De meetkunde van een relativistisch draaiende schijf

Bachelorscriptie

7 januari 2014

Begeleider: Dennis Dieks

Auteur: Tjeerd Fokkens

Samenvatting

Een algemeen misverstand over de speciale relativiteitstheorie van Albert Einstein is dat in die theorie de Euclidische meetkunde altijd geldig is. Veel mensen denken dat pas in de algemene relativiteitstheorie de niet-euclidische meetkunde om de hoek komt kijken. Dit is niet zo. Ook in de speciale relativiteitstheorie komen we niet-euclidische meetkunde tegen wanneer we kijken naar versnelde systemen. Een draaiende schijf bijvoorbeeld, bezit een niet-euclidische metriek. In deze scriptie worden ook lineair versnelde systemen bekeken en onderzocht of ook deze systemen een niet-euclidische metriek hebben. Twee kernbegrippen in deze scriptie zijn: de Ehrenfestparadox en de ruimteschipparadox van Bell.

Inhoudsopgave

0.1 Voorwoord

Deze scriptie is geschreven als afsluiting van mijn bacheloropleiding TWIN Natuur- en Wiskunde. Het vormt de afsluiting van mijn onderzoek dat ik bij het Instituut voor Geschiedenis en Grondslagen van de Natuurwetenschappen heb gedaan. Graag wil ik mijn begeleider Prof. Dr. Dennis Dieks bedanken voor zijn tijd en moeite om mij te helpen bij het schrijven van deze scriptie. Ook wil ik graag Istvan Kleijn bedanken voor zijn nuttige tips.

1 Wat is meetkunde?

Om de meetkunde van een draaiende schijf te karakteriseren in het relativistische regime, is het nodig eerst een goed begrip te hebben van meetkunde in het algemeen. Daarom behandel ik in dit hoofdstuk de vraag: “Wat is meetkunde?”. De vraag wordt op een min of meer chronologische wijze behandeld, dus we gaan terug naar wat we ‘het begin’ kunnen noemen. De periode rond 300 jaar voor Christus.

1.1 Euclidische meetkunde

In de periode van 300 jaar voor Christus, leefde de vader van de meetkunde: Euclides. In zijn beroemde 13-delige werk de *Elementen*, zette hij de kennis van de meetkunde uiteen die toen bekend was. Boek 1 van de *Elementen* begint met de definities van de basisbegrippen als punt en lijn. Als tweede volgen de algemene wenken die tegenwoordig afleidingsregels worden genoemd, en ten derde geeft Euclides de postulaten of axioma’s die hij voor waar aannam. Tot de definities behoren de volgende:

- Definitie 1: Een punt is dat wat geen deel heeft.
- Definitie 2: Een lijn is een lengte zonder breedte.
- Definitie 5: Een vlak is dat wat slechts een lengte en een breedte heeft.
- Definitie 7: Een plat vlak is een vlak dat gelijk ligt met de rechte lijnen erop.
- Definitie 15: Een cirkel is een vlakke figuur, omvat door een lijn, zodanig dat alle rechten die van een der binnen deze figuur gelegen punten tot deze lijn neerdalen, gelijk zijn.[1]

Het behoeft nauwelijks uitleg dat de definities dikwijls erg vaag zijn. In definitie 2 gebruikt Euclides het begrip lengte om het begrip lijn te definiëren. Maar wat is lengte? Ook de definitie van een cirkel ziet er niet zo elegant uit. Toch heeft Euclides erg zijn best gedaan om mooie definities te vinden, probeer het zelf maar eens beter te doen! Enkele afleidingsregels of algemene inzichten zijn de volgende:

- 1. Dingen die gelijk zijn aan hetzelfde, zijn gelijk aan elkaar. (als $a = b$, $b = c$, dan $a = c$)
- 2. Als men bij gelijke dingen gelijke voegt, dan zijn de totalen gelijk. (als $a = b$, dan $a + c = b + c$)

[1]

– Bron: online Nederlandse vertaling van de elementen: http://www.pandd.demon.nl/elementen.htm#1

- 8. Het geheel is groter dan het deel.

Deze algemene inzichten zijn misschien wel het meest exact van de dingen die Euclides heeft gedaan. Nog steeds zijn de wiskundigen het er over eens dat $a + c = b + c$ afgeleid kan worden uit $a = b$. Toch zijn niet alle afleidingsregels even rigoureus. Afleidingsregel nummer 8 is namelijk intuïtief zeer aannemelijk, maar deze regel is voor oneindige verzamelingen niet altijd geldig.

De definities en afleidingsregels vertellen ons nog niets over de meetkunde. De meetkunde begint pas bij de postulaten. Alle euclidische meetkunde zou besloten moeten zijn in deze postulaten (of axioma's), want dit zouden de enige dingen zijn die Euclides voor waar aannam.

- Postulaat 1: Laat geëist zijn van elk punt naar elk punt een rechte lijn te trekken.

- Postulaat 2: Laat geëist zijn een beëindigde rechte samenhangend in een rechte lijn te verlengen.

- Postulaat 3: Laat geëist zijn dat met elk middelpunt en elke afstand, een cirkel beschreven wordt.

- Postulaat 4: Laat geëist zijn dat alle rechte hoeken aan elkaar gelijk zijn.

- Postulaat 5: Laat geëist zijn dat, als een rechte, die twee rechten treft, de binnenhoeken aan dezelfde kant kleiner dan twee rechte hoeken maakt, de twee rechten, tot in het oneindige verlengd, elkaar ontmoeten aan de kant, waar de hoeken kleiner zijn dan twee rechte hoeken.

Postulaat 5 kan overigens vervangen worden door het axioma van Playfair:

- Gegeven een rechte lijn en een punt buiten de lijn, dan bestaat er een unieke lijn door dat punt zodat de lijnen elkaar niet snijden.

De twee axioma's zijn niet equivalent. Playfair's axioma is een strengere eis. Dat wil zeggen dat uit Playfair's axioma wel het vijfde postulaat van Euclides kan worden afgeleid, maar andersom niet. Voor de andere richting zijn alleen enkele van de overige postulaten nodig. Het axioma van Playfair voegt dus niets extra's toe ten opzichte van Euclides' versie.

1.2 Niet-euclidische meetkunde

1.2.1 Bolyai

János Bolyai ging rond 1920 twijfelen aan de waarheid van het vijfde postulaat. In 1932 publiceerde hij hierover in een appendix in een boek van zijn vader. Hieruit blijkt dat hij zelf (en zijn vader!) niet zoveel vertrouwen had in zijn ontdekkingen.

Bolyai experimenteerde met andere postulaten ter vervanging van het axioma van Playfair. Hij verving dit axioma door een axioma dat ermee in tegenspraak was. Er zijn twee mogelijkheden om Playfair's axioma tegen te spreken:

Door te zeggen dat er meerdere parallellen bestaan bij een gegeven lijn. Of door te zeggen dat er helemaal geen parallel bestaat bij een gegeven lijn. Bolyai construeerde een meetkunde die gebaseerd was op de eerste mogelijkheid: het bestaan van meerdere parallellen.

Bolyai gebruikt een andere definitie van rechte lijn. Een 'rechte lijn' door twee punten op een oppervlak, is de kortste weg over dat oppervlak tussen die twee punten. Omdat deze 'rechte lijnen' dan over het algemeen niet recht zijn is het beter te spreken van 'geodeten'. In het platte vlak komt een geodeet overeen met een rechte lijn, omdat de rechte lijn de kortste afstand is tussen twee punten. De meetkunde van Bolyai, was ook geschikt voor hyperbolische oppervlakken. Daarom wordt de meetkunde van Bolyai ook wel hyperbolische meetkunde genoemd. Omdat een hyperbolisch oppervlak gebogen is, zijn de geodeten in dit geval niet recht.

Eugenio Beltrami bewees in 1868 dat de meetkunde van Bolyai, equiconsistent was met de euclidische meetkunde. Consistent betekent dat er met de axioma's geen tegenspraak is af te leiden. Equiconsistent betekent dat wanneer de ene verzameling axioma's (ook wel: de ene theorie) consistent is, de andere dat ook is, en andersom. Omdat de euclidische meetkunde voor consistent werd genomen, werden wiskundigen gedwongen de hyperbolische meetkunde ook als consistent aan te nemen. Hierdoor onstond het idee dat er meerdere mogelijkheden waren voor de meetkunde en de vraag of de meetkunde 'waar' is, werd minder belangrijk. [Beltrami (1868 a)] [Beltrami (1868 b)]

1.2.2 Saccheri

Ongeveer anderhalve eeuw eerder, in 1733, verscheen 'Euclides Vindicatus', een boek geschreven door Girolamo Saccheri. Hierin blijkt dat Saccheri al bezig was met niet-euclidische meetkunde, al wist hij dat zelf nog niet. De titel betekent: 'Euclides gezuiverd'. Er wordt mee bedoelt dat Euclides door het boek gezuiverd was van alle twijfels die aan zijn meetkunde kleefden.

Veel wiskundigen twijfelden aan de waarheid van het vijfde postulaat en allerlei manieren zijn bedacht om het te bewijzen. Saccheri wilde dit ook bewijzen, maar ging op een andere manier te werk. Hij nam in het tweede deel van zijn boek aan, dat het postulaat niet waar was en probeerde zo een tegenspraak te bewijzen. Deze bewijsmethode wordt 'bewijs uit het ongerijmde' genoemd. In zijn werk leidt Saccheri stellingen af op de manier zoals Euclides dat deed. De niet-euclidische meetkunde vond Saccheri echter zó tegenintuïtief, dat hij ten onrechte beweerde op een tegenspraak te zijn uitgekomen. Een echte tegenspraak had Saccheri dus niet afgeleid en hij heeft de euclidische meetkunde evenmin bewezen. [Halsted (1920)]

1.2.3 Al-Khayyam en Nasir al-Tusi

De wortels van de niet-euclidische wiskunde gaan nog verder terug. In de elfde eeuw probeerde al-Khayyam, net als Saccheri, een tegenspraak te bewijzen vanuit de aanname dat de hoekensom van een vierhoek groter of kleiner was dan vier rechte hoeken. Ook probeerde hij het parallellenpostulaat van Euclides te vervangen door meer intuïtieve postulaten. Hij verving het postulaat door twee andere postulaten:

- Twee convergerende lijnen moeten elkaar snijden
- Twee convergerende lijnen divergeren niet in de richting waarin ze convergeren

Zijn resultaten beschreef hij in het boek *Uitleg van de problemen bij de postulaten van Euclides.* [Nasr (1976)]

Twee eeuwen later hield Nasir al-Tusi zich ook bezig met het parallellenpostulaat. Hij gebruikte het werk van al-Khayyam, maar keek verder. Hij probeerde het parallellenpostulaat te bewijzen uit het ongerijmde, precies als Saccheri zou doen. Het is onduidelijk of Saccheri op de hoogte was van deze publicaties, maar Ivor Grattan-Guinness beweert dat Saccheri geïnspireerd is geweest door een Latijnse uitgave van Nasir al-Tusi's werk uit 1594. [pagina 331 van Grattan-Guinness (1997)]

1.3 Het vergelijken van meetkundes

1.3.1 De axiomatische beschrijving

Meetkunde is in wezen niets anders dan een verzameling axioma's. Als de theorie, de verzameling axioma's, bekend is, dan zijn alle stellingen van de meetkunde af te leiden. De afleidingsregels zijn dan geoorloofde logische deducties.

Verschillen tussen meetkundes kunnen dan ook gekarakteriseerd worden door de verschillen in hun verzameling axioma's. Omdat het duidelijk moet zijn welke axioma's gebruikt worden en welke niet, is de meetkunde geformaliseerd. Eerst door Hilbert tot een bepaalde hoogte, en later door Tarski volledig. Op deze manier kon in de gaten gehouden worden of er geen verborgen aannames werden gedaan, en waren er geen onduidelijke definities zoals bij Euclides. Als we twee meetkundes met elkaar willen vergelijken, dan kunnen we de lijsten axioma's naast elkaar leggen en de verschillen daarin opzoeken.

1.3.2 De meetkundige beschrijving

Er is echter nog een andere manier om dit te doen. Deze manier is meer meetkundig. In het voorgaande werd beschreven dat de meetkunde van Bolyai de meetkunde is op een hyperbolisch oppervlak. De meetkunde kan dus beschreven worden door het oppervlak waarop de meetkunde wordt uitgevoerd. Een rechte lijn is een kortste weg tussen twee punt op dit oppervlak.

Om het begrip kortste weg te formaliseren, is het begrip metriek bedacht. De metriek g_{ij} is een tensor die voor elk punt in de ruimte de afstanden geeft, in de buurt van dat punt, in termen van de coördinaten. Onder een coördinatentransformatie verandert de tensor, maar dan wel zó dat het afstandsbegrip hetzelfde blijft. De afstand tussen twee punten in cartesische coördinaten is dus hetzelfde als de afstand voor die punten in poolcoördinaten.

Stel dat we voor onze ruimte de coördinaten x^1 en x^2 hebben. Verder geven we met dx^1 en dx^2 infinitesimale afstanden aan. De afstand tussen de punten (x^1, x^2) en $(y^1, y^2) = (x^1 + dx^1, x^2 + dx^2)$ wordt dan gegeven door: $ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{12}dx^1dx^2 + g_{21}dx^2dx^1$. De afstanden in de x^1-richting en x^2-richting worden als het ware gewogen. Met deze tensor kunnen we niet alleen zaken als afstand berekenen, maar ook bijvoorbeeld de kromming van een oppervlak.

De kromming van een oppervlak werd voor het eerst beschreven door Gauss. Het is een intrinsieke eigenschap van een (gebogen) oppervlak. Er bestaat ook zoiets als extrinsieke kromming, maar die eigenschap zegt, zoals de naam al doet vermoeden, niets over de meetkunde in het oppervlak. Gauss keek alleen naar oppervlakken met constante kromming. Als de kromming van een oppervlak van punt tot punt verandert, dan maken we gebruik van de Riemannkromming. Het oppervlak waarin we de meetkunde doen hoeft niet tweedimensionaal te zijn. Generalisaties naar 3 of meer dimensies zijn mogelijk.

De Riemannkrommingstensor geeft de kromming in elk punt van het Riemannoppervlak (het oppervlak waar je de meetkunde op wilt bekijken). De tensor wordt berekend met de metriek. Het platte vlak heeft een kromming die gelijk is aan nul. Een boloppervlak heeft een kromming die positief is. De meetkunde die hierop gedaan wordt, komt overeen met meetkunde waarin geen parallellen bestaan. Er is dus een verband tussen het parallellenpostulaat en de kromming van het oppervlak waarop de meetkunde wordt gedaan. Het blijkt dus dat er twee antwoorden zijn op de vraag “Wat is meetkunde?”:

1. meetkunde is een verzameling axioma’s (een theorie), of
2. meetkunde is de gangbare meetkunde, gespecificeerd voor een bepaald oppervlak.

1.3.3 Welke beschrijving is het meest geschikt?

De logische beschrijving gaat ervan uit dat de axioma’s geldig zijn voor de gehele ruimte waarop de meetkunde van toepassing is. De kracht van de axioma’s, namelijk dat de hele meetkunde in een paar zinnen te beschrijven is, is tegelijk ook een zwakte. De axiomatische beschrijving is niet toepasbaar op ruimten waarin meetkundige eigenschappen van plek tot plek verschillen. De beschrijving in termen van de Riemanntensor, maakt het wel mogelijk om dit te doen. Daarom gaan we de meetkunde van de draaiende schijf beschrijven in de taal van tensors, en niet in de taal van axioma’s.

1.4 Relativiteit van de meetkunde

Meetkunde als vakgebied, en niet als theorie, is op te delen in twee verschillende soorten: fysische meetkunde, en mathematische meetkunde. De fysische meetkunde probeert de structuur van de werkelijke ruimte te beschrijven en hecht dus veel belang aan de waarheid van de axioma’s. De vraag rijst dan: is het axioma in de werkelijkheid geldig of niet? De wiskundige, mathematische meetkunde bekommert zich niet om de vraag of een bepaald axioma het geval is of niet. Wiskundigen kijken naar theorieën die met axioma's te construeren zijn. Wiskundige meetkunde is dus een wetenschap van logische relaties en doet geen uitspraken over de werkelijkheid.

De oude Grieken probeerden de structuur van de ruimte af te leiden uit een paar axioma's die ze voor waar aannamen. Hun meetkunde zou kennis opleveren over de werkelijkheid. Een eventuele andere meetkunde, met andere axioma's, zou onherroepelijk tot een tegenspraak leiden. Nu weten we dat dit niet zo is. Er zijn meerdere verschillende consistente meetkundes op te stellen. Als we meer willen weten over de structuur van de ruimte, dan komen we van een koude kermis thuis. Elke consistente theorie is bruikbaar om de ruimte om ons heen te beschrijven. Poincaré schreef: "...there is no model which is imposed upon it [de werkelijke ruimte], it has a choice...". [Halsted (1958)]

Hans Reichenbach deelde deze opvatting, die hij de relativiteit van de meetkunde noemde. Voor de ruimte om ons heen is elke consistente theorie te kiezen. We kunnen ons echter voorstellen dat er rare dingen gebeuren wanneer een 'rechte lijn' geen rechte lijn meer is. Met andere woorden: wanneer de rechte lijn een kromming heeft, ongelijk aan nul. Als taalgebruik is het woord 'geodeet' bedacht. Een geodeet is de kortste afstand tussen twee punten. In de euclidische meetkunde komen geodeten overeen met rechte lijnen. Wanneer we de werkelijkheid echter beschrijven met een meetkunde waarin een geodeet geen rechte lijn is, dan levert dat hele tegenintuïtieve resultaten op. We moeten dan het bestaan van bepaalde 'krachten' aannemen die de voorwerpen niet meer langs een geodeet laten bewegen. De werkelijkheid eist namelijk dat voorwerpen in rust, zich langs een rechte lijn bewegen. In een model met gekromde geodeten bewegen deze voorwerpen dus niet langs een geodeet. Ze worden door mysterieuze krachten afgebogen. De werkelijkheid is dus te beschrijven door G en door F, waarbij G een bepaalde meetkunde is met een notie van rechte lijnen, en F als het ware de 'correctie' is zodat de natuurwetten op een juiste manier beschreven worden door het model. [Reichenbach (1957)]

Wanneer we begrippen als lengte en rechte lijn definieren, leggen we de meetkunde vast. Alle stellingen over driehoeken, cirkels, kubussen, etc. volgen dan uit deze definities. Deze manier om de meetkunde te karakteriseren, is een heel natuurlijke. We hoeven geen lengtebegrippen te gebruiken die door de menselijke geest bedacht zijn in een platonische wereld. In plaats daarvan kijken we naar dingen in de wereld om ons heen. We wijzen en zeggen: "dat noemen we lengte" en hieruit volgt vanzelf de meetkunde van de wereld om ons heen. Het is natuurlijk mogelijk om verschillende lengtebegrippen te kiezen in de werkelijkheid. Maar niet elke keuze is even bruikbaar.

1.5 Meten

Voor bijvoorbeeld de meetkunde op een rubberen vel waar een biljartbal op ligt, is de ruimte waarin de meetkunde wordt verricht niet overal hetzelfde. Het is daarom zinloos de meetkunde axiomatisch te beschrijven. De methode van

Riemann, meetkunde beschrijven aan de hand van de Riemannkromming, is een veel beter toepasbare methode. De Riemannkromming is aan te passen aan welk oppervlak dan ook. Het is ook aan te passen aan oppervlakken die niet overal hetzelfde zijn. Rubberen oppervlakken met meerdere biljartballen erop, bijvoorbeeld. Dergelijke oppervlakken zijn moeilijk te beschrijven met axioma's omdat die dan niet overal geldig zijn. We zouden een paar axioma's kunnen bedenken die wel overal geldig zijn, maar er zijn dan nog andere axioma's nodig om de rest van de meetkunde te beschrijven die niet overal geldig zijn. Bijvoorbeeld in de buurt van de biljartbal wel, maar verderop niet.

Het eerste probleem wat dus overwonnen moet worden is het definiëren van afstanden. Samen met dit probleem komt het probleem: "Hoe meet je afstanden?" Een afstand is te meten door een standaardafstand een aantal keren in te passen in de te meten afstand. De standaardafstand is willekeurig gekozen. Op deze manier worden afstanden in de werkelijkheid uitgedrukt in termen van de standaardafstand. Meten is dus niet iets absoluuts, maar de lengte van iets is altijd de verhouding van die lengte tot de standaardafstand.

In Parijs ligt de standaard meter. Deze reep van platina definieert alle afstanden die we in de werkelijkheid meten. Wanneer de reep uitzet door toevoeging van warmte, krimpen alle afstanden in de werkelijkheid ten opzichte van deze meter. En als de reep korter wordt, worden alle andere afstanden in de werkelijkheid ten opzichte van de standaard, langer. Merk op dat de afstanden niet werkelijk veranderen, alleen de verhouding tussen deze lengtes en de standaard. Dit is duidelijk niet wat we willen. Een goede standaard moet zo gekozen zijn, dat deze zo min mogelijk verandert vergeleken met afstanden in de werkelijkheid. [Reichenbach (1957)]

1.5.1 Definitie van tijd

We meten geen tijd. Het enige wat we meten is de duur van processen. We stellen ons een wereld voor waarin niets gebeurd, waarin alle processen tot stilstand zijn gekomen. De wind is gaan liggen, de aarde draait niet meer. Mensen staan stil op straat en kijken in het niets. Hun horloges staan ook stil. In zo'n wereld zullen we zeggen dat de tijd stilstaat. Maar misschien loopt de tijd wel gewoon door. Het enige wat we waarnemen is dat alle processen stilstaan.

Daarom is het meten van tijd eigenlijk het meten van de duur van een proces. Wederom hebben we een standaardproces nodig, waarmee we alle andere processen kunnen uitdrukken. Een standaardproces S vindt een aantal keren plaats tijdens een proces dat we willen meten. Het gevonden aantal is dan de duur van het proces, de tijd die het kost voor het proces. Ook in dit geval is het van belang dat het standaardproces niet veranderd van duur.

Als we het leeglopen van een zandloper als standaard aanhouden, dan moeten we accepteren dat in vrije val, de tijd stilstaat. De zwaartekracht die normaal gesproken het zand door de zandloper heen trekt, trekt nu met een gelijke versnelling aan de zandloper zelf. Er zal in vrije val dus geen zand door de zandloper gaan. Toch gaan ander processen wel gewoon door tijdens een vrije val. Je hartslag bijvoorbeeld, stopt niet als je uit een vliegtuig springt. Een zandloper is dus niet een goed proces om alle andere processen mee te meten.

Op dezelfde manier werkt een slinger, die ook gebruik maakt van de zwaartekrachtsversnelling, niet goed als een standaardproces. Vibraties van kwartskristallen worden wel gebruikt als nauwkeurige klokken, maar ook hier vinden we problemen die het onmogelijk maken deze processen als standaard te kiezen.

De definitie van een seconde, en dus van tijd is: 9 192 631 770 perioden van de straling die correspondeert met de overgang tussen de twee hyperfijnenergieniveaus van de grondtoestand van een 133-cesiumatoom in rust bij een temperatuur van 0 K. We gaan ervan uit dat deze periode niet verandert door bijvoorbeeld toevoeging van warmte.

We gaan er ook van uit dat een periode even lang duurt als elke andere willekeurige periode. Dit hoeft niet zo te zijn, men kan zich voorstellen dat een periode tien keer zo lang duurt als een willekeurig andere, maar wanneer alle processen in de natuur op eenzelfde manier vertragen, wat is dan het verschil? Er is geen 'absolute tijd' waarmee we de perioden van een cesiumatoom (of andere perioden) kunnen meten, want zo is de tijd niet gedefinieerd.

Merk op dat we halve perioden moeilijk kunnen meten. De helft van de duur van een proces in de natuur, is alleen te meten door een proces met een kortere duur precies in de helft van het te meten proces te passen. Als dit niet precies lukt, dan weten we niet zeker of we op de helft van het proces zitten. Het is dus zaak dat we een proces nodig hebben dat heel kort duurt, zodat alle andere processen zo nauwkeurig mogelijk daarin uitgedrukt kunnen worden. Dit is de reden dat we de periode van een cesiumatoom gebruiken als tijdsstandaard. [Arzeliès (1965)]

1.5.2 Definitie van lengte

Nu we een definitie hebben van tijd, kunnen we ook een definitie geven van lengte. Lengte definiëren door het te vergelijken met een standaard, brengt veel problemen met zich mee. Daarom definiëren we lengte als de afstand die licht aflegt in vacuüm in 1/299.792.458e deel van een seconde. Omdat licht altijd dezelfde snelheid heeft in het vacuüm, ook voor eenparig rechtlijnig bewegende waarnemers, lijkt dit een heel natuurlijke definitie van lengte.

1.5.3 Coördinatenstelsel

Het enige wat een natuurkundige nog nodig heeft is een coördinatenstelsel waarin de metingen voltrokken worden. We definiëren zo'n stelsel als een stelsel waarin de tweede wet van Newton geldig is in de eenheden die in dat stelsel gedefinieerd zijn. Het stelsel wordt ook wel inertiaalstelsel genoemd en is een stelsel dat niet onderhevig is aan versnellingen.

Punten in de ruimte worden door het stelsel beschreven met coördinaten. Coördinaten zijn niets meer dan labels die aan elk punt in de ruimte worden toegekend. [Dieks (2004)] Het afstandsbegrip zit dan ook nog niet bevat in het coördinatenstelsel. Een normaal cartesiaans assenstelsel met en x-, y-, en

z-as geeft elk punt in de ruimte een x-, y-, en z-coördinaat, zeg (x_1, y_1, z_1). Dit betekent niet automatisch dat het punt vanaf de oorsprong te bereiken is door een afstand x_1 (in een bepaalde eenheid), in de x-richting af te leggen, een afstand y_1 in de y-richting en een afstand z_1 in de z-richting. Het begrip afstand is zo gedefinieerd dat die in verschillende inertiaalstelsels als verschillend wordt gemeten. Coördinaten blijven echter gewoon hetzelfde.

1.5.4 Metriek

Al eerder kwam de metriek ter sprake. Alleen een coördinatenstelsel is niet genoeg omdat hierin nog niet een lengtebegrip zit. Het lengtebegrip wordt geïnduceerd door de metriek. Een metriek is een functie die voor elk punt in de ruimte de lengte geeft van infinitesimale lijnelementjes in de buurt van dat punt. Omdat de metriek voor elk punt in de ruimte de afstanden in de buurt van dat punt geeft, kunnen ook 'grotere' (dat wil zeggen: niet-infinitesimale) afstanden uitgedrukt worden in de coördinaten.

2 Wat is relativiteitstheorie?

De speciale relativiteitstheorie is gebaseerd op twee postulaten. Begrippen als gelijktijdigheid en lengte verliezen volgens deze theorie hun absolute karakter, anders dan we in de newtoniaanse mechanica gewend zijn. Over de algemene relativiteitstheorie, de uitbreiding van de sceciale relativiteitstheorie, wordt in deze scriptie niet uitgewijd.

2.1 Einsteins postulaten

De postulaten die Einstein gebruikte om zijn theorie mee op te zetten, zijn allereerst niet zomaar uit de lucht gegrepen. Wiskundigen geven er niet om of axioma's waar zijn of niet, maar als we een theorie willen opstellen die de natuur moet beschrijven, dan moeten de axioma's ook waar zijn.[2] Beide postulaten hebben een grondige experimentele verificatie. Wanneer we er dus vanuitgaan dat ze waar zijn, is dat niet gek.

2.1.1 Einsteins eerste postulaat

Dit postulaat wordt ook wel het relativiteitsprincipe genoemd. Het zegt dat alle natuurwetten hetzelfde zijn in inertiaalstelsels. Dit zijn stelsels die eenparig rechtlijnig bewegen. Deze stelsels worden niet versneld, dus ook roterende stelsels zijn uitgesloten.

Een concreet voorbeeld van een inertiaalstelsel is een trein die met constante snelheid recht vooruit beweegt.[3] Het eerste postulaat zegt dat de natuurwetten in die trein hetzelfde zijn als de natuurwetten in een trein die 'stilstaat'. Merk op dat 'stilstaan' een relatief begrip is. Een stilstaand object staat altijd stil, *ten opzichte van iets anders.*

Nu even terug naar de natuurwetten in de rijdende trein. Wanneer we een balletje laten vallen van een bepaalde hoogte in deze trein, dan valt dat balletje loodrecht naar beneden. Het is niet zo dat de trein onder het balletje door rijdt tijdens zijn val. Het balletje bewoog immers voor het loslaten met dezelfde snelheid als de trein. Als het zo zou zijn dat de trein onder het balletje door zou rijden, dan zou het balletje tijdens zijn val 'afgeremd' moeten worden, maar waardoor? We zien dus in dat een balletje gewoon naar beneden valt in een rijdende trein, net als in een 'stilstaande' trein.

2.1.2 Einsteins tweede postulaat

Het tweede postulaat is intuïtief moeilijker te bevatten dan het eerste postulaat. Het zegt dat de lichtsnelheid in vacuüm onafhankelijk is van de snelheid van de lichtbron. Een vergelijking met geluid is op zijn plaats. Geluid plant zich

[2]Zie p.4 van [Reichenbach (1965)]

[3]Merk op dat zo'n trein in de werkelijkheid niet voorkomt. Het aardoppervlak is gekromd, de aarde beweegt om zijn as, de aarde draait om de zon, de zon... In de praktijk zijn deze effecten klein en kunnen verwaarloosd worden. Dus mogen we een trein opvatten als een inertiaalstelsel.

voort door botsingen van moleculen in een materiaal. Voor waarnemers die ten opzichte van het materiaal bewegen, heeft geluid dus steeds een andere snelheid.

Vroeger dachten de natuurkundigen dat licht een medium nodig had om zich voort te planten, net als geluid. Dit medium was de mysterieuze *ether*. Experimentele verificatie is er voor deze ether nooit gevonden. Michelson en Morley hebben in 1887 experimenteel aangetoond dat de ether, als die al zou bestaan, geen invloed heeft op de snelheid van licht. Licht lijkt dus geen medium nodig te hebben om zich te kunnen voortplanten. Een lichtstraal 'merkt' dus zelf niet of de bron waar het licht vandaan komt, in beweging is of niet. Er is geen referentie, geen medium waaraan een lichtstraal dat zou kunnen merken.

In een trein betekent dit het volgende. Een waarnemer in de trein meet als lichtsnelheid c, ongeacht in welke richting de lichtstraal gaat. Een waarnemer in rust, die dezelfde trein voorbij ziet komen, meet als lichtsnelheid ook c. Ongeacht of het licht in de richting gemeten wordt, waar de trein naartoe gaat of in de richting waar de trein vandaan komt. De snelheid van de trein moeten we dus niet optellen bij de lichtsnelheid die een waarnemer in de trein meet.

Dit is erg tegenintuïtief omdat we in het dagelijks leven, gewend zijn snelheden gewoon bij elkaar op te kunnen tellen. We stellen ons twee auto's voor die elk 30km/h rijden in tegengestelde richting. De bestuurder van elke auto zal dan zeggen dat de andere auto met $30 + 30 = 60$km/h op hem of haar afkomt. Voor licht gaat dit dus niet op, maar in het dagelijks leven hebben we hier geen last van.

Het tweede postulaat is slechts tegenintuïtief omdat we anders gewend zijn, maar nauwkeurige metingen hebben het postulaat keer op keer bevestigd.

2.2 Lorentztransformaties

De zogenaamde Galileitransformatie is: $x' = x - vt$, waarbij x' de plaatscoördinaat is in een inertiaalstelsel S' en x de plaatscoördinaat in een ander coördinatenstelsel S dat met een snelheid $-v$ ten opzichte van S' beweegt. Deze transformatie zet de plaatscoördinaat van het ene stelsel om in de plaatscoördinaat van het ander stelsel.

De Galileitransformatie is in tegenspraak met het tweede postulaat van Einstein. We willen graag de Galileitransformatie verbeteren en we nemen daarvoor aan dat de transformatie eruit ziet als: $x' = \gamma(x - vt)$ voor een nader te bepalen parameter γ. Het eerste postulaat van Einstein zegt dat we ook de volgende transformatie moeten hebben: $x = \gamma(x' + vt')$. Want als S met een snelheid $-v$ ten opzichte van S' beweegt, dan beweegt S' tenopzichte van S met een snelheid v. Merk op dat we hier t' schrijven in plaats van t. We mogen niet aannemen dat de tijd in beide stelsels even snel loopt, daarom staan we het toe dat t niet gelijk hoeft te zijn aan t'. Straks zullen we zien dat dit in het algemeen ook niet zo is. De tweede vergelijking lossen we op voor t' en we krijgen:

$$t' = \frac{x}{v\gamma} - \frac{x'}{v}$$

Hier vullen we de eerste vergelijking voor x' in en we krijgen:

$$t' = \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right)\frac{x}{v} + \gamma t$$

Nu gebruiken we het tweede postulaat. Een lichtsignaal dat in S op tijdstip $t = 0$ door het punt $x = 0$ gaat, bevindt zich op positie $x = ct$ op tijdstip t. Volgens het tweede postulaat geldt dan ook: $x' = ct'$. Daarom geldt:

$$c = \frac{x'}{t'} = \frac{\gamma\,(x - vt)}{\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right)\frac{x}{v} + \gamma t} = \frac{\frac{x}{v} - v}{\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right)\frac{x}{vt} + 1} = \frac{c - v}{\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right)\frac{c}{v} + 1},$$

dus

$$\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right)\frac{c}{v} + 1 = 1 - \frac{v}{c},$$

dus

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2},$$

en daarom

$$\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Voor $v = 0$ moet gelden dat $\gamma = 1$, dus we hoeven alleen te kijken naar positieve γ. Nu is:

$$t' = \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right)\frac{x}{v} + \gamma t = \gamma\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right)\frac{x}{v} + \gamma t = \gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2} - 1\right) = -\gamma\frac{v^2}{c^2},$$

Dus we krijgen de Lorentztransformaties:

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \\ x' = \gamma\,(x - vt) \end{cases}$$

met

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

2.3 Tijdsdilatatie

Gebruikmakend van de Lorentztransformaties kunnen we kijken wat er gebeurd met de tijd voor waarnemers die ten opzichte van elkaar met een constante snelheid bewegen. Stel dat een stilstaande waarnemer in inertiaalstelsel S een tijdsinterval Δt meet voor twee gebeurtenissen op dezelfde plaats (dus $\Delta x = 0$). Een waarnemer W' die met constante snelheid v ten opzichte van S beweegt meet ook de tijd tussen de gebeurtenissen en krijgt dan als uitkomst:

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t + \frac{v\Delta x}{c^2} \right) = \gamma \Delta t > \Delta t$$

omdat $\gamma > 1$ voor $v \neq 0$. Het tijdsinterval Δt in S is dus kleiner dan het tijdsinterval $\Delta t'$, door W' gemeten. Als de wijzer van de klok van W' bijvoorbeeld vijf seconden tikt, dan tikt de wijzer in S misschien maar vier seconden. Dit betekent dat de tijd voor een bewegend stelsel langzamer verloopt, dan voor een stilstaand stelsel. Een bewegende klok loopt dus langzamer dan een stilstaande.

2.4 Lengtecontractie

Een ander tegenintuïtief gevolg van de Lorentztransformaties is lengtecontractie, het effect dat voorwerpen korter worden als ze een snelheid hebben ten opzichte van de waarnemer.

Stel dat een waarnemer W in S een lengte Δx meet. Dit wil zeggen: er is een liniaal met lengte Δx in S waarvan de uiteinden voor elk tijdstip t samenvallen met zekere punten $x = 0$ en $x = \Delta x$ in S. We gaan berekenen wat er met deze punten gebeurt voor een waarnemer W' in een stelsel S' dat met een snelheid v ten opzichte van S beweegt. De waarnemer W' meet de uiteinden van de liniaal in zijn stelsel op de plaatsen x_1' en x_2'. Voor het eerste punt geldt:

$$0 = x = \gamma \left(x_1' + vt' \right),$$

dus geldt $x_1' = -vt'$. En voor het andere punt geldt:

$$\Delta x = x = \gamma \left(x_2' + vt' \right),$$

dus hier wordt het punt gegeven door $x_2' = \frac{\Delta x}{\gamma} - vt'$.

Als W' nu de afstand tussen de punten x_1' en x_2' gaat berekenen, dan zien we dat

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = \frac{\Delta x}{\gamma} - vt' - (-vt') = \frac{\Delta x}{\gamma}.$$

Omdat altijd geldt dat $\gamma \geq 1$, zien we dat $\Delta x' \leq \Delta x$. Dus voor een stilstaande waarnemer worden bewegende linialen korter in hun bewegingsrichting, en dit geldt dus ook voor alle andere voorwerpen.

2.5 Relativiteit van gelijktijdigheid

Gelijktijdigheid treedt in de newtoniaanse mechanica op wanneer twee gebeurtenissen op hetzelfde tijdstip t gebeuren. Deze gebeurtenissen zijn dan gelijktijdig voor àlle waarnemers omdat de tijd voor iedere waarnemer gegeven wordt door het tijdscoördinaat t. We kunnen in de Lorentztransformaties zien dat tijd een relatief begrip is. Voor een waarnemer W die met een snelheid ten opzichte van een waarnemer W' beweegt, verloopt de tijd langzamer dan voor waarnemer W'. Het blijkt dat ook gelijktijdigheid een relatief begrip is.

Om dit te onderzoeken stellen we ons een ruimteschip voor dat met een snelheid v ten opzichte van ons beweegt. In het midden van het ruimteschip doet de kapitein een lamp aan. De lichtstralen bereiken de voor- en achterkant van het ruimteschip gelijktijdig voor alle personen in het ruimteschip omdat het licht met een constante snelheid c beweegt voor deze waarnemers en omdat de lamp precies in het midden van het ruimteschip werd aangedaan.

Voor ons stilstaande waarnemers, bereikt het licht van de lamp eerst de achterkant van het ruimteschip, en daarna de voorkant. Dit komt doordat de achterkant van het ruimteschip zich tegen het licht in heeft verplaatst, en de voorkant met het licht mee. Dus volgens de relativiteitstheorie kunnen gebeurtenissen gelijktijdig plaatsvinden voor de ene waarnemer, maar niet voor een waarnemer met een andere snelheid.

Voor deze situatie moet worden opgemerkt dat de gebeurtenissen beide plaatsvonden op verschillende plekken. Wanneer twee gebeurtenissen plaatshebben op dezelfde plek, is gelijktijdigheid niet meer relatief. De gebeurtenissen zijn dan gelijktijdig voor alle waarnemers. Dit was te verwachten, want wanneer twee gebeurtenissen op dezelfde plaats èn tijd optreden, dan zijn de twee gebeurtenissen samen één gebeurtenis.

2.6 Het optellen van snelheden

Volgens het relativiteitsprincipe van Galileo Galilei mogen snelheden u en v, wanneer ze in dezelfde richting wijzen, bij elkaar opgeteld worden tot een snelheid $w = u + v$. We gaan nu aantonen dat deze methode van het optellen van snelheden niet geldig is in de relativiteitstheorie.

We beschouwen een voorwerp P dat in het stelsel S beweegt met een snelheid u. Het stelsel S' beweegt met een snelheid v ten opzichte van S en v en u staan in dezelfde richting. We willen weten wat de snelheid van P is, gemeten in het stelsel S'. Dat P een (constante) snelheid u heeft in S betekent dat het voorwerp in een tijdsinterval Δt een afstand Δx aflegt. Het tijdsinterval en de afstand worden in S gemeten als:

$$\begin{cases} \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right) \\ \Delta x' = \gamma\left(\Delta x - v\Delta t\right) \end{cases}$$

De snelheid in het stelsel S' is de in S' gemeten afstand, gedeeld door de in

S' gemeten tijd. Dus de snelheid in S' is:

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma\left(\Delta x - v\Delta t\right)}{\gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)} = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}} = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}.$$

Wanneer we in deze formule invullen: $u = c$, dan krijgen we: $u' = \frac{c-v}{1-\frac{v}{c}} = c\frac{c-v}{c-v} = c$. Dit sluit volledig aan bij het tweede postulaat van Einstein. De lichtsnelheid is hetzelfde voor elke waarnemer, ongeacht de (constante) snelheid van de waarnemer.

Een andere opmerking die hierbij gemaakt kan worden is dat snelheden lager dan de lichtsnelheid, opgeteld altijd een snelheid geven die de lichtsnelheid niet overstijgt. Ook als één van de snelheden gelijk aan c is, is de opgetelde snelheid niet groter dan c en zelfs wanneer beide snelheden gelijk zijn aan c is de opgetelde snelheid niet groter dan c. De lichtsnelheid is dus een limietsnelheid. Voorwerpen met en snelheid lager dan de lichtsnelheid kunnen nooit versneld worden tot een snelheid die hoger is dan de lichtsnelheid. Dit zegt echter niets over deeltjes die al een snelheid hebben die hoger dan de lichtsnelheid is, zogenaamde tachyonen, maar vooralsnog zijn deze deeltjes nooit gemeten.

2.7 Andere effecten van de speciale relativiteitstheorie

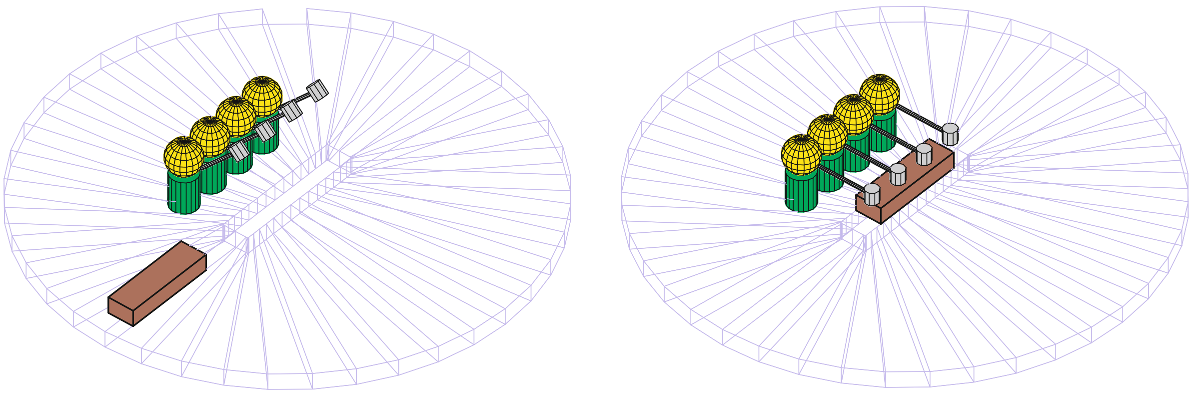
De massa van een deeltje is voor waarnemers met een verschillende snelheid niet gelijk. Als een stilstaand voorwerp een massa m_1 heeft, dan meet een bewegende waarnemer een massa $m_2 = \gamma m_1$ van het voorwerp.

Misschien wel de beroemdste formule is: $E = mc^2$. Deze formule is ook een gevolg van de speciale relativiteitstheorie en zegt dat massa equivalent is met energie, op een factor c^2 na. Een kleine massa bevat dus een grote hoeveelheid energie, waar in kernreactoren handig gebruik van wordt gemaakt.

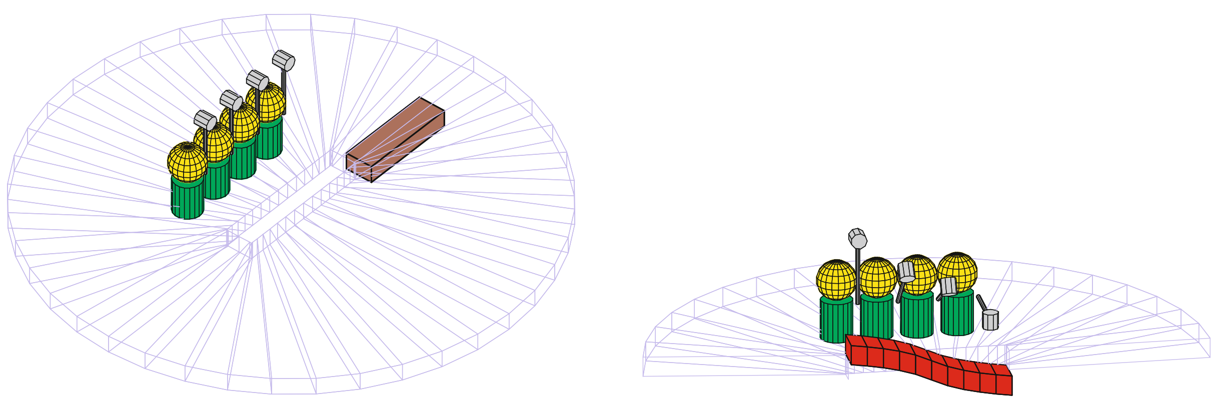
2.7.1 Rigiditeit

In de speciale relativiteitstheorie bestaat rigiditeit niet. In een volledig rigide staaf zou de geluidssnelheid oneindig groot zijn. We hebben gezien dat dit onmogelijk is. Een ander leerzaam voorbeeld dat illustreert dat rigiditeit niet bestaat is het volgende. Stel dat we een langwerpig wak in het ijs hebben. Naast het wak staan vier hamers die gelijktijdig in het wak kunnen slaan. Een plank komt aanzoeven over het ijs. De plank past in rust niet in het wak, maar omdat de plank een snelheid heeft is deze korter geworden en past de plank wel in het wak. Op het moment dat de plank zich precies boven het wak bevindt, slaan de hamers naar beneden. (Zie figuur: 1) De plank vervolgt zijn weg onder het ijs. Nu bekijken we de situatie vanuit het stelsel dat met de plank meebeweegt. In dit stelsel beweegt het wak, dus het wak wordt korter. Hoe kan het dan zijn dat de plank toch door het wak gaat?

De oplossing van deze schijnbare tegenspraak is gelegen in het feit dat gelijktijdigheid in het ene stelsel, niet geldt in een bewegend stelsel. De hamer die de voorkant van de plank door het wak slaat, doet dit dus eerder dan alle



Figuur 1: De plank komt aanzoeven en op het moment dat de plank boven het wak is, slaan de hamers naar beneden. Afbeeldingen zijn ontleend aan [Cooperstock en Tieu (2012)]



Figuur 2: De plank zet zijn reis voort onder het ijs. In het andere stelsel ziet de situatie er heel anders uit. Afbeeldingen ontleend aan: [Cooperstock en Tieu (2012)]

andere hamers. Wanneer alleen de laatste hamer nog moet slaan, is de rest van de plank al onder water. De eerst rigide plank is dus in het meebewegende stelsel erg flexibel geworden. (Zie figuur: 2) Het is erg tegenintuïtief dat beide situaties hetzelfde fenomeen beschrijven. We zouden daardoor kunnen denken dat de paradox nog niet is opgelost. Wanneer de plank wordt terugversneld als de voorkant net in het water is verdwenen, dan moet de rest van de plank nog in het wak verdwijnen. In het stilstaande stelsel zouden we dan een volledig natte plank hebben, en in het meebewegende stelsel een plank die alleen aan het uiteinde nat is.

We maken hier echter een denkfout. De denkfout heeft weer te maken met de relativiteit van gelijktijdigheid. Wanneer de voorkant van de plank wordt terugversneld, wordt de achterkant van de plank nog niet terugversneld. De versnelling kan niet instantaan van de ene kant van de plank, de andere kant bereiken. De rest van de plank beweegt zich du nog eerst in de richting waarin de plank voorheen ging, vervolgens wordt de rest van de plank door de overige drie hamers om de beurt in het wak geslagen en daarna wordt ook de rest van de plank terugversneld. In deze situatie hebben we dus ook te maken met een plank die helemaal nat is, en niet voor de helft. [Cooperstock en Tieu (2012)]

3 De meetkunde op een relativistisch draaiende schijf

In 1909 publiceerde Paul Ehrenfest een artikel over een paradox die hij was tegengekomen in de speciale relativiteitstheorie. [Ehrenfest (1909)] Hij beschouwde een draaiende schijf. De speciale relativiteitstheorie zegt dat de omtrek van die schijf korter moet worden door lengtecontractie. De straal van de schijf zou echter even groot blijven. Als we nu de omtrek door de straal delen, krijgen we een waarde die kleiner is dan π.

Men vroeg zich ook af wat er met de meetkunde op de schijf gebeuren zou. De meetkunde is in de speciale relativiteitstheorie toch altijd euclidisch? Einstein boog zich later ook over het probleem wat later de aanleiding zou worden voor de algemene relativiteitstheorie. De paradox bleek lastiger dan eerst gedacht werd.

Kleine meetstokjes die op de omtrek van de schijf worden gelegd zijn namelijk ook onderhevig aan lengtecontractie. Het blijkt dat de paradox opgelost kan worden door de elastische eigenschappen van het materiaal van de schijf mee te nemen in de redenering. Doordat de omtrek samentrekt, ontstaat er krachten in de schijf die de schijf samendrukken. Afhankelijk van de elastische eigenschappen van het materiaal wordt de straal ook daadwerkelijk kleiner.

Wanneer de straal bijvoorbeeld heel elastisch is, kan deze makkelijk worden ingedrukt. Meetstokjes die op de omtrek liggen krimpen door Lorentzcontractie. De omtrek van de schijf zelf krimpt ook, en wel even veel als de meetstokjes. Dus de lengte van de omtrek blijft onveranderd, omdat er evenveel meetstokjes passen in de omtrek. De straal krimpt. Dus de verhouding tussen de omtrek en de straal wordt groter dan π.

Wanneer de schijf helemaal niet elastisch is, kan de straal nauwelijks worden ingedrukt. De straal blijft nagenoeg van dezelfde lengte. De rand van de schijf kan bijna niet inkrimpen omdat deze wordt tegengehouden door het binnenste van de schijf. Meetstokjes die op de rand van de schijf worden gelegd, krimpen wel, waardoor de omtrek van de schijf groter wordt. Er zijn namelijk meer meetstokjes nodig om de omtrek op te vullen. Ook in dit geval is onze verhouding tussen omtrek en straal groter dan π.

In beide gevallen hebben we dus een resultaat dat precies tegengesteld is aan de hypothese die aanvankelijk door Ehrenfest is geformuleerd.

Over de paradox is vandaag de dag nog veel discussie. Het probleem blijkt heel veel verschillende aspecten te hebben, wat zou kunnen resulteren in een aantal zeer omvangrijke boeken. Omdat dit een bachelorscriptie betreft, en dus niet een volledige verhandeling hoort pretenderen te zijn, ga ik me focussen op de ruimtelijke meetkunde van de schijf. Met name richt ik met op de geodeten van de schijf. Dit betekent dat ik me niet bezig houd met de elastische eigenschappen van het materiaal van de schijf. Sterker nog, de schijf die ik bestudeer is niet gemaakt van 'materiaal'. Ik bestudeer een draaiend stelsel, dus de 'schijf' is niets meer dan een paar coördinaten, een draaiende ruimte.

De theorie in de volgende paragrafen is voornamelijk gebaseerd op de corresponderende sectie van het boek *Relativistic Kinematics* van Henri Arzeliès. [Arzeliès (1965)] Later in mijn onderzoek kwam ik erachter dat ook Christian Møller hierover geschreven heeft in zijn boek *The Theory of Relativity.* [Møller (1952)] Het boek van Møller komt uit 1952 en is eerder geschreven dan het boek van Arzeliès, wat geschreven is in 1965. Arzeliès's werk is dus niet helemaal origineel, maar het is wel uitgebreider dan Møllers werk. Later hebben D.G. Ashworth en P.A. Davies een artikel geschreven over het onderwerp waarin de lengte van de geodeten werd berekend evenals enkele andere methoden om de eerder gevonden vergelijkingen af te leiden.

3.1 Inleidende opmerkingen

We beschouwen een geometrische schijf K die met constante snelheid ω aan het ronddraaien is om een as die stilstaat in het inertiaalysteem K_0. Elastische effecten kunnen dus buiten beschouwing gelaten worden. Omdat snelheden niet groter mogen zijn dan de lichtsnelheid c, geldt:

$$r_0\omega < c,$$

waarin r_0 de afstand is van een willekeurig punt tot het middelpunt van de schijf waar de schijf omheen draait. We onderzoeken de ruimte die gemeten wordt in K. De Lorentztransformaties zijn voor deze draaibeweging niet geldig omdat K niet een inertiaalsysteem is. We maken de aanname dat op een infinitesimaal kleine schaal, de beweging van een lijnelementje wel kan worden benaderd door een inertiaalsysteem met behulp van de Lorentztansformaties. Deze aanname wordt de lokaliteitshypothese genoemd.

Afstanden worden gemeten met lichtstralen die weerkaatst worden tussen twee spiegels die infinitesimaal dicht bij elkaar staan. Op grotere lengteschalen kunnen lichtstralen niet meer worden gebruikt om lengte te meten, zoals we binnenkort zullen zien. De infinitesimale lichtbundeltjes zou je kunnen opvatten als infinitesimaal kleine meetlatjes. Dit is echter niet een heel zuiver voorbeeld, want de meetlatjes mogen dan niet gemaakt zijn van een materiële stof. Deze meetlatjes bestaan dus alleen in onze verbeelding, maar de infinitesimale lichtstralen zouden we in de realiteit kunnen verwezenlijken. De meetlatjes kunnen dus goed helpen om de theorie te begrijpen, maar vormen niet de theoretische fundamenten ervan.

3.2 Metriek

We beschouwen twee punten op de schijf die dicht bij elkaar in de buurt liggen. Voor de schijf gebruiken we poolcoördinaten, omdat die de symmetrie het beste uitbuiten. Voor twee punten met coördinaten (r, θ) en $(r + dr, \theta)$, is hun onderlinge afstand: dr. Twee punten met coördinaten (r, θ) en $(r, \theta + d\theta)$ hebben een onderlinge afstand

$$\frac{r d\theta}{\sqrt{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}}}.$$

Want het lijnelementje kan worden benaderd door een inertiaalsysteem met snelheid $r\omega$ en dus geldt de formule van lengtecontractie. Met de aloude stelling van Pythagoras kunnen we inzien dat voor een lengte ds geldt:

$$ds^2 = dr^2 + \frac{r^2 d\theta^2}{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}}.$$

Voor de volledigheid kunnen we de metriek ook geven in cartesische coördinaten, het wordt dan duidelijk waarom we poolcoördinaten gebruiken:

$$ds^2 = \frac{(c^2\omega^2)(dx^2 + dy^2) - (xdx + ydy)^2}{\frac{c^2}{\omega^2} - (x^2 + y^2)}.$$

Een Reichenbachiaanse beschouwing van Arzeliès is misschien op zijn plaats:

> "Suppose we transfer the various points onto a euclidean plane, giving them the co-ordinates of the system K. Everything then proceeds as though the measurements were being made with a standard of which the length varied with its orientation."

3.3 Geodeten

Het begrip geodeet (Engels: geodesic) is verwarrend, en het is daarom nuttig hierbij enige uitleg te geven. Een geodeet is het pad van een vrij deeltje. Het pad van een lichtstraal is een nul-geodeet (Engels: Null-geodesic).

Wij gaan voornamelijk kijken naar de kortste afstand tussen twee punten. Deze kortste afstand is de ruimtelijke geodeet (Engels: spatial geodesic). Wanneer er geen verwarring kan ontstaan, gebruik ik echter de term 'geodeet' voor 'ruimtelijke geodeet'.

3.3.1 Ruimtelijke geodeten

De ruimtelijke geodeten voldoen aan een aantal vergelijkingen. Een resultaat van differentiaalmeetkunde leert ons dat:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

De Einsteinconventie[4] is gebruikt voor een kortere notatie. g_{ij} Is de ruimtelijke metrische tensor waarbij de indices over $\{0, 1\}$ lopen.

Een kromme kan beschreven worden in onze ruimte door twee vergelijkingen: $x^i(\lambda)$. λ Kiezen we als de booglengteparameter. Dit betekent dat we de volgende conditie hebben:

$$g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 1.$$

[4] Bij de Einsteinconventie wordt gesommeerd over dubbele indices. Bijvoorbeeld de sommatie over i, $\sum_i a_i b^{ij}$ wordt met de conventie geschreven als: $a_i b^{ij}$.

Door onze keuze van λ gelden ook de volgende twee vergelijkingen:

$$\sum_j \frac{d}{ds}\left(g_{0j}\frac{dx^0}{ds}\right) = \frac{1}{2}\frac{dg_{kl}}{dx^0}\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^k}{ds}$$

$$\sum_j \frac{d}{ds}\left(g_{1j}\frac{dx^1}{ds}\right) = \frac{1}{2}\frac{dg_{kl}}{dx^1}\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^k}{ds}.$$

Uitgeschreven hebben we de volgende drie vergelijkingen:

$$\frac{d^2r}{ds^2} - \frac{r}{\left(1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)^2}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 0 \tag{1}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{r^2}{\left(1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)}\frac{d\theta}{ds}\right) = 0 \tag{2}$$

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \frac{r^2}{\left(1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 1 \tag{3}$$

Uit vergelijking 2 volgt:

$$\frac{r^2}{1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}}\frac{d\theta}{ds} = A \tag{4}$$

met A een constante. Een interpretatie van A is moeilijk te geven. Volgens mij kan het omschreven worden als de kortste afstand tussen de geodeet en het middelpunt van de schijf, op een factor na. Volgens Grøn kan A geïnterpreteerd kan worden als de gegeneraliseerde impuls van een deeltje met een eenheidsmassa, dat in een eenheidstijd langs de geodeet beweegt [Grøn (2004)].

Hieruit lossen we $\frac{d\theta}{ds}$ op en vullen dit in 3 in, waarna we $\frac{dr}{ds}$ oplossen:

$$\frac{dr}{ds} = \pm\sqrt{1+\frac{\omega^2A^2}{c^2}-\frac{A^2}{r^2}} \tag{5}$$

Nu volgt:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{d\theta} = \pm\frac{r^2\sqrt{1+\frac{A^2\omega^2}{c^2}-\frac{A^2}{r^2}}}{A\left(1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)} \tag{6}$$

Wanneer we schrijven: $\epsilon = \pm 1$, $\mu = \frac{\omega^2}{c^2}$ en $1+\mu A^2 = K^2$, dan kunnen we 6 schrijven als:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\epsilon}{A}\frac{r^2}{1-\mu r^2}\sqrt{K^2-\frac{A^2}{r^2}} \tag{7}$$

Hieruit volgt:

$$\frac{A}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\frac{1}{\sqrt{K^2-\frac{A^2}{r^2}}} = \frac{\epsilon}{1-\mu r^2} \tag{8}$$

Dus

$$\epsilon = \frac{A}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\frac{1}{\sqrt{K^2 - \frac{A^2}{r^2}}} - \mu A \frac{dr}{d\theta}\frac{1}{\sqrt{K^2 - \frac{A^2}{r^2}}} \tag{9}$$

En daarom geldt:

$$\frac{A}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\frac{1}{\sqrt{K^2 - \frac{A^2}{r^2}}} = \epsilon + \mu A \frac{dr}{d\theta}\frac{1}{\sqrt{K^2 - \frac{A^2}{r^2}}} \tag{10}$$

Deze uitdrukking integreren we en we krijgen:

$$\arccos\left(\frac{A}{Kr}\right) = \epsilon\,(\theta - \theta_0) + \frac{\mu A}{K}\sqrt{r^2 - \frac{A^2}{K^2}} \tag{11}$$

Ofwel:

$$\theta = \pm \arccos\left(\frac{a}{r}\right) \mp \left(\frac{a\omega^2}{c^2}\right)\sqrt{r^2 - a^2}. \tag{12}$$

Hierin is $a = \frac{A}{K}$ en $\theta_0 = 0$, want waar θ begint te lopen mogen we natuurlijk zelf kiezen. De constante a geeft de kortste afstand van de geodeet tot het middelpunt van de schijf aan.

3.3.2 Deeltjes en lichtstralen

We beschouwen een rechte lijn D_0 in K_0 en een deeltje dat over deze lijn beweegt met een snelheid v. De afstand tussen D_0 en O noemen we a. We meten de hoek θ_0 en dit geeft de relatie:

$$r_0 \cos\theta_0 = a.$$

Nu draaien we D_0 met constante hoeksnelheid ω en het deeltje gaan we beschrijven met poolcoördinaten (r, θ). Dus we hebben: $r_0 = r$, $\theta_0 = \theta \pm \omega t$ en $a = r\cos(\theta \pm \omega t_0)$. We weten ook dat $vt_0 = \sqrt{r_0^2 - a^2} = \sqrt{r^2 - a^2}$. Met deze kennis kunnen we de tijd t_0 wegwerken. We vinden:

$$a = r\cos\left(\theta \pm \frac{\omega}{v}\sqrt{r^2 - a^2}\right).$$

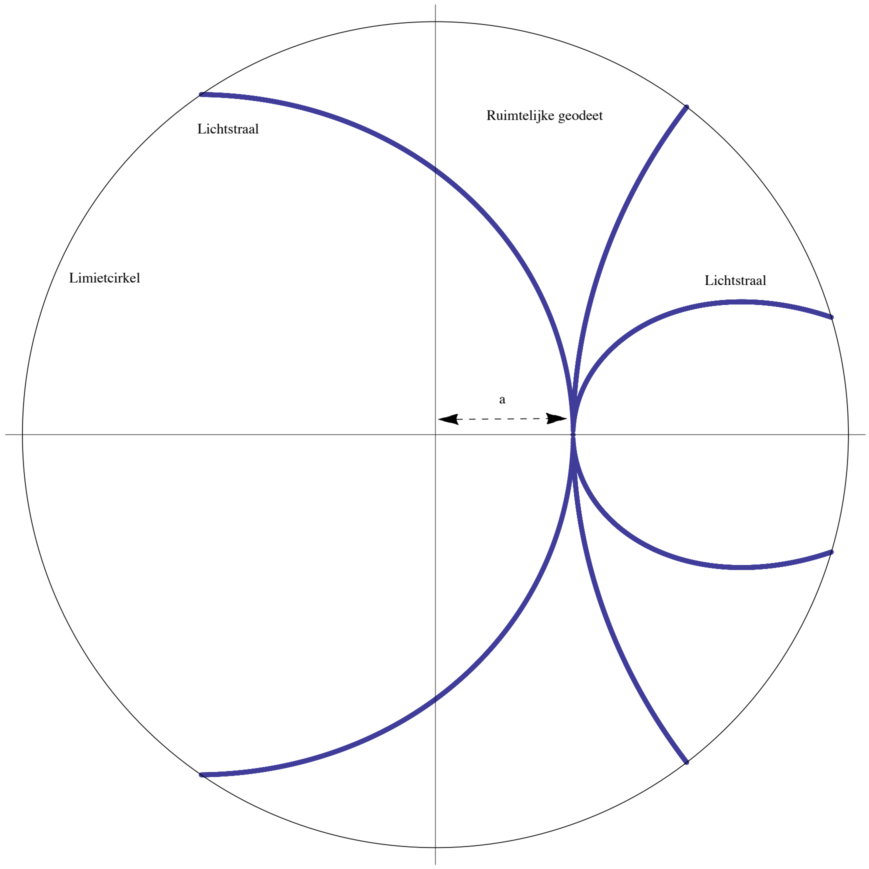
En in dezelfde vorm als 12 krijgen we:

$$\theta = \pm \arccos\left(\frac{a}{r}\right) \pm \frac{\omega}{v}\sqrt{r^2 - a^2} \tag{13}$$

Dit is de vergelijking voor het pad van een deeltje met snelheid v. Meer in het bijzonder geldt voor lichtstralen de formule:

$$\theta = \pm \arccos\left(\frac{a}{r}\right) \pm \frac{\omega}{c}\sqrt{r^2 - a^2}. \tag{14}$$

Het is duidelijk dat lichtstralen een pad afleggen dat niet samenvalt met de ruimtelijke geodeten. De ruimtelijke geometrie is dus anders dan de lichtgeometrie.



Figuur 3: De relativistisch draaiende schijf

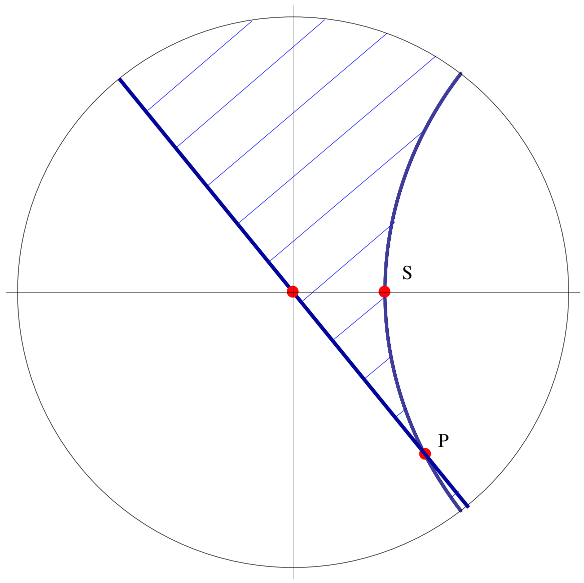
3.4 Eigenschappen

Een radiële lijn is een geodeet. Dit is in te zien door $A = 0$ te nemen en 2 te integreren. Dit levert op: $\frac{d\theta}{ds} = 0$, ofwel $\theta =$constant.

Voor een geodeet die niet door de oorsprong gaat, gelden de begrenzingen: $\frac{dr}{d\theta} = 0$ bij $r = a$ en $\frac{dr}{d\theta} = \infty$ bij de limietcirkel $r = \frac{c}{\omega}$. Dit betekent dat de geodeet samenvalt met de straal in de buurt van de limietcirkel (zie Figuur: 3).

De geodeten buigen naar het middelpunt van de schijf toe, omdat daar de meetstokjes in de omtreksrichting het grootst zijn. Er zijn dus minder meetstokjes nodig om een bepaalde afstand af te leggen. Op deze manier wordt de afstand geminimaliseerd.

De banen die lichtstralen afleggen hangen af van welke richting het licht opgaat. Tussen twee punten gaan op de draaiende schijf dus twee verschillende lichtstralen. Het kan dus voorkomen dat een persoon A op de schijf persoon B niet ziet, maar andersom wel. Bij geodeten is dit anders. Tussen twee punten



Figuur 4: Het oppervlak van de gehele schijf kunnen we 'afvegen' door S van het middelpunt naar P te laten gaan. Hierdoor zien we in dat tussen elk tweetal punten een geodeet bestaat.

gaat maar één unieke geodeet. Het maakt dus niet uit, zoals te verwachten valt, in welke richting de lengte van de geodeet gemeten wordt. Het blijkt ook dat tussen elk tweetal punten een geodeet gaat. Dit is als volgt in te zien. Laat een willekeurig punt P gegeven zijn op de schijf. P Is te verbinden met alle punten op de rechte lijn door het middelpunt (waarvoor geldt: $a = 0$). Voor een waarde van $a > 0$ noemen we het punt dat op afstand a van het middelpunt ligt, S. Als we nu de waarde van a continu vergroten, dan vegen de geodeten door P en S een gebied af dat de schijf volledig bedekt. Dit betekent dat de geodeten door P elk ander punt op de schijf kunnen bereiken. Zie figuur (4).

Tussen twee gegeven punten op de schijf is geen geodeet te construeren. Dit kan als volgt worden ingezien. Als we een geodeet gaan tekenen, dan beginnen we met een gegeven of gekozen waarde voor a. Vervolgens laten we r van a naar $\frac{c}{\omega}$ lopen en berekenen we telkens de waarde van θ. De punten (r, θ) worden steeds getekend. Voor twee gegeven punten met bekende coördinaten, krijgen we twee vergelijkingen. Uit deze vergelijkingen kunnen we a echter niet oplossen. De procedure om de geodeet te tekenen gaat bij de eerste stap dus al fout. Een benadering van de geodeet maken met de computer is natuurlijk wel mogelijk. De waarde van a zal dan als eerste benaderd moeten worden.

3.5 Hoeken

Uit de lineaire algebra weten we dat het inproduct tussen twee vectoren $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ te berekenen is met de formule: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}| \cos(\theta)$, waarbij θ de hoek is tussen de twee vectoren. Het tensor-analogon van deze formule is de formule: $\cos(\theta) = \frac{g_{ab} dx^a \delta x^b}{\sqrt{g_{ab} dx^a dx^b}\sqrt{g_{ab} \delta x^a \delta x^b}} = \frac{g_{ab} dx^a \delta x^b}{ds \delta s}$. Hierbij is θ de hoek tussen de twee lijnelementjes ds en δs. In ons geval levert dit op:

$$\cos(\theta) = \frac{dr}{ds}\frac{\delta r}{\delta s} + \frac{r^2}{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}} \frac{d\theta}{ds}\frac{\delta\theta}{\delta s}.$$

We kunnen dit anders schrijven met behulp van de formules 4 en 5. We hebben dan twee waardes van A: A_1 en A_2.

$$\cos(\theta) = \pm\sqrt{1 + \frac{\omega^2 A_1^2}{c^2} - \frac{A_1^2}{r^2}}\sqrt{1 + \frac{\omega^2 A_2^2}{c^2} - \frac{A_2^2}{r^2}} + \frac{A_1 A_2 \left(1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)}{r^2} \tag{15}$$

De formule geldt niet voor de oorsprong $r = 0$ omdat we delen door r. In dit punt is de meetkunde euclidisch omdat het niet beweegt, dus de formule hebben we niet nodig voor het punt $r = 0$.

We beschouwen driehoek OPQ. In P gelden de volgende relaties: $r = a$, $A_1 = 0$ en $A_2 = \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}}}$. Dus geldt: $\cos(\theta_P) = 0$, dus de hoek in P is: $\theta_P = \frac{\pi}{2}$. De hoek θ_Q in Q berekenen we op dezelfde manier: $r = \frac{c}{\omega}$, $A_1 = 0$ en $A_2 = P$. Dus geldt: $\cos(\theta_Q) = 1$ en daarom $\theta_Q = 0$. De hoek in O is zo gekozen dat $\theta_O < \frac{\pi}{2}$. Berekenen we nu de hoekensom, dan zien we dat:

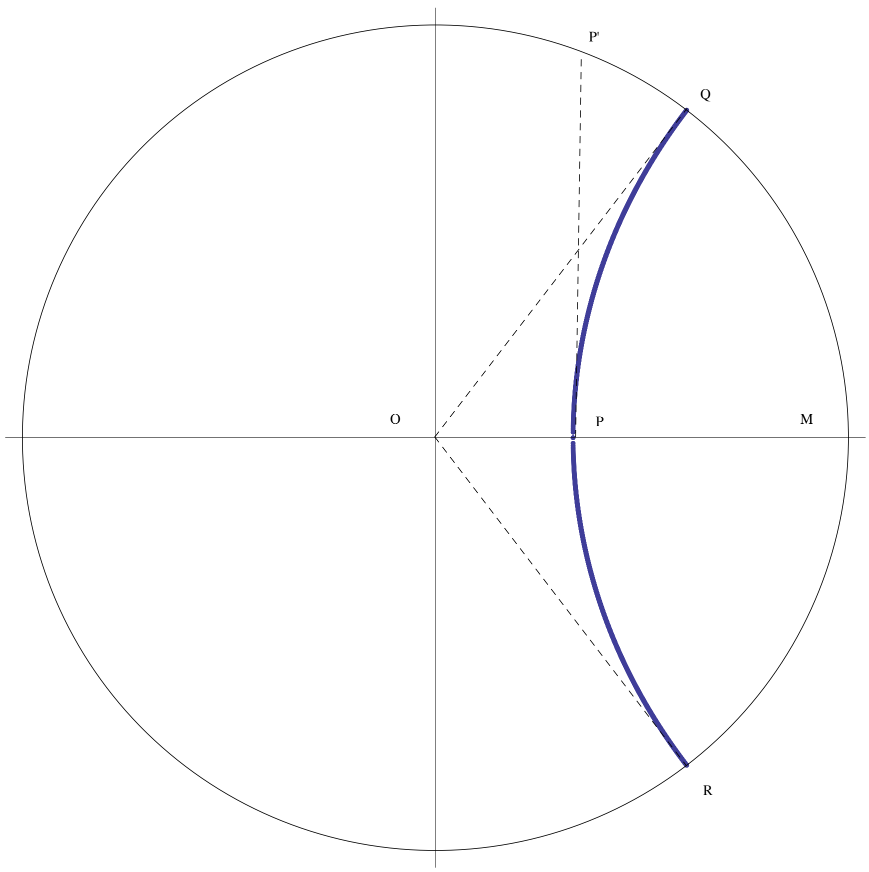
$$S_H = \theta_O + \theta_P + \theta_Q < \pi.$$

Voor driehoeken met alle punten op de limietcirkel, geldt zelfs: $S_H = 0$. Dit kunnen we natuurlijk meteen uitbreiden naar willekeurige veelhoeken, dus voor elke veelhoek met hoekpunten op de limietcirkel geldt dat de hoekensom gelijk is aan nul.

3.6 Kromming

De kromming van een lijn geeft aan hoe sterk de lijn van richting verandert over een bepaalde lengte. Newton hield zich als een van de eersten bezig met lijnkromming en leidde de theorie. Dit deed hij door te stellen dat een cirkel een kromme is met constante kromming die evenredig is met de inverse van de straal van de cirkel. Vervolgens kon hij de cirkel in elke willekeurige kromme inpassen en zo de kromming van die kromme bepalen.

Zoals eerder vermeld wist Gauss de notie van kromming uit te breiden naar oppervlakken. Een gekromd oppervlak had in elk punt twee hoofdkrommingen, die overigens loodrecht op elkaar staan. De hoofdkrommingen van een punt P in een vlak V kunnen gevonden worden door de lijnkromming te bekijken van de doorsnede van V, met een vlak dat gedraaid wordt om een loodrechte as



Figuur 5: Een driehoek op de schijf. De lijn PP' is een euclidische rechte lijn.

door P. De maximale en minimale krommingen zijn dan de hoofdkrommingen. Uit deze hoofdkrommingen kan de vlakkromming berekend worden door ze met elkaar te vermenigvuldigen.

Met behulp van de kromming blijken we veel te kunnen zeggen over de meetkunde. Wanneer de kromming nul is, geldt de stelling van Pythagoras en hebben we de euclidische meetkunde. Als de kromming niet nul is, dan geldt de stelling van Pythagoras ook niet. We hebben dan niet te maken met euclidische meetkunde.

De kromming van de schijf kan berekend worden uit de metriek. Om dit te doen, maken we gebruik van Christoffelsymbolen van de eerste en tweede orde en de Riemanntensor. De intuïtie hierachter is als volgt.

We verplaatsen een kleine vector in het vlak, parallel aan zichzelf, langs twee verschillende coördinaatassen. In het algemeen zal het dan niet zo zijn dat de richting van de vector hetzelfde is, wanneer we deze verplaatst zouden hebben langs dezelfde assen, maar in omgekeerde volgorde. De mate waarin de twee vectoren van elkaar verschillen wordt uitgedrukt met de Riemanntensor. Parallelle verplaatsing van vectoren is in het platte vlak meteen duidelijk. In het algemeen, echter vormt parallelle verplaatsing een probleem. Dit problem wordt opgelost door de Christoffelsymbolen, hierin zit de informatie die we nodig hebben voor parallelle verplaatsing.

De Christoffelsymbolen van de eerste orde worden gegeven door:

$$\Gamma_{abc} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} + \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^a} - \frac{\partial g_{ca}}{\partial x^b}\right)$$

Toegepast op onze schijf, krijgen we 5 waarden van Γ_{abc} die gelijk aan nul zijn en 3 die dit niet zijn:

$$\Gamma_{111} = \Gamma_{112} = \Gamma_{121} = \Gamma_{211} = \Gamma_{222} = 0$$

$$\Gamma_{122} = \Gamma_{221} = -\Gamma_{212} = \frac{r}{\left(1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)^2}$$

De Christoffelsymbolen van de tweede orde worden in het algemeen gegeven door:

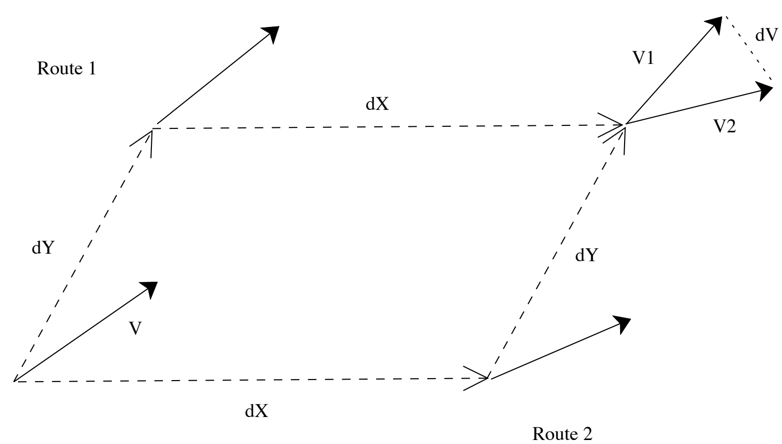
$$\Gamma^b_{ac} = g^{bd}\Gamma_{cda}$$

In dit geval krijgen we, niet verbazingwekkend, ook 5 waarden die nul zijn, en 3 die dit niet zijn:

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} = 0,$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{r}{\left(1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)^2},$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}\frac{1}{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}}.$$



Figuur 6: De parallelle verplaatsing van een vector V langs twee verschillende routes wordt uitgedrukt met de Christoffelsymbolen. De verschilvector dV is te berekenen met de Riemanntensor: $dV^d = R^d_{abc} V^a dX^b dY^c$.

De Riemanntensor is gedefinieerd als:

$$R_{abcd} = \frac{\partial \Gamma_{abd}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{abl}}{\partial x^d} - \Gamma^m_{lb}\Gamma_{amd} + \Gamma^m_{db}\Gamma_{aml}$$

Als we de gevonden waarden van de Christoffelsymbolen invullen dan zijn alleen de volgende componenten van de tensor ongelijk aan nul:

$$R_{1212} = R_{2121} = -R_{1221} = -R_{2112} = \frac{3\omega^2 r^2}{c^2\left(1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)^3},$$

Een keer contraheren naar de buitenste indices, geeft de Riccitensor met componenten:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{-3\omega^2}{c^2\left(1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)^2}, \\ R_{12} &= 0, \\ R_{21} &= 0, \\ R_{22} &= \frac{3\omega^2 r^2}{c^2\left(1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)^3}. \end{aligned}$$

De krommingsconstante is dan, na nog een keer contraheren:

$$R = \frac{-6\omega^2}{c^2\left(1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)}.$$

Een twee-dimensionaal vlak in drie dimensies met kromtestralen die voldoen aan: $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 = \frac{2}{\mathrm{R}} = -\frac{c^2}{3\omega^2}\left(1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}\right)^2$. De kromtestralen staan in tegenovergestelde richting omdat de kromming negatief is. Het vlak heeft de vorm van een zadel. De kromming is tegen r afgezet in figuur 7. Arzeliès tekende deze grafiek foutief in [Arzeliès (1965)].

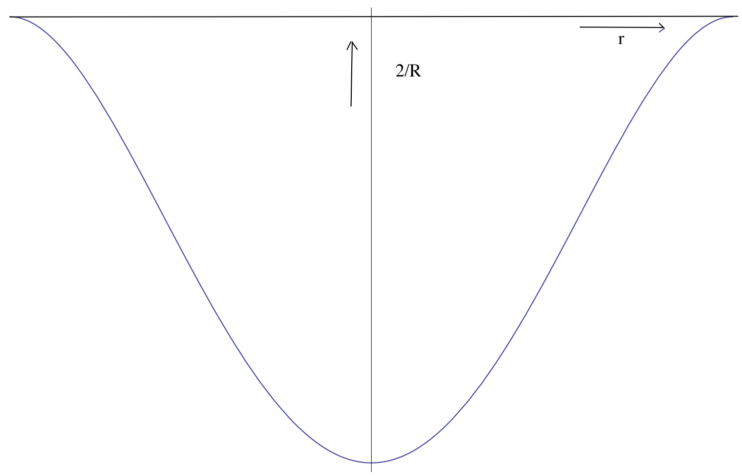
3.7 Lengte

Ashworth en Davies [Ashworth en Davies (1977)] leiden de lengte van een geodeet af met een heel andere methode dan in deze scriptie is gebruikt. Om deze reden is hun afleiding niet in deze scriptie opgenomen. Voor meer informatie verwijs ik door naar hun artikel.

In het kort is hun methode gebaseerd op de formule voor het pad van een deeltje. Het deeltje laten ze vervolgens met een oneindige snelheid gaan in het roterende frame. Dit hoeft overigens niet overeen te komen met een oneindige snelheid in het rustframe! Hun gevonden uitdrukking is:

$$L = \sqrt{r^2 - a^2}\sqrt{1 - \frac{a^2\omega^2}{c^2}}.$$

Deze uitdrukking geeft de lengte van een geodeet tusne de punten met r-coördinaten $r = a$ en $r = r$. De formule gaat over in de stelling van Pythagoras



Figuur 7: De kromming, uitgezet tegen r.

wanneer $\omega = 0$. Merk ook op dat de lengte gewoon gegeven wordt door r wanneer $a = 0$. De geodeten zijn dan gewoon rechte lijnen uit de oorsprong.

De uitdrukking wordt op de volgende manier afgeleid. [Ashworth en Jennison (1976)] Met meetkundige argumenten kan ingezien worden dat de afstand tussen twee punten op de geodeet met verschil in r-coördinaat Δr op de schijf, geldt:

$$\Delta L = \frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}} \sqrt{1 - \frac{a^2\omega^2}{c^2}} \Delta r.$$

De lengte van een geodeet tussen $r = a$ en $r = r$ gaat over in de integraal:

$$L = \int_a^r \frac{r'}{\sqrt{r'^2 - a^2}} \sqrt{1 - \frac{a^2\omega^2}{c^2}} dr' = \sqrt{r^2 - a^2} \sqrt{1 - \frac{a^2\omega^2}{c^2}}.$$

3.8 Oppervlakte

Voor een cirkel met straal $r < \frac{c}{\omega}$ geldt:

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}}} dr d\theta = \frac{2\pi c^2}{\omega^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}}\right).$$

Wanneer $r\omega$ klein blijft ten opzichte van c, kunnen we het resultaat benaderen door:

$$S \approx \pi r^2 \left(1 + \frac{r^2\omega^2}{4c^2}\right).$$

En we krijgen de gewone formule voor de oppervlakte van een cirkel weer terug wanneer $\omega = 0$.

De oppervlakte van de limietcirkel is twee keer zo grote als de oppervlakte S_0 van een normale cirkel: $S = 2\pi r^2 = 2S_0$.

4 Lineaire versnellingen

Als voorwerpen langs een rechte lijn versneld worden, dan treedt er lengtecontractie op. Men kan zich afvragen of de euclidische metriek nog steeds geldig is. Als illustratie van het probleem bekijken we eerst de ruimteschipparadox van Bell.

4.1 De ruimteschipparadox van Bell

Stel, we hebben twee puntraketjes R_1 en R_2 op een lijn l. Hun onderlinge afstand is L. Deze puntraketjes laten we, vanuit het rustframe gezien, tegelijkertijd in de richting van l versnellen met dezelfde versnelling. De versnelling zetten we na een bepaalde tijd weer uit. We zorgen ervoor dat de raketjes na het uitzetten van de versnelling een snelheid hebben die lager ligt dan de lichtsnelheid.

Omdat de raketjes nu een snelheid hebben ten opzichte van het ruststelsel, zijn meereizende meetstokjes Lorentzgecontraheerd. De afstand tussen de raketjes is zo gedefinieerd dat deze hetzelfde blijft in het ruststelsel. Voor een meereizende waarnemer is de afstand tussen de raketjes dus groter geworden.

De paradox is een paradox omdat een aantal natuurkundigen dacht dat de afstand tussen de raketjes kleiner moest worden door de Lorentzcontractie. Deze redenering is foutief omdat de afstand tussen de raketjes, vanuit het rustframe, onveranderd blijft in het versnellingsproces.

4.2 Versnellingen

Bij het versnellen van voorwerpen moeten we dus uitkijken naar hoe we dit precies doen. Het versnellen van een voorwerp langs een rechte lijn kan volgens meerdere procedures tot stand komen. In deze sectie bekijken we twee van deze mogelijke procedures:

1. We kunnen alle punten van het voorwerp dezelfde versnelling geven, zoals in de ruimteschipparadox.

2. We versnellen één punt van het voorwerp langs een rechte lijn en zorgen ervoor dat het voorwerp niet uitrekt.

4.2.1 Versnelling 1

Een versnelling zoals in de ruimteschipparadox van Bell, zorgt ervoor dat de punten verder uit elkaar komen te liggen in de bewegingsrichting. Laat R_1 en R_2 infinitesimaal dicht bij elkaar liggen op onderlinge afstand dx. Na de betreffende versnelling meten we in het rustframe dat de onderlinge afstand tussen R_1 en R_2 nog steeds dx is. De afstand tussen R_1 en R_2 in het meebewegende stelsel is dan: γdx.

Nu willen we iets zeggen over de metriek van het bewegende voorwerp. We bekijken daarom een rechthoekige plaat P die voorzien is van een x- en een y-as. Merk op dat de coördinaten geen afstandsbegrip bevatten, ze markeren alleen de punten van de plaat. [Dieks (2004)] Verder moeten we P beschouwen als een zuiver meetkundig object, het is dus niet een materiële plaat.

P Wordt op de gegeven manier in de x-richting versneld totdat deze een snelheid v heeft. Twee punten met coördinaten (x, y) en $(x, y + dy)$ hebben dan een onderlinge afstand van dy. Twee punten met coördinaten (x, y) en $(x + dx, y)$ hebben een onderlinge afstand van γdx. De afstand ds tussen twee punten wordt dan gegeven door:

$$ds^2 = \gamma^2 dx^2 + dy^2.$$

Dit betekent dat de metriek gegeven wordt door:

$$g_{11} = \gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

$$g_{22} = 1.$$

De ander componenten van de metrische tensor zijn nul. Als we nu de Christoffelsymbolen uitrekenen, dan zien we dat deze allemaal nul zijn. Dit komt doordat de tensor onafhankelijk is van x en y. De Riemanntensor wordt dan ook overal nul, dus we krijgen de euclidische meetkunde van het platte vlak.

4.2.2 Versnelling 2

Als we plaat P versnellen in de x-richting volgens procedure 2, dan veranderen de onderlinge afstanden niet voor punten op de plaat. De metriek is dan gewoon:

$$g_{11} = 1$$

$$g_{22} = 1$$

en de overige componenten zijn nul. De Christoffelsymbolen zijn nul, en de Riemanntensor is in elke component nul. In deze situatie hebben we dus ook weer te maken met de euclidische meetkunde.

5 In het algemeen

In het algemeen geldt dat de metriek een niet-euclidische meetkunde oplevert als de Riemanntensor niet nul is. Dit kan alleen zo zijn als de Christoffelsymbolen niet nul zijn. De Christoffelsymbolen bevatten plaatsafgeleiden van de metriek. Het is dus een noodzakelijke voorwaarde voor een niet-euclidische metriek dat deze afhankelijk is van de plaatscoördinaten. Een artikel dat meer informatie geeft over de metriek van een meetkundig object dat een willekeurige versnelling ondergaat, is [Pauri en Vallisneri (2000)]. De auteurs gebruiken Märzke-Wheeler coördinaten om een willekeurige versnelling te karakteriseren. Dit wordt toegepast op verschillende bewegingen.

6 Conclusie

In deze bachelorscriptie is de meetkunde in de speciale relativiteitstheorie onderzocht. De centrale vraag was hierbij of de meetkunde euclidisch of niet-euclidisch zou zijn. Dit hangt af van de situatie. Voor een niet-euclidische metriek, moet de Riemanntensor ongelijk aan nul zijn. Hiervoor moet gelden dat er minstens één Christoffelsymbool ongelijk aan nul is. Dit kan alleen het geval zijn, als de metriek op een niet-triviale manier afhankelijk is van de plaatscoördinaten. De metriek kunnen we alleen veranderen door de γ-factor, die afhankelijk is van de snelheid. Dus het is een noodzakelijke voorwaarde voor niet-euclidische meetkunde, dat er punten zijn waarvan de snelheid afhangt van de positie van die punten.

In de situatie van een draaiende schijf is aan deze voorwaarde voldaan. Punten aan de rand van de schijf hebben een grotere snelheid, dan punten dichtbij het middelpunt van de schijf. Voor de draaiende schijf blijken we ook daadwerkelijk een niet-euclidische metriek te hebben.

In het geval van lineaire versnellingen hebben we een gewone euclidische metriek. De snelheden hangen niet af van de coördinaten, dus aan de noodzakelijke voorwaarde is niet voldaan.

Referenties

Aminrazavi, Mehdi en Van Brummelen, Glen. 2013. 'Umar Khayyam', The Stanford Encyclopedia of Philosophy (editie herfst 2011), URL : http://plato.stanford.edu/archives/fall2011/entries/umar-khayyam/.

Arzeliès, Henri. 1966 (eerste druk: 1965). *Relativistic Kinematics,* Pergamon Press, Oxford.

Ashworth, D.G. en Davies, P.A. 1977. 'Geodesics in Rotating Systems', International Journal of Theoretical Physics, Vol. 16, No. 11. pp. 845-861.

Ashworth, D.G. en Jennison, R.C. 1976. 'Surveying in Rotating Systems', Journal of Physics A, 9, 35.

Beltrami, Eugenio. 1868. 'Saggio di interpretazione della geometria noneuclidea', Giornale di Mathematiche VI: 285–315.

Beltrami, Eugenio. 1868. 'Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante', Annali. di Mat., ser II 2: 232–255.

Cooperstock, Fred I. en Tieu, Steven. 2012. *Einstein's Relativity, The Ultimate Key to the Cosmos*, Springer, Heidelberg New York Dordrecht London.

Crowell, Benjamin. 2013 (eerste versie: 2009). *General Relativity*, Light and Matter, Fullerton, California.

Dieks, Dennis. 2004. Space, time and Coordinates in a Rotating World. Gepubliceerd in: Rizzi en Ruggiero (2004).

Eco, Umberto. 1998 (eerste druk: 1977). *Hoe schrijf ik een scriptie*, Ooievaar, Amsterdam.

Ehrenfest, Paul. 1909. 'Uniform Rotation of Rigid Bodies and the Theory of Relativity', gepubliceerd in: Rizzi en Ruggiero (2004).

Grattan-Guinness, Ivor. 1997. *The Rainbow of Mathematics, a History of the Mathematical Sciences*, W.W. Norton & Company New York, London.

Grøn, Øyvind. 2004. Space Geometry in Rotating Reference Frames: A Historical Appraisal, gepubliceerd in: Rizzi en Ruggiero (2004).

Halsted, George Bruce. 1920. *Girolamo Saccheri's Euclides Vindicatus*, The Open Court Publishing Company, Chicago, London.

Halsted, George Bruce. 1958. *The Value of Science*, Dover, New York. p.72.

Howard, Don en Stachel, John. 1986. *Einstein and the History of General Relativity*, Birkhauser, Boston Basel Berlin.

Kay, David. 1988. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Tensor Calculus*, McGraw-Hill Companies, Inc. New York San Fransisco Washington D.C. Auckland etc.

Møller, Christian. 1955 (eerste druk: 1952). *The Theory of Relativity*, Oxford University Press, Oxford.

Nasr, Seyyed Hossein. 1976. 'Al-Tusi, Muhammad ibn Muhammad ibn al-Hassan', gepubliceerd in Dictionary of Scientific Biography, American Council of Learned Societies.

Natário, José. 2012. *General Relativity Without Calculus, A Concise Introduction to the Geometry of Relativity,* on-line versie, URL : http://www.math.ist.utl.pt/~jnatar/RM-12/Geom_Rel.pdf

Pauri, M. en Vallisneri, M. 2000. 'Märzke-Wheeler Coordinates for Accelerated Observers in Special Relativity'. on-line artikel, URL : http://arxiv.org/pdf/gr-qc/0006095.pdf

Poincaré, Henri. 1905. *The Value of Science,* vertaling: Bruce Halsted. Dover, New York 1958. p.72.

Reichenbach, Hans. 1969 (eerste druk: 1965). *Axiomatization of the Theory of Relativity*, University of California Press.

Reichenbach, Hans. 1957. *Philosophy of Space and Time*, Dover Inc.: New York, New York.

Rizzi, Guido en Ruggiero, Mateo Luca, ed. 2004. *Relativity in Rotating Frames*, Kluwer, Dordrecht.

Salmon, W.C. 1979 (eerste druk: 1977). *Hans Reichenbach: Logical Empiricist*, D Reidel Publishing Company, Dordrecht.