. Waarom zou iemand hierna nog willen pleiten voor euclidische ruimte in kantiaanse zin? Of sterker: wat is de waarde van Kants filosofie nog in het licht van de moderne natuurwetenschap?

Dit zijn vragen die te groot zijn voor een laatste paar afsluitende zinnen in een eenvoudige bachelorscriptie. Toch zou ik willen afsluiten met enkele opmerkingen. Wat deze kwestie zo interessant maakt, zijn de verschillende filosofische conflicten die erin samenkomen. Deze scriptie gaat niet alleen over de houdbaarheid van Kants transcendentale filosofie. Zij gaat ook over de nog altijd actuele vraag naar de aanwezigheid van a priori elementen in onze cognitie. Zij gaat over de vraag naar de status van filosofische kennis in een door naturalisme geregeerde wetenschap. Zij gaat uiteindelijk over de vraag 'wat kunnen we weten?'

Het probleem van de ruimte is in deze kwesties erg interessant. Het moge

duidelijk zijn dat we niet gemakkelijk tot een oplossing kunnen komen in ons dispuut tussen kantianisme en empirisme. Het knelpunt wordt door Philip Chapin Jones op interessante wijze geanalyseerd. In het artikel "Kant, Euclid, and the Non-euclidean" stelt hij dat het vraagstuk van de aard van de ruimte nooit op empirisch wijze tot een zeker einde kan worden gebracht. We hebben er namelijk geen zintuiglijke reactie op: we kunnen ruimte niet zien, voelen, horen, ruiken of proeven. Directe empirische gegevens over de ruimte zijn dus nooit verkrijgbaar.⁹⁷ Ruimte heeft dan ook geen eigen 'structuur' maar vormt zoals Kant al stelde slechts een matrix waarin alle objecten worden aanschouwd. Jones stelt dat we geometrie niet moeten zien als een methode om ruimte te meten maar als een methode om de relatieve posities en afstanden te meten van objecten in de ruimte.⁹⁸ Wanneer wij volhouden dat er sprake is van niet-euclidische ruimte, komt dit omdat wij bepaalde lijnen karakteriseren als geodetisch, terwijl zij geen rechte baan beschrijven. Volgens Jones schuilt het enige verschil tussen euclidische en verschillende niet-euclidische zienswijzen in de impliciete aannames over de natuur van de lijnen waarmee afstand wordt gemeten. Het is onmogelijk te bewijzen dat er een ruimte bestaat waarin geen rechte lijnen kunnen worden getrokken. Zelfs als wij een lichtstraal zouden afschieten in de ruimte en we zouden deze zien afbuigen, dan is het altijd theoretisch mogelijk een raket langs de ogenschijnlijk rechte straal omhoog te schieten op een zodanige wijze dat deze wel een rechte baan beschrijft. Ook het optisch construeren van een rechte lijn in deze zelfde ruimte zal altijd mogelijk zijn. Als we erachter komen dat lichtstralen niet-euclidische paden volgen, dan weten we dus alleen dat de niet-euclidische meetkunde een beschrijving geeft van het gedrag van lichtstralen zelf. Over de ruimte zouden wij echter geen uitspraak moeten doen.⁹⁹ Jones wijt de hele controverse die in deze scriptie aan de orde is gekomen dan ook aan een "loose use of terms" tussen voorstanders van incompatibele filosofische uitgangspunten.¹⁰⁰

3.4.3. Een oplossing?

Wanneer we het probleem van de aard van de ruimte zo bezien, wordt duidelijk waarom ieder filosofisch dispuut hierover zal eindigen in aporie. Met Poincaré in ons achterhoofd weten we dat er altijd meerdere manieren zijn om de ruimte te beschrijven, en met Jones weten we dat we nooit direct zullen kunnen controleren welke beschrijving objectieve geldigheid heeft. Maar wat moeten we nu met het probleem van de ruimte? Hoewel Kants positie niet zaligmakend kan worden geacht

⁹⁷ Jones, "Kant, Euclid, and the Non-Euclidean," 139.

⁹⁸ Jones, "Kant, Euclid, and the Non-Euclidean," 141.

⁹⁹ Jones, "Kant, Euclid, and the Non-Euclidean," 142.

¹⁰⁰ Jones, "Kant, Euclid, and the Non-Euclidean," 143

heeft zij een voordeel boven de empirische: zij doet geen objectieve uitspraken over een van ons onafhankelijke ruimte, maar postuleert ruimte als een noodzakelijkheid in onze aanschouwing. De conventionalistische problematiek vormt een zoveelste bevestiging van het probleem van kennis, dat door Kant in ieder geval grotendeels kan worden opgelost. Het hedendaagse naturalisme verwerpt het probleem van kennis simpelweg als onzinnige metafysica maar poneert met haar dogmatisch empirisme geen zinvol alternatief. Precies het gebrek aan een gedegen filosofische onderbouwing voor de empiristische uitgangspunten vormde voor Kant de aanleiding voor zijn transcendentale project. Ook dit project kent haar zwakke kanten, maar op het gebied van de ruimte kunnen wij vaststellen dat Kant niet zomaar kan worden verworpen. Het feit dat onze ogen een sterke neiging vertonen zich bij afwijkende indrukken bij te stellen tot de euclidische uitgangspositie, de rol die conventie speelt in de natuurwetenschappen en de empirische onbereikbaarheid van de ruimte vormen eerder argumenten vóór de transcendentale these dan ertegen.

Conclusie

Nog eenmaal ten overvloede: het argument van de niet-euclidische meetkunde valt uiteen in verschillende vormen, die gedekt worden door de argumenten van Helmholtz en Carnap. Zij volstaan echter geen van alle voor een duidelijke verwerping van de kantiaanse notie van transcendentale ruimte. Helmholtz kan de voorstelbaarheid van niet-euclidische ruimte niet hard maken. De rest van zijn argumentatie is hiervan afhankelijk. Carnap formuleert zijn argumenten vanuit de empiristische uitgangspositie die Kant juist verwerpt. De rol die conventie speelt in de natuurwetenschap maakt dat de relativiteitstheorie onvoldoende grondslag biedt voor de vergaande ontologische claim dat de ruimte niet-euclidisch is. Het argument dat meetkunde niet zowel synthetisch als a priori kan zijn is ongeldig als argument tegen Kant aangezien de laatste hier onjuist wordt geïnterpreteerd in zijn definitie van 'synthetisch'.

Met het door Poincaré gedefinieerde conventionalisme in de natuurwetenschap, en de empirische ontoegankelijkheid van ruimte zoals gearticuleerd door Jones kunnen we vaststellen dat de kwestie van de aard van de ruimte voorlopig niet empirisch zal kunnen worden besloten. Wellicht wordt het daarom tijd om te accepteren dat objectieve kennis ervan voor ons onbereikbaar is, zolang wij ons blijven verzetten tegen Kants copernicaanse wending die hiervoor de enige oplossing biedt. Wij verliezen daarmee weliswaar de mogelijkheid op kennis van eventuele onafhankelijke realiteit, maar krijgen daarvoor in ieder geval de mogelijkheid terug op zekere kennis van de enige wereld die er voor de mensheid toe kan doen: de wereld waar wij toegang toe hebben.

Het laatste woord is nog niet over deze kwestie gesproken. Kant overleeft weliswaar de kritiek uit niet-euclidische hoek op zijn notie van transcendentale ruimte. De vraag is echter ook wat er overblijft van de status van zijn zuivere natuurkunde, en hoe een steeds veranderende contra-intuïtieve natuurwetenschap in kantiaanse termen worden verklaard. Dit is echter voer voor een volgende project. Voor nu volstaat de conclusie dat het argument van niet-euclidische meetkunde ons geen reden geeft om Kants visie op ruimte te verwerpen. Het transcendentaal idealisme is vooralsnog veilig voor de niet-euclidische klauwen.

Bibliografie

Carnap, Rudolf. *Philosophical Foundations of Physics*. Edited by Martin Gardner. New York: Basis Books, 1966.

Gardner, Sebastian. *Kant and the Critique of Pure Reason*. London: Routledge, 1999.

Hatfield, Gary. "Kant on the perception of space (and time)." In: *The Cambridge companion to Kant and Modern Philosophy*. Edited by Paul Guyer. New York: Cambridge University Press, 2006.

Helmholtz, Hermann von. "The Origin and Meaning of Geometrical Axioms." *Mind* 1.3 (1876), 301-321.

———. "The Origin and Meaning of Geometrical Axioms (II)." *Mind* 3.10 (1878), 212-225.

Hume, David. *Enquiries Concerning Human Understanding*. Edited by L. Selby-Bigge. London: Oxford University Press, 1902.

Janiak, Andrew. "Kant's Views on Space and Time." *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2009 Edition). Edited by Edward N. Zalta. <http://plato.stanford.edu/archives/fall2009/entries/kant-spacetime/> (geraadpleegd 12 juni 2012).

Jones, Philip Chapin. "Kant, Euclid, and the Non-Euclidean." *Philosophy of Science* 13.2 (1946), 137-143.

Kant, Immanuel. *Kritiek van de zuivere rede*. Ten geleide, vertaling en annotaties door Jabik Veenbaas en Willem Visser. Amsterdam: Boom, 2004. Tussen haakjes: pagina-nummer volgens eerste (A, 1781) en tweede (B, 1787) editie.

Kant, Immanuel. *Prolegomena*. Inleiding, vertaling en annotaties door Jabik Veenbaas en Willem Visser. 2e dr. Amsterdam: Boom, 2004. 1e dr. 1999. Tussen haakjes: pagina-nummer volgens Akademieausgabe (Berlijn 1902).

Schliesser, Eric. "Hume's Newtonianism and Anti-Newtonianism." *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2008 Edition)*. Edited by Edward N. Zalta. <http://plato.stanford.edu/archives/win2008/entries/hume-newton/> (geraadpleegd 19 juli 2012).