Percolatie op het driehoeks- en zeshoeksrooster

Femke Berendsen
3689301

27 juli 2014

Inhoudsopgave

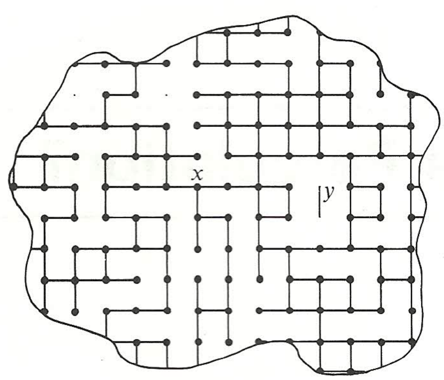
1 Inleiding

Percolatie is een term die voorkomt in het waterbeheer. Wanneer we een poreuze steen in het water hebben liggen, kunnen we ons afvragen wat de kans is dat het middelpunt van de steen nat wordt. Hiervoor moeten we eerst weten op wat voor manier het water door de steen heen gaat, we kunnen hier verschillende modellen voor maken. In 1957 maakten Broadbent en Hammersley voor het eerst het *percolatie* model. In het tweedimensionale geval (over $\mathbb{Z}^2$) hield hun model het volgende in:

Laat $\mathbb{Z}^2$ een vierkant rooster zijn en p een getal zodat $0 \leq p \leq 1$. Iedere zijde in $\mathbb{Z}^2$ kan onafhankelijk van de andere zijden *open* zijn met kans p, of *gesloten* met kans $1-p$. De zijden op het rooster representeren de wegen in de steen. Wanneer een zijde open is kan er water doorheen, wanneer een zijde gesloten is niet. De parameter p is de proportie van de zijden die breed genoeg is om er water doorheen te laten.

We gaan de steen modelleren alsof hij plat is, we bekijken hem dus in het platte vlak. We modelleren de gangetjes in de steen alsof ze precies het vierkantsrooster in $\mathbb{Z}^2$ aanhouden. Hierbij gaan we er dan vanuit dat de hoekpunten van $\mathbb{Z}^2$ op hele kleine afstand van elkaar liggen, zodat het rooster oneindig groot lijkt wanneer je de steen bekijkt.

Wanneer we nu de steen onderdompelen in het water, wordt een punt x in de steen bereikt (en dus op het rooster) dan en slechts dan als er een pad is in $\mathbb{Z}^2$ van x naar een hoekpunt op de rand van de steen (en dus de rand van het rooster). Dit pad mag dan alleen langs open zijden gaan. Percolatie theorie gaat over het bestaan van zulke 'open paden'. In de volgende figuur is een weergave van hoe zo'n gemodelleerde steen er ongeveer uit zou zien. We zien dat punt x wel te bereiken is, maar punt y niet.



Een steen is natuurlijk op veel verschillende manier te modelleren. In dit geval is het rooster van $\mathbb{Z}^2$ gebruikt, maar er zijn nog veel meer verschillende roosters mogelijk. Ook wordt het percolatiemodel in de praktijk niet alleen maar voor stenen gebruikt, maar ook voor talloze andere toepassingen.

In dit verslag zullen we het driehoeksrooster en het zeshoeksrooster bekijken, toegepast op een oneindige graaf. Wanneer p groot is, is ook de kans groter dat je langere open paden hebt in je graaf. Het blijkt dat er een kritieke waarde p_0 is zodat wanneer $p > p_0$, de kans op een oneindig open pad in een oneindige graaf gelijk is aan 1. Wanneer $p < p_0$ is die kans gelijk aan 0. Het doel van dit verslag is aan te tonen dat die kritieke waarde voor het driehoeksrooster gelijk is aan $2\sin(\pi/18)$ en voor het zeshoeksrooster $1 - 2\sin(\pi/18)$.

2 Definities

Allereerst zullen we wat terminologie en definities bekijken. We bekijken in dit geval twee verschillende grafen die liggen op roosters: het driehoeksrooster T en het zeshoeksrooster H. Voor deze grafen gebruiken we de standaard terminologie voor de percolatietheorie, deze verschilt namelijk van de grafentheorie.

Zij Λ een graaf met $V(\Lambda)$ de verzameling hoekpunten en $E(\Lambda)$ de verzameling zijden. We beperken ons tot ongerichte percolatie, dat wil zeggen: percolatie op een ongerichte graaf Λ. We gaan er vanuit dat Λ samenhangend is (dat wil zeggen: hij bestaat uit één geheel), oneindig en lokaal eindig is (dat wil zeggen: elk hoekpunt heeft eindige graad).

Een zijde noemen we een *bond* en een hoekpunt een *site*. De staat van een bond of site kan *open* of *gesloten* zijn. Wanneer een site of bond geselecteerd is noemen we deze open en wanneer deze niet geselecteerd is noemen we hem gesloten. Geselecteerd betekent in het geval van de steen dat er water doorheen kan stromen. Een bond of site is open met kans p en gesloten met kans $1 - p$. De staten van de bonds en sites zijn onafhankelijk van elkaar.

Wanneer er bonds of sites worden geselecteerd krijgen we een random subgraaf van paden waar het water kan stromen. Wanneer deze subgraaf wordt verkregen door het selecteren van hoekpunten spreken we van *site percolatie*; wanneer we zijden selecteren, spreken we van *bond percolatie*. Bij site percolatie is de *open subgraaf* de subgraaf geïnduceerd door alle open hoekpunten; in bond percolatie wordt de *open subgraaf* gevormd door de open zijden en álle hoekpunten. Verder in dit verslag zullen we het alleen hebben over bond percolatie.

Delen van de sites van een graaf worden *clusters* genoemd. Een open cluster is een ruimtelijk verbonden groep van open sites. Twee sites horen bij dezelfde open cluster dan en slechts dan als het mogelijk is om alleen via open bonds van de ene naar de andere site te komen. Voor een site x is C_x het open cluster dat x bevat. Als deze niet bestaat, is C_x leeg. Dus $C_x = \{y \in \Lambda : x \to y\}$ is de verzameling sites y waarvoor er een open $x - y$ pad is.

Een *open pad* is een pad in de open subgraaf. De notatie $x \to \infty$ betekent dat er een oneindig open pad is, startend in x. Als we een lokaal eindige graaf bekijken, is een open cluster oneindig dan en slechts dan als voor elke site x in de cluster, $x \to \infty$ geldt.

Laat $\theta_x(p)$ de kans zijn dat x in een oneindig cluster ligt, ofwel $\theta_x(p) = \mathbb{P}_p(x \to \infty)$. Voor bond percolatie is $\theta_x(p)$ dus gedefinieerd als $\theta_x(p) = \mathbb{P}^b_{\Lambda,p}(|C_x| = \infty)$, waarbij $|C_x| = |V(C_x)|$ het aantal sites in C_x is. In het vervolg zullen we ons alleen richten op bond percolatie op het driehoeks- en zeshoeksrooster.

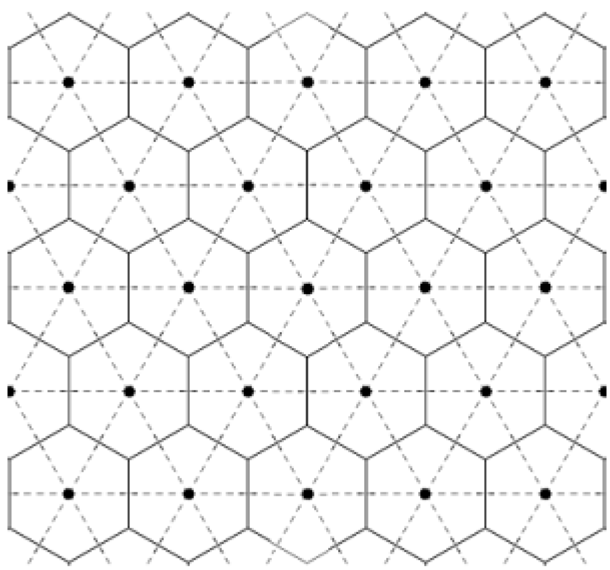
Een *automorfisme* is een bijectieve afbeelding van een object naar zichzelf die de structuur van het object behoudt. Twee sites x en y zijn *equivalent* als er een automorfisme is in Λ die x op y afbeeldt. In het geval van het oneindige driehoeksrooster zijn alle sites equivalent, het rooster kan namelijk zo verschoven worden dat site x op site y afgebeeld wordt, het rooster verandert daar niet van. Dit kan voor iedere x op iedere y. Voor het oneindige zeshoeksrooster geldt hetzelfde, door het rooster te schuiven en roteren kan iedere site op iedere andere site afgebeeld worden zonder dat de structuur van het rooster verandert. Daarom zijn alle sites van het driehoeksrooster equivalent en alle sites van het zeshoeksrooster equivalent. Als alle sites equivalent zijn, kunnen we ook $\theta(p)$ schrijven in plaats van $\theta_x(p)$ voor elke site x. De kwantiteit $\theta(p)$ of $\theta_x(p)$, wordt ook wel de *percolatiekans* genoemd.

3 Duale roosters

We bekijken in dit verslag het driehoeksrooster T en zeshoeksrooster H. Het zeshoeksrooster construeren we uit het driehoeksrooster, dit is zijn duaal. Hiertoe geven we eerst de definitie van een duale graaf in het platte vlak, daarna zullen we laten zien hoe het zeshoeksrooster ontstaat uit het driehoeksrooster.

Definitie 3.1. Zij Λ een vlakke graaf. De *duale graaf* Λ^* van Λ is een graaf die voor ieder vlak in Λ een corresponderend hoekpunt in Λ^* heeft, en die voor iedere zijde e in Λ een corresponderende zijde e^* in Λ^* heeft die de twee grenzende vlakken aan e verbindt. Voor deze zijden e en e^* geldt dat ze elkaar kruisen, maar dat ze geen andere zijden kruisen.

Laat T het driehoeksrooster in het platte vlak zijn. We gaan nu zijn duaal construeren, en dat doen we als volgt: laat ieder vlak in T corresponderen met een site en verbind al die sites met elkaar. De bonds die ontstaan corresponderen met de bonds in T: voor iedere bond e in T die twee vlakken scheidt komt nu een bond e^* die de sites in die twee vlakken met elkaar verbindt. Het rooster dat nu ontstaat is het zeshoeksrooster H, het duale rooster van T.
In de volgende figuur[1] worden T en H weergegeven.



[1] http://gregegan.customer.netspace.net.au/APPLETS/12/A2cells.gif

4 Kritieke waarde

Zij E de gebeurtenis dat er een oneindig open cluser is. De structuur van de open subgraaf verandert als p groter wordt: als $p < p_0$ dan is de kans op E gelijk aan 0, terwijl voor $p > p_0$ deze kans gelijk is aan 1. De kans p_0 wordt ook wel de kritieke waarde genoemd. Eerst zullen we een stelling laten zien, daarna laten we zien dat zo'n kritieke waarde ook daadwerkelijk bestaat.

Stelling 4.1. (Kolmogorov's $0-1$ wet, [4]) *Laat* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *een kansruimte zijn en laat* F_n *een rij van onderling onafhankelijke* $\sigma-$*algebra's in* $\mathcal{F}$ *zijn. Laat* $G = \sigma(\bigcup_{k=n}^{\infty} F_k)$ *de kleinste* $\sigma-$*algebra zijn die* $F_n, F_{n+1}, \ldots$ *bevat. Dan geldt voor elke gebeurtenis* $F \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ *dat* $\mathbb{P}(F) = 0$ *of* $\mathbb{P}(F) = 1$.

We kunnen dit ook wel zien als dat iedere F_n de $\sigma-$algebra is, gegenereerd door de random variabele X_n. Een *tail event* is gedefinieerd als een gebeurtenis die meetbaar is met respect naar de $\sigma-$algebra gegenereerd door alle X_n, maar onafhankelijk is van een eindig aantal van X_n. Een tail event is dus precies een element van de intersectie $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$.

Als site x en y op afstand d van elkaar zijn, dan geldt dat $\theta_x(p) \geq p^d \theta_y(p)$. Dan geldt dat ofwel $\theta_x(p) = 0$ voor iedere site x, ofwel $\theta_x(p) > 0$ voor iedere x. Verder geldt dat de kans dat x in een oneindig cluster ligt groter wordt naarmate p groter wordt. Dit zien we op de volgende manier: stel dat Λ een graaf is met verzameling bonds en twee kansen p, p' met $p < p'$. Laat nu aan iedere bond $e \in \Lambda$ uniform een getal $x_e \in [0, 1]$ toegewezen worden. Zij Λ_p de graaf met alle bonds e waarvoor geldt dat $x_e < p$, en zij $\Lambda_{p'}$ de graaf met alle bonds waarvoor geldt dat $x_e < p'$. Omdat $p < p'$ zitten alle bonds van Λ_p ook in $\Lambda_{p'}$, dus is Λ_p een deelgraaf van $\Lambda_{p'}$. De kans op een oneindig pad in Λ_p is dus kleiner of gelijk aan de kans op een oneindig pad in $\Lambda_{p'}$.
De kans dat x in een oneindig cluster ligt wordt dus groter naarmate p groter wordt. Omdat $\theta_x(p) = 0$ voor iedere site x of $\theta_x(p) > 0$ voor iedere x, volgt dat $\theta_x(p)$ een stijgende functie van p is. Hieruit volgt dat er een kritieke waarde p_0 bestaat, met $0 \leq p_0 \leq 1$, zodat wanneeer $p < p_0$, dan $\theta_x(p) = 0$ voor iedere site x, en als $p > p_0$, dan $\theta_x(p) > 0$ voor iedere x.

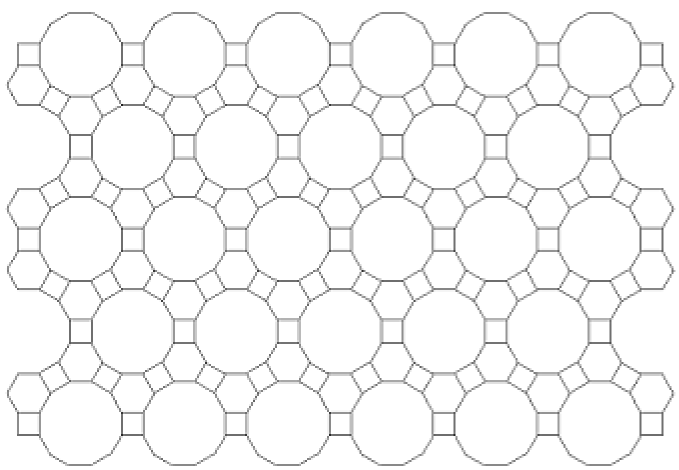
De gebeurtenis E, dat er een oneindig open cluster is, is onafhankelijk van de staten van de bonds van elke eindige deelverzameling van Λ. We kunnen dus Kolmogorov's $0-1$ wet hierop toepassen. Deze wet impliceert dat $\mathbb{P}_p(E)$ gelijk is aan 0 of 1. Zoals we hierboven hebben gezien is $\theta_x(p) = 0$ voor iedere x als $p < p_0$, dus als $p < p_0$ is de kans op een oneindig cluster dat x bevat gelijk aan 0 voor iedere site x. Dit betekent dat er helemaal geen oneindig cluster kan zijn, want geen enkele site x is bevat in een oneindig cluster, dus $P_p(E) = 0$. Als $p > p_0$, dan is $\mathbb{P}_p(E) \geq \theta_x(p) > 0$ voor een site x (en dus voor alle sites), dus $\mathbb{P}_p(E) = 1$. Er is dus een kritieke waarde p_0 waarvoor geldt dat wanneer $p < p_0$, dan $\mathbb{P}_p(E) = 0$, en als $p > p_0$, dan $\mathbb{P}_p(E) = 1$.

De kritieke waarde p_0 noteren we $p_c^b(T)$ voor het driehoeksrooster T en $p_c^b(H)$ voor het zeshoeksrooster H.

5 Lemma's en Stellingen

Lemma 5.1. *Laat T een eindig driehoeksrooster zijn met verzameling bonds $E(T)$, en laat H zijn duaal zijn met verzameling bonds $E(H) = \{e^* : e \in E(T)\}$. Hierbij is e^* de bond die de sites behorende bij de twee aangrenzende vlakken van e verbindt. Iedere bond e heeft een staat toegekregen gewezen: open of gesloten. We nemen aan dat iedere bond e^* open is als e gesloten is en andersom. Dan is er ofwel een open pad in T van boven naar beneden, ofwel een open pad in H van links naar rechts. Open paden van beide typen kunnen niet tegelijkertijd bestaan.*

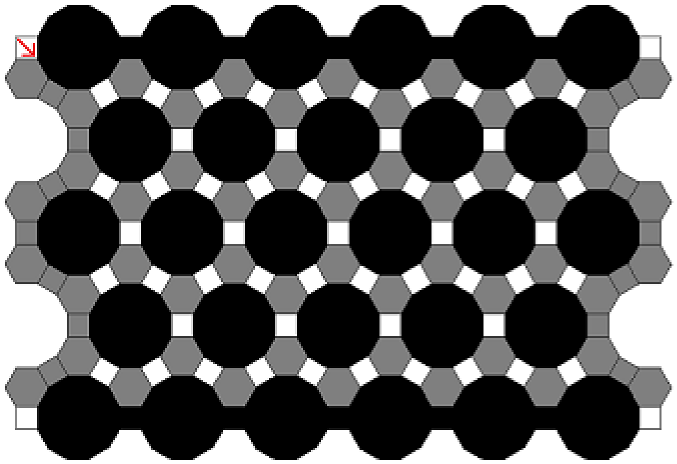
Bewijs. Vervang in de grafen T en H ieder hoekpunt van graad d door een $2d-$gon. Ieder hoekpunt met graad 3 (waar drie zeshoeken bijeen komen) vervangen we door een zeshoek en ieder hoekpunt met graad 6 (waar drie driehoeken bij elkaar komen) vervangen we door een twaalfhoek. Ook vervangen we elk paar $\{e, e^*\}$ van duale zijden door een vierkant. Dit zien we in de volgende figuur[2]:



Kleur de vlakken behorende bij G zwart en de vlakken behorende bij G^* grijs, een vierkant behorend bij $\{e, e^*\}$ wordt zwart als e open is, dus e^* gesloten, en grijs als e gesloten is. Als zo'n vierkantje zwart is verbindt deze twee sites uit T, als deze grijs is verbindt hij twee sites uit H.
Er is een verticaal pad in T dan en slechts dan als er een zwart pad van vierkantjes en twaalfhoeken is van boven in de figuur naar beneden, en er is een horizontaal pad in H dan en slechts dan als er een grijs pad van vierkantjes en zeshoeken is van links naar rechts. Omdat het niet uitmaakt waar je bovenin begint of waar je onderin eindigt, kunnen we alle twaalfhoeken boven- en onderin het rooster verbinden door de vierkantjes zwart te maken, en kunnen we alle vierkantjes aan de zijkanten grijs maken. Zo vormen de kanten één geheel.

[2]http://gwydir.demon.co.uk/jo/tess/bigdohexsq.gif

De witte vierkantjes zijn edges die open of gesloten kunnen zijn, daarvan weten we niet wat hun staat is.



We beginnen nu met 'lopen' linksboven in de figuur, en lopen over de grens van de zwarte vlakken (aan de linkerhand) en grijze vlakken (aan de rechterhand). We lopen nu over een pad waarbij we enerzijds een pad lopen van zwarte vlakken, en anderzijds een pad van grijze vlakken. We kunnen zo overal naartoe lopen, maar we moeten zwart aan onze linkerhand houden en grijs aan onze rechterhand. We gaan nu proberen om naar een ander hoekpunt van het rooster te lopen.
We kunnen naar het hoekpunt linksonderin lopen, we zien dat dat er dan een pad in T mogelijk is van boven naar beneden: we lopen dan het pad over zwarte vlakken. We kunnen ook naar het hoekpunt rechtsbovenin lopen, we zien dat er dan een pad in H mogelijk is van links naar rechts: we lopen dan het pad over grijze vlakken. We zien ook dat het niet mogelijk is om naar het hoekpunt rechtsonderin te lopen, dan zouden we namelijk opeens zwart aan onze rechterhand hebben en grijs aan onze linkerhand. Dat kan niet, dus dat betekent dat paden van beide typen niet tegelijkertijd voor kunnen komen. Afhankelijk van hoe de bonds in de grafen open of gesloten zijn, is er dus precies één open pad van boven naar beneden in T of van links naar rechts in H mogelijk.

$\square$

We kunnen dit ook heel intuïtief inzien: wanneer er een open pad in T is van boven naar beneden, is er dus een hele lijn van zwarte vierkantjes van boven naar beneden. Dat betekent dat je op geen enkele manier een pad in H kan hebben van links naar rechts, omdat ze ooit langs het zwarte pad van boven naar beneden moeten komen. Daar zou dan een grijs vierkantje dit pad moeten doorbreken maar dat kan niet, want dan is het geen pad meer van boven naar beneden.

Definitie 5.2. Een graaf is *lokaal eindig* als iedere site in de graaf een eindige graad heeft.

Definitie 5.3. Een graaf is *georiënteerd* als de bonds in de graaf een richting hebben meegekregen.

Definitie 5.4. Een *multigraaf* is een graaf die meerdere bonds mag hebben tussen twee sites. De graaf mag ook lussen hebben, dat wil zeggen een bond die een site met zichzelf verbindt.

Definitie 5.5. Een georiënteerde graaf is *sterk samenhangend* als voor twee sites x en y er een georiënteerd pad is van x naar y.

Definitie 5.6. Een graaf is van *eindig type* als er een eindig aantal equivalentieklassen van sites is onder het bijbehorende automorfisme.

Definitie 5.7. Een graaf is *vatbaar* als $\frac{|S_n(x)|}{|B_n(x)|} \to 0$ als $n \to \infty$ voor iedere x. Hierbij is $S_n(x)$ de verzameling sites op afstand n in de graaf van site x, en $B_n(x) = \bigcup_{i=0}^{n} S_i(x)$, dat zijn alle sites die in de bol met straal n om site x heenzit.

Stelling 5.8. (Menshikov, [5]) *Zij $\overrightarrow{\Lambda}$ een oneindige, lokaal eindige geörienteerde multigraaf met $C_{\overrightarrow{\Lambda}}$ eindig en sterk samenhangend, en laat $p < p_0(\overrightarrow{\Lambda})$. Dan is er een $\alpha > 0$ zodat*

$$\mathbb{P}_p^s(x \to n) \leq \exp(-\alpha n/(\log n)^2).$$

Stelling 5.9. (Burton, Keane, [6]) *Laat Λ een samenhangende, lokaal eindige, eindige type, vatbaar oneindige graaf zijn, en laat $p \in (0,1)$. Dan is of $\mathbb{P}_{\Lambda,p}^b(I_0) = 1$ of $\mathbb{P}_{\Lambda,p}^b(I_1) = 1$), met I_k de gebeurtenis dat er precies k oneindige open clusters in de bond percolatie op Λ zijn.*

Definitie 5.10. De *kubus* Q^n is de verzameling van alle $0-1$ rijen van lengte n, ofwel $Q^n = 2^n = \{0,1\}^n$, $Q_{\mathbf{p}}^n$ is de *gewogen kubus* met kansdichtheid $\mathbf{p} = (p_i)_{i=1}^n$.

Definitie 5.11. Een deelverzameling $U \subset Q^n$ is *stijgend*, oftewel een *up-set* als $a, b \in Q^n$, $a \in U$ en $a \leq b$ impliceert dat $b \in U$. Een deelverzameling $D \subset Q^n$ is *dalend*, oftewel een *down-set*, als $a, b \in Q^n$, $a \in D$ en $a \geq b$ impliceert dat $b \in D$.

Definitie 5.12. Gegeven een verzameling $A \subset Q^n$, voor $t = 0, 1$, dan is

$$A_t = \{(a_i)_{i=1}^{n-1} : (a_1, \ldots, a_{n-1}, t) \in A\} \subset Q^{n-1}$$

Als A monotoon stijgend is dan is $A_0 \subset A_1$, en als A monotoon dalend is dan is $A_1 \subset A_0$. Laat $Q_{\mathbf{p'}}^{n-1}$ de gewogen kubus zijn met kansdichtheid $\mathbf{p'} = (p_i)_{i=1}^{n-1}$. We gaan nu $\mathbb{P}$ schrijven voor twee verschillende kansmaten, namelijk de kansmaten in $Q_{\mathbf{p}}^n$ en in $Q_{\mathbf{p'}}^{n-1}$. Merk op dat

$$\mathbb{P}(A) = (1 - p_n)\mathbb{P}(A_0) + p_n\mathbb{P}(A_1) \tag{1}$$

voor elke verzameling $A \subset Q^n$.

Lemma 5.13. (Harris, [7]) *Laat A en B deelverzamelingen zijn van $Q_{\boldsymbol{p}}^n$. Als beide verzamelingen up-sets of beide down-sets zijn, dan geldt*

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \tag{2}$$

Bewijs. We gaan dit bewijzen met behulp van inductie. Voor $n = 1$ (en natuurlijk ook $n = 0$) is de ongelijkheid triviaal. Neem nu aan dat $n \geq 2$ en dat Lemma 5.13 waar is voor $n - 1$. A en B zijn up-sets of down-sets, dus ofwel $A_0 \subset A_1$ en $B_0 \subset B_1$, ofwel $A_1 \subset A_0$ en $B_1 \subset B_0$. In het bijzonder geldt dat

$$(\mathbb{P}(A_0) - \mathbb{P}(A_1))(\mathbb{P}(B_0) - \mathbb{P}(B_1)) \geq 0 \tag{3}$$

We hebben nu
$\mathbb{P}(A \cap B)$
$= (1 - p_n)\mathbb{P}(A_0 \cap B_0) + p_n\mathbb{P}(A_1 \cap B_1)$ (volgt uit (1))
$\geq (1 - p_n)\mathbb{P}(A_0)\mathbb{P}(B_0) + p_n\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B_1)$ (volgt uit (2))
$\geq \{(1 - p_n)\mathbb{P}(A_0) + p_n\mathbb{P}(A_1)\}\{(1 - p_n)\mathbb{P}(B_o) + p_n\mathbb{P}(B_1)\}$ (volgt uit (3))
$= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. (volgt uit (1))

□

De doorsnede van twee up-sets is weer een up-set, dus Lemma 5.13 impliceert dat

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_t) \geq \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\ldots\mathbb{P}(A_t) \tag{4}$$

met $A_1, \ldots, A_t$ allemaal up-sets.
Een consequentie van Harris' Lemma is dat als $A_1, \ldots, A_t$ stijgende gebeurtenissen zijn in $Q_{\mathbf{p}}^n$ waarbij de vereniging A een hele grote kans heeft, dan moet een van de A_i's ook een grote kans hebben. De complementen A_i^c zijn dan down-sets, dus uit (4) volgt dan dat

$$\prod_{i=1}^{t} \mathbb{P}(A_i^c) \leq \mathbb{P}(A^c).$$

Hieruit volgt dat voor een bepaalde i geldt dat

$$\mathbb{P}(A_i^c) \leq (\mathbb{P}(A^c))^{1/t},$$

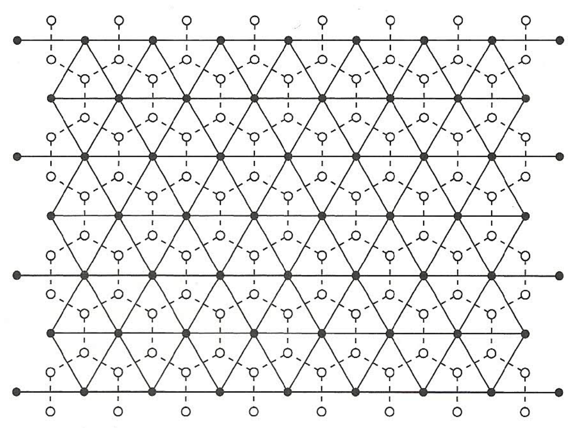
ofwel

$$\mathbb{P}(A_i^c) \geq 1 - (1 - \mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_t))^{1/t}. \tag{5}$$

Stelling 5.14. *Het driehoeksrooster T en zeshoeksrooster H voldoen aan*

$$p_c^b(T) + p_c^b(H) = 1. \tag{6}$$

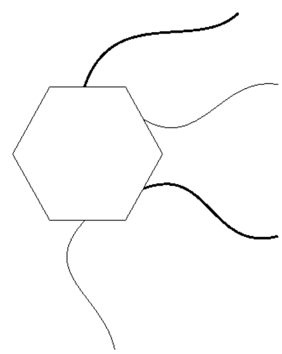
Bewijs. Neem eerst aan dat $p_c^b(T) + p_c^b(H) > 1$. Dan kunnen we een $p \in (0,1)$ kiezen zodat geldt: $p < p_c^b(T)$ en $1 - p < p_c^b(H)$. Laat de bonds $e \in E(T)$ onafhankelijk van elkaar open zijn met kans p, en laat elke duale bond $e^* \in E(H)$ open zijn dan en slechts dan als e gesloten is. We kunnen nu Stelling 5.8 toepassen, T voldoet namelijk aan de voorwaarden en $|C_T| = 1$ (alle sites zijn equivalent) dus C_T voldoet ook aan de voorwaarden. Dan hebben we met Stelling 5.8 dat bij de ongelijkheid $\mathbb{P}_p^s(x \to n) \leq \exp(-\alpha n/(\log n)^2)$ de rechterterm naar 0 gaat als $n \to \infty$. Nemen we nu een 'rechthoek' R zoals in de figuur hieronder. Deze rechthoek R is een eindige deelgraaf van T en H.



De stelling geeft dan dat de kans op een pad in deze rechthoek van links naar rechts in T of van boven naar beneden in H exponentieel afneemt. We kunnen dus de rechthoek R zo groot maken, zodat de kans op een pad in de rechthoek R in T van links naar rechts kleiner is dan $\frac{1}{2}$ en zo dat de kans op een pad in H van boven naar beneden kleiner is dan $\frac{1}{2}$. Maar Lemma 5.1 zegt dat bij dualiteit in het vlak er altijd een pad is van een van deze twee typen. Die kans zou dus samen 1 moeten zijn. Dit is een tegenspraak, dus er geldt niet dat $p_c^b(T) + p_c^b(H) > 1$.

We gaan nu bewijzen dat voor een willekeurige p, maximaal één van de percolatie kansen $\theta(T;p)$ en $\theta(H;1-p)$ strikt positief mag zijn. Hierbij is $\theta = \theta_0$ de kans dat de oorsprong in een oneindig cluster ligt.
Stel dat $\theta(T;p)$ en $\theta(H;1-p)$ beide strikt positief zijn. Zij E de gebeurtenis dat er een oneindig open cluster in T is en F de gebeurtenis dat er een oneindig open cluster in H is. Dan geldt dat $\mathbb{P}_p(E) \geq \theta(T;p) > 0$ dus $\mathbb{P}_p(E) = 1$ en $\mathbb{P}_{1-p}(F) \geq \theta(H;1-p) > 0$ dus $\mathbb{P}_{1-p}(F) = 1$.

We bekijken nu een zeshoek H_n in het driehoeksrooster T die gecentreerd is op de oorsprong, en zo groot is dat er n sites van het rooster T zitten op iedere zijde van de zeshoek. Omdat $\bigcup_n H_n = T$, is als we n groot genoeg nemen de kans dat uit tenminste één van de zijden van de zeshoek een oneindig pad in T vertrekt groter dan $1 - \epsilon$. In het bijzonder is dan de kans groter dan $1 - \epsilon$ dat er een open pad is in T dat de zeshoek verlaat via de 1^e zijde en dat er een open pad is in T dat de zeshoek verlaat via de 3^e zijde. Ook voor H geldt dat de kans groter is dan $1 - \epsilon$ dat er een open pad is in H dat de zeshoek verlaat via de 2^e zijde en dat er een open pad is in H dat de zeshoek verlaat via de 4^e zijde. Zie de figuur hieronder:



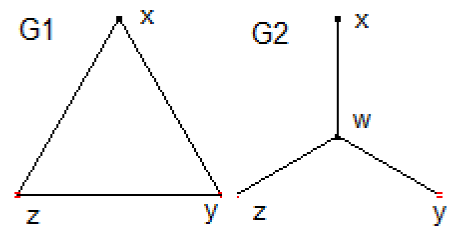
Als we de zijden van H_n in cyclische volgorde nummeren, laat dan L_i de gebeurtenis zijn dat een oneindig open pad in T de zeshoek H_n verlaat vanuit zijde i. Ofwel, L_i is de gebeurtenis dat er een oneindig open pad in T is met zijn beginpunt op de i^e zijde van H_n en de rest van het pad buiten H_n. Dan is $\bigcup_i L_i$ precies de gebeurtenis dat er een oneindig open cluster is dat H_n raakt, dus $\mathbb{P}(\bigcup_i L_i) \geq 1 - \epsilon$.
Laat L_i^* de gebeurtenis zijn dat een oneindig gesloten pad in T H_n verlaat vanaf de i^e zijde van de zeshoek (er is dan dus een oneindig open pad in H). We hebben dan dat $\epsilon \geq 1 - \mathbb{P}(\bigcup_i L_i)$ dus dat $\epsilon \geq \mathbb{P}(\bigcup_i L_i^*)$.
Omdat de gebeurtenissen L_i stijgend zijn en ze symmetrisch zijn (iedere zijde van de zeshoek heeft evenveel kans op een oneindig open pad) volgt ook met Harris' Lemma dat:
$\epsilon \geq \mathbb{P}(\cup_i L_i^*)$
$\geq \mathbb{P}(L_1^*) \ldots \mathbb{P}(L_6^*)$
$= (\mathbb{P}(L_1^*))^6$
$= (1 - \mathbb{P}(L_1))^6$
Dus $\epsilon^{1/6} \geq 1 - \mathbb{P}(L_1)$, dus $\mathbb{P}(L_1) \geq 1 - \epsilon^{1/6}$, en vanwege symmetrie geldt $\mathbb{P}(L_1) = \mathbb{P}(L_3)$.
Deze redenering geldt voor T, maar natuurlijk ook voor H. Daarom is
$\mathbb{P}(L_1 \cap L_2^* \cap L_3 \cap L_4^*) \geq 1 - 4\epsilon^{1/6}$, deze kans is dus ook positief. Verder is deze gebeurtenis onafhankelijk van de staten van de bonds binnenin H_n, en de kans dat alle bonds van H in de zeshoek gesloten zijn is ook positief (want de zeshoek

is eindig). Dus de kans op de doorsneden van deze twee gebeurtenissen is ook positief. Er is dus een positieve kans op een dubbel oneindig gesloten pad in H die twee oneindige open componenten in T scheidt. Dan is er dus een positieve kans op twee verschillende open clusters in T. We mogen Stelling 5.9 nu op T toepassen, want T is samenhangend, lokaal eindig, eindig type (aantal equivalentieklassen is 1), vatbaar en is een oneindige graaf. Deze stelling zegt dat er of 0 of 1 open cluster is in T, maar niet twee. Het voorgaande is dus in tegenspraak met deze stelling, dus hoogstens één van de twee theta's is strikt positief.

We weten nu dat hoogstens één van de twee theta's strikt positief is. Kies $p > p_c^b(T)$ willekeurig. Dan is $\theta(T, p) > 0$ en dus $\theta(H, 1-p) = 0$. Dan volgt $1 - p \leq p_c^b(H)$, ofwel $p \geq 1 - p_c^b(H)$. Dit geldt voor alle $p > p_c^b(T)$, dus geldt $p_c^b(T) \geq 1 - p_c^b(H)$, ofwel $p_c^b(T) + p_c^b(H) \geq 1$.
We hebben nu dus $p_c^b(T) + p_c^b(H) \leq 1$ en $p_c^b(T) + p_c^b(H) \geq 1$, dus moet gelden $p_c^b(T) + p_c^b(H) = 1$. $\square$

6 Ster-delta transformatie

We gaan nu de ster-delta transformatie bekijken. Laat G_1 en G_2 twee grafen zijn zoals in de volgende figuur:



Neem aan dat de bonds van G_1 onafhankelijk van elkaar open zijn met kans p_1 en de bonds van G_2 met kans p_2. We gaan de kansen bekijken dat bepaalde sites in deze grafen met elkaar verbonden zijn. In beide grafen zijn er vijf mogelijkheden waarop de sites $\{x, y, z\}$ connecties met elkaar hebben door open paden: ze zijn alledrie met elkaar verbonden, ze zijn geen van allen met elkaar verbonden of er is één paar sites met elkaar verbonden (maar niet met de derde site). Met andere woorden, de partitie van $\{x, y, z\}$ geïnduceerd door een subgraaf van G_1 of G_2 is $\{\{x, y, z\}\}$, $\{\{x\}, \{y\}, \{z\}\}$ of een van de drie partities isomorf met $\{\{x, y\}, \{z\}\}$.
De partitie $\{\{x, y, z\}\}$ kan in G_1 ontstaan doordat alledrie de bonds open zijn of dat er twee van de drie open zijn, in G_2 kan deze alleen ontstaan als alle bonds open zijn. De partitie $\{\{x\}, \{y\}, \{z\}\}$ kan in G_1 alleen ontstaan als alle bonds gesloten zijn, in G_2 kan deze ontstaan als alle bonds gesloten zijn of als één van de drie bonds open is. De partitie $\{\{x, y\}, \{z\}\}$ kan in G_1 alleen ontstaan als er precies één bond open is, en in G_2 wanneer er precies één bond gesloten is. In de volgende tabel staan de hierbij behorende kansen:

Partitie	**Kans in G_1**	**Kans in G_2**
$\{\{x, y, z\}\}$	$p_1^3 + 3p_1^2(1 - p_1)$	p_2^3
$\{\{x\}, \{y\}, \{z\}\}$	$(1 - p_1)^3$	$(1 - p_2)^3 + 3p_2(1 - p_2)^2$
$\{\{x, y\}, \{z\}\}$	$p_1(1 - p_1)^2$	$p_2^2(1 - p_2)$

We willen nu een kans p_1 en een kans p_2 vinden zodat de kans op een bepaalde verbinding van sites in G_1 een evengrote kans heeft als diezelfde verbinding in G_2. We gaan dus het volgende stelsel van vergelijkingen oplossen:

$$p_1^3 + 3p_1^2(1 - p_1) = p_2^3$$
$$(1 - p_1)^3 = (1 - p_2)^3 + 3p_2(1 - p_2)^2$$
$$p_1(1 - p_1)^2 = p_2^2(1 - p_2)$$

Omdat $p_1, p_2 > 0$ volgt uit de laatste vergelijking dat $p_2 = 1 - p_1$. Als we deze vergelijking substitueren in de eerste óf de tweede vergelijking, ontstaat bij beide de volgende vergelijking:

$$p_1^3 + 3p_1^2(1-p_1) = (1-p_1)^3 \tag{7}$$

Als we deze vergelijking uitwerken krijgen we de volgende vergelijking:

$$p_1^3 - 3p_1 + 1 = 0 \tag{8}$$

We zoeken nu de oplossing p_1 die voldoet aan $0 < p_1 < 1$. Dit doen we als volgt: substitueer $p_1 = 2\sin(x)$. Dan krijgen we de vergelijking:
$(2\sin(x))^3 - 3 * 2\sin(x) + 1 = 0$
$-2(3\sin(x) - 4\sin^3(x)) + 1 = 0$

We weten dat:
$\sin(3x)$
$= \sin(x)\cos(2x) + \cos(x)\sin(2x)$
$= \sin(x)(\cos^2(x) - \sin^2(x)) + \cos(x)(2\sin(x)\cos(x))$
$= 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)$
$= 3(1 - \sin^2(x))\sin(x) - \sin^3(x)$
$= 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$

We hebben hierbij de volgende standaard formules gebruikt:
$\sin(t+u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$
$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$
$\cos(2t) = \cos^2(t) sin^2(t)$
$\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$

De uitdrukking voor $\sin(3x)$ zien we ook in de vergelijking hierboven staan, we kunnen deze vervangen door $\sin(3x)$. Dan krijgen we $-2\sin(3x) + 1 = 0$. Als we nu $x = \pi/18$ invullen dan komt daar uit: $-2\sin(3\pi/18) + 1 = -2 * \frac{1}{2} + 1 = 0$. Dus $2\sin(\pi/18)$ is een oplossing van vergelijking (8).

We weten nu dat $p_0 = 2\sin(\pi/18)$ een oplossing is. Als we $p_1 - p_0$ uit vergelijking (8) wegdelen, krijgen we:

$$(p_1 - p_0)(p_1^2 + p_0 p_1 + (p_0^2 - 3)) = 0. \tag{9}$$

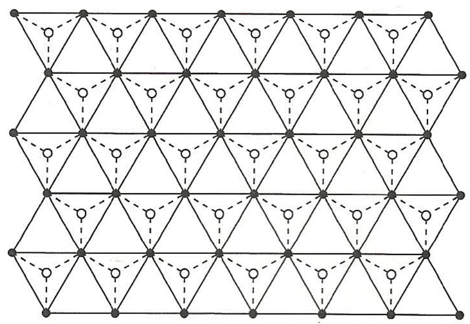
De wortels van de vergelijking $p_1^2 + p_0 p_1 + (p_0^2 - 3) = 0$ zijn gelijk aan

$$-\frac{p_0}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(p_0^2 - 4(p_0 - 3))}. \tag{10}$$

Omdat $0 < p_0 < 1$ en de discriminant $D = 12 - 3p_0 > 9$ zitten deze oplossingen nooit in $(0, 1)$. Dus is $p_0 = 2\sin(\pi/18)$ de enige oplossing.

Stelling 6.1. *Er geldt* $p_c^b(T) = 2\sin(\pi/18)$ *en* $p_c^b(H) = 1 - 2\sin(\pi/18)$.

Bewijs. Laat H' de graaf zijn die je krijgt wanneer alle driehoeken met de punt naar beneden in T vervangt door een ster met dezelfde verbindingspunten (ofwel hoekpunten, dus de ster-delta transformatie). Dit doen we op zo'n manier dat wanneer een bepaalde driehoek vervangen is door een ster, de aangrenzende driehoeken van die driehoek niet vervangen worden. H is dan gekoppeld aan graaf T doordat ze dezelfde verbindingspunten hebben. Dan is H' isomorf met H. In de figuur hieronder staat rooster T met rooster H':



Met een *domein* in T, of in H', bedoelen we een van de driehoeken waarop we de ster-delta transformatie hebben uitgevoerd, of de resulterende ster in H'.

Bekijk de kansmaten $\mathbb{P}^b_{T,p_0}$ waarin de bonds van T onafhankelijk van elkaar open zijn met kans p_0 en $\mathbb{P}^b_{H',1-p_0}$, waarin de bonds van H' onafhankelijk van elkaar open zijn met kans $1 - p_0$.

Een pad in T of H' tussen twee sites van T kan gesplitst worden in een reeks van paden P_i in domeinen D_i, met de eindpunten van P_i de verbindingspunten van D_i. Het volgt door de ster-delta koppeling dat twee sites x, y in T verbonden zijn door een open pad in T dan en slechts dan als ze verbonden zijn door een open pad in H'.
Laat C_0 het open cluser van T zijn die de site 0 bevat, en laat C_0' de open cluster van H' zijn die 0 bevat. Onder de koppeling hebben we dat $C_0' \cap V(T) = C_0$. Omdat C_0' een samenhangende subgraaf is van H' en sites van $V(H') \setminus V(T)$ alleen verbonden zijn met sites in $V(T)$ (welke graad 3 hebben), kan dus iedere site uit C_0' maximaal verbonden zijn aan 3 sites uit $V(T)$. Dus geldt dat $|C_0'| \leq 4|C_0' \cap V(T)|$. Uit de ster-delta transformatie volgt ook dat $|C_0| \leq |C_0'|$ dus geldt $|C_0| \leq |C_0'| \leq 4|C_0' \cap V(T)|$. Dan geldt dat

$$\mathbb{P}(|C_0| \geq n) \leq \mathbb{P}(|C_0'| \geq n) \leq \mathbb{P}(|C_0| \geq n/4)$$

voor iedere n. Als $n \to \infty$, wordt $\mathbb{P}(|C_0| \geq n)$ gelijk aan $\mathbb{P}(|C_0| = \infty) = \theta(T, p)$ en wordt ook $\mathbb{P}(|C_0| \geq n/4)$ gelijk aan $\mathbb{P}(|C_0| = \infty) = \theta(T, p)$. Voor de middelste term geldt dat $\mathbb{P}(|C_0'| \geq n)$ gelijk wordt aan $\theta(H; 1 - p_0)$ als $n \to \infty$. Omdat voor $n \to \infty$ de buitenste twee gelijk termen gelijk worden moeten ze ook gelijk worden aan de middelste term. Dus wordt $\theta(H'; 1-p_0) = \theta(T; p_0)$. Omdat H' isomorf is met H, hebben we dat $\theta(H; 1-p_0) = \theta(T; p_0)$. In Stelling (5.14) hebben we bewezen dat maximaal een van deze twee strikt positief kan zijn, dus moet gelden $\theta(H; 1-p_0) = \theta(T; p_0) = 0$. Dit geeft $p_c^b(T) \geq p_0$ en $p_c^b(H) \geq 1-p_0$. Omdat $p_c^b(T) + p_c^b(H) = 1$ zoals in Stelling 5.14 bewezen is, volgt dat $p_c^b(T) = p_0$ en $p_c^b(H) = 1-p_0$. In hoofdstuk 6 zagen we dat $p_0 = 2\sin(\pi/18)$, dus $p_c^b(T) = 2\sin(\pi/18)$ en $p_c^b(H) = 1 - 2\sin(\pi/18)$. $\square$

7 Conclusie

Voor een graaf Λ met bonds en sites en bijbehorende waarde p, bestaat er een kritieke waarde p_0 zodat geldt dat wanneer $p < p_0$ de kans op een oneindig cluster gelijk is aan 0, en wanneer $p > p_0$ de kans op een oneindig cluster gelijk is aan 1.
Voor het driehoeksrooster T is deze kritieke waarde $p_c^b(T) = 2\sin(\pi/18)$ en voor het zeshoeksrooster H is deze kritieke waarde gelijk aan $p_c^b(H) = 1-2\sin(\pi/18)$.

8 Referenties

Referenties

[1] Béla Bollobás and Oliver Riordan (2006), *Percolation*, Cambridge University Press

[2] Geoffrey Grimmett (1989), *Percolation*, Springer-Verlag New York Inc.

[3] John C. Wierman (1981), *Bond Percolation on Honeycomb and Triangular Lattices*, University of Minnesota

[4] A. Kolmogorov (1933), *Grundbegriffe der Warscheinlichkeitsrechnung*, Berlin: Julius Springer

[5] Menshikov M.V., Molchanov S.A., Sidorenko A.F., (1986), *Percolation theory and some applications*, Series of Probability theory, Mathematical statistics, Theoretical cybernetics

[6] Burton R.M., Keane M. (1989), *Density and uniqueness in percolation*, Communications in Mathematical Physics

[7] Harris T.E. (1960), *A lower bound for the critical probability in a certain percolation process*, Proc. Cambridge Philos. Soc.