DE IJSKAP VAN GROENLAND

een eerste verkenning

Rochus van Kampen

bacheloronderzoek
Natuurkunde
Universiteit Utrecht

begeleider:
dr. R.S.W. van de Wal
IMAU

19 juni 2013

Figuur 1: IJs op en rond Groenland

Inhoudsopgave

1 Inleiding **3**

2 Onderzoek **3**

3 Verplaatsing in *Oost-West*- en *Noord-Zuid*-richting **4**

4 Totale, vectoriële snelheid (v) **6**
4.1 Berekening snelheden 6
4.2 Over de gehele meetperiode 7
4.3 De jaarlijkse gang van v 8
4.4 Verhouding zomer- en wintersnelheid a 10
4.5 Onderzoek jaarsnelheid v_{jaar} 12
4.6 Een opmerkelijke piek 13

5 Verband tussen *smb* en v **14**
5.1 Per station 14
5.2 Per station: *resultaten* 14
5.3 Over het gehele smeltgebied 18
5.4 Over het gehele smeltgebied: *resultaten* 20
5.5 Interpretatie resultaten 23

6 Onzekerheden in de berekende grootheden **25**
6.1 Algemeen 25
6.2 Onzekerheden in *smb* en v 25

7 Conclusie **28**

8 Dankwoord **28**

9 Bijlage **29**

10 Literatuurlijst **32**

Samenvatting

In dit bacheloronderzoek hebben we de de verplaatsing van het ijs en de snelheden, waarmee het ijs op de ijskap Groenland zich beweegt, onderzocht. De data van 8 stations op een transect in Zuid-West Groenland zijn geanalyseerd. M.b.v. geavanceerde technieken is per uur de locatie gemeten. Met deze gegevens is ook de momentane snelheid bepaald. Het blijkt steeds dat de snelheid in het voorjaar toeneemt met een duidelijke piek rond 1 juli. Er blijkt een lineair verband te bestaan tussen het tijdstip van genoemde piek en de afstand tot de ijsrand.
De verhouding tussen zomer- en wintersnelheid is het grootst voor een van de stations aan de rand van de ijskap. Voor een hoger gelegen station neemt deze verhouding significant toe tijdens de meetperiode.
Tevens is onderzocht in hoeverre de snelheid gerelateerd is aan de afsmelting. Het blijkt dat in de voorzomer voor de meer naar boven gelegen stations een toename van de smelt een toename van de snelheid induceert. Voor de hoogst gelegen stations zien we dat in de winter een toename van de smelt juist een áfname van de snelheid tot gevolg heeft. Als we middelen over het gehele hoger gelegen gebied, dan neemt de jaarsnelheid zelft met 1.6 m/yr af per m. toename van de smelt.

1 Inleiding

Het gedrag van ijsgletsjers en ijskappen staat wereldwijd erg in de belangstelling. Door de klimaatverandering, de opwarming van de aarde -deze kan inmiddels moeilijk meer worden ontkend c.q. genegeerd- zal het ijs op de Alpen, maar ook op Antartica en Groenland steeds sneller smelten. *Wat zijn de consequenties hiervan ? Hoe snel beweegt het ijs zich richting de oceaan ? Hoe snel en hoe ver zal de zeespiegel stijgen ? Is er sprake van een negatieve of juist een positieve terugkoppeling van genoemde verschijnselen ?* Dit zijn belangrijke vragen waarmee veel klimatologen, glaciologen en geologen zich dagelijks bezighouden.
Door de opwaring van onze planeet smelten de grootste ijskappen de laatste 10 tot 15 jaar ontzettend snel. Als deze trend zich voortzet, zal de zeespiegel eind deze eeuw zo'n 14 tot 19 cm zijn gestegen. Voor het laag gelegen Nederland zou dit belangrijke gevolgen hebben.

2 Onderzoek

Om de fysica van de ijskap beter te begrijpen wordt in deze studie onderzoek gedaan naar de snelheden op zich, maar ook in hoeverre deze snelheden zijn gerelateerd aan de afsmelting. Hiertoe zijn metingen verricht aan de zuid-west rand van de Groenlandse ijskap. (kort aangeduid als het transect). Op een groot aantal locaties op dit transect zijn sensoren geplaatst. M.b.v. GPS en geavanceerde meettechnieken is voor een periode van ruwweg *augustus 2005 tot augustus 2012* op elk uur de positie van de sensoren gemeten; zowel in de *Oost-West-* als de *Noord-Zuid-* richting. M.b.v. de posities werd vervolgens voor elk uur de *vectoriële snelheid* bepaald. Voor 8 stations op het transect werden de meetwaarden van genoemde grootheden digitaal aangeleverd. De tijdsaanduiding is steeds in uren, gerekend vanaf 1 januari 2005 0.00 u. Ook het rangnummer van de meting werd weergegeven. Deze meetwaarden vormden de basis voor ons onderzoek.
In tabel 1 worden de codenamen, de locaties t.o.v. ijsrand, de hoogte boven de zeespiegel de gemiddelde *smb*-waarden [1] en de precieze meetperioden per station weergegeven.

[1] zie bijlage 1 voor precieze waarden van *smb*

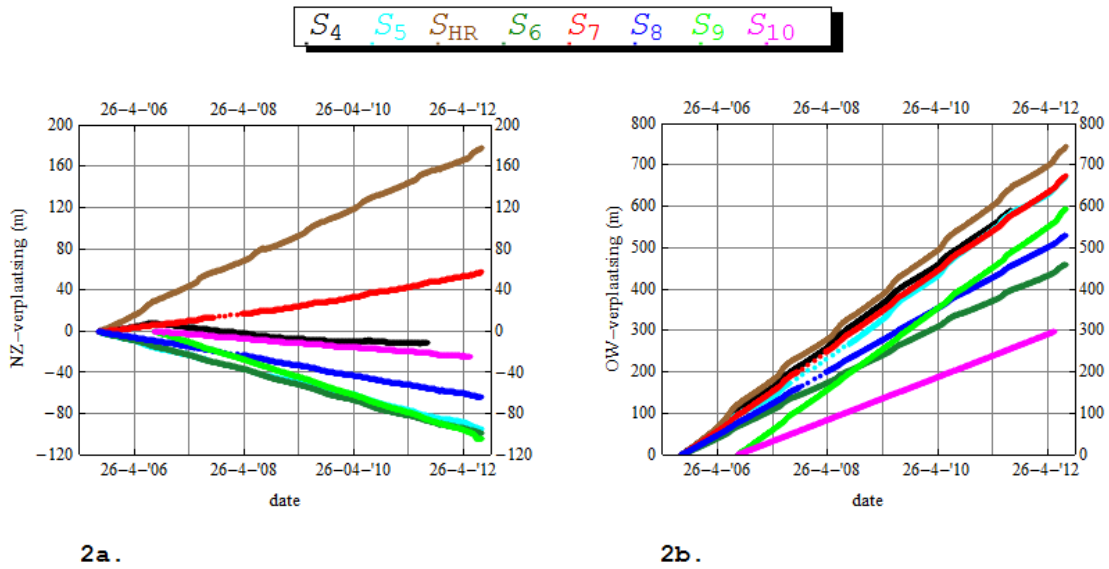
Tabel 1: afstand tot de ijsrand s (km.), hoogte h (m.) boven zeeniveau, gemidd. smb-waarde (in m.w.eq.) en perioden metingen per station

site	pos.	h	smb	start	einde
S_4	3	383	-4.45	2005/8/29	2011/8/26
S_5	6	490	-4.05	2005/8/28	2012/8/24
S_{HR}	14	710	-3.39	2005/8/28	2012/8/23
S_6	37	1010	-1.80	2005/8/28	2012/8/23
S_7	52	1110	-1.77	2005/8/28	2012/8/23
S_8	63	1260	-0.86	2005/8/28	2012/8/23
S_9	91	1520	-0.30	2006/9/04	2012/8/22
S_{10}	143	1850	+0.24	2006/9/04	2012/6/07

De gegevens van de periode okt. 2007 –april 2008 van S_7 en S_8 en van de periode sept. 2007–okt. 2008 van en S_5 ontbreken.

3 Verplaatsing in *Oost-West-* en *Noord-Zuid*-richting

Voor alle in tabel 1 genoemde stations is per uur de positie in *Noord-Zuid* en in *Oost-West*-richting gemeten. In fig. 2 worden de posities grafisch weergegeven.



Figuur 2: Oost-West en Noord-Zuid-verschuiving stations.
De stippelijn bij S_5, S_7 en S_8 die de vetgedrukte lijnen verbindt, is een lineaire extrapolatie van de metingen van de eerste periode van het betreffende station.

In fig. 2b. zien we dat de zwarte, lichtblauwe, bruine, rode, groene lijnen (nagenoeg) parallel zijn. De snelheden van de OW - verplaatsing op de sites S_4, S_5, S_{HR}, S_7 en S_9 zijn dus (bij benadering) gelijk. De snelheden van S_6, S_9, en S_{10} zijn kleiner.

Het eerste en tweede deel van de donkerblauwe lijn zijn bijna evenwijdig; de snelheid in OW - richting bij S_8 is dus gelijk gebleven; laatstgenoemde geldt ook voor station S_7. Wat betreft S_5 merken we op, dat het *tweede* deel van de lichtblauwe lijn steiler loopt dan het eerste. De snelheid in OW - richting in de tweede periode is dus groter geworden. De totale NZ-verplaatsingen zijn in orde van grootte 150 m.; de totale OW-verplaatsingen liggen tussen de 300 m. en 800 m.
Door het quotiënt te nemen van het verschil tussen begin- en eindpositie én de totale tijdsduur kan eenvoudig de gemiddelde snelheid $v_{gem,NZ,i}$ en $v_{gem,OW,i}$ per station i worden berekend. In tabel 2 worden deze snelheden in $NZ-$ en $OW-$richting en hun verhouding weergegeven.

Tabel 2: snelheden in Oost-West-en Noord-Zuid-richting in m/yr en hun verhouding; $S_{5,a}$ is de 1ste periode, $S_{5,b}$ de 2^e periode van S_5 , etc.

$site$	v_{OW}	v_{NZ}	$\lvert v_{OW}/v_{NZ}\rvert$
S_4	98.7	-3.3	30
$S_{5,a}$	88.2	-14.0	6.3
$S_{5,b}$	102.8	-13.4	7.7
S_{HR}	105.8	25,2	4.2
S_6	66.1	-14.6	4.5
$S_{7,a}$	96.4	6.8	14
$S_{7,b}$	96.2	9.4	10
$S_{8,a}$	76.9	-8.7	8.9
$S_{8,b}$	75.3	-9.3	8.1
S_9	98.4	-17.2	5,7
S_{10}	51.7	-4.3	12

De snelheid bij station S_5 is in de 2^e periode inderdaad duidelijk groter dan in de 1ste periode.

Uit de tabel lezen we ook af dat per station de snelheid in OW-richting minstens 4.2 maal zo groot is als de snelheid in NZ-richting. De totale snelheid is de kwadratische som van de afzonderlijke snelheden. Omdat voor $x \geq 4.2$ geldt dat:

$$(\sqrt{x^2+1^2}-x)/x \leq (\sqrt{4.2^2+1^2}-4.2)/4.2 = 0.028 \tag{1}$$

zien we dat de waarde van v_{OW} hoogstens 2.8 % afwijkt van de totale snelheid v

4 Totale, vectoriële snelheid (v)

4.1 Berekening snelheden

De snelheid in bijv. de NZ-richting wordt als volgt bepaald:
Zoals al genoemd is gedurende de meetperiode van een station elk uur de positie in NZ- en OW-richting gemeten. Om de onnauwkeurigheid in de snelheden te minimaliseren, zorgen we ervoor dat het computerprogramma voor de berekening van de snelheid steeds *gemiddelde* waarden van de positie neemt. Het gemiddelde wordt genomen over 168 meetwaarden. Dit komt overeen met 168 uur ofwel 7 dagen.
We beschouwen bijv. de meetwaarden van de NZ- positie van meting 1 t/m meting 336 van station S_4.
Het midden van het betreffendde tijdsinterval is $t_0 =$ *tijdstip van meting*$_{168} + 0.5$ *u*.
x_1 is het gemiddelde van de 168 meetwaarden van meting 1 t/m meting 168; x_2 is het gemiddelde van de meetwaarden van meting 169 t/m meting 336. t_1 is het midden van het eerste tijdsinterval; dit is het tijdstip van meting 84 plus 0.5 uur. t_2 is het midden van het tweede tijdsinterval, het tijdstip van meting 252 plus 0.5 uur.
Voor station S_4 vond de eerste meting plaats op tijstip 5775 u. Deze tijdsaanduiding is in uren, gerekend vanaf 1 januari 2005, 0.00 u. Het tijdstip van *meting*$_{168}$ + 0.5 u. is dus 5942.5 u. De snelheid in NZ–richting op het tijdstip 5942 wordt nu gedefinieerd als:

$$v_{NZ}(5942) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x_2 - x_1}{168} \qquad m/h \tag{2}$$

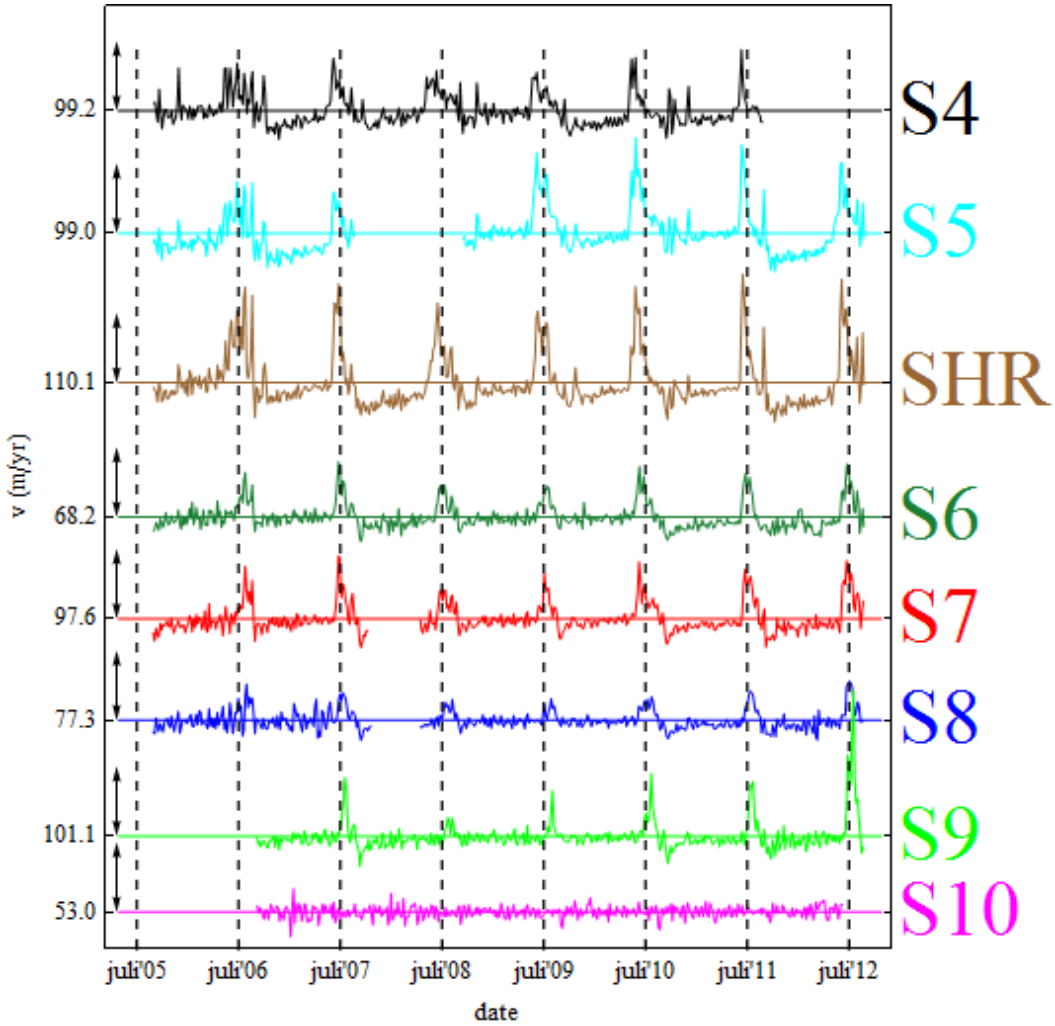
De snelheid op tijdstip 5943 u., wordt bepaald door de gemiddelde waarden van meting 2 t/m 169 en van meting 170 t/m 337 te berekenen en het verschil te delen door 168 enz.

De momentane snelheden $v_{OW}(t)$ in OW–richting worden op precies dezelfde manier berekend.
Een jaar duurt 8760 uur. De grootte van de totale, vectoriële snelheid v (in m/yr) is de kwadratische som van de snelheden in NZ– en OW–*richting*:

$$v(t) := 8760 \times \sqrt{v_{NZ}(t)^2 + v_{OW}(t)^2} \tag{3}$$

4.2 Over de gehele meetperiode

In de fig. 3 is per station de snelheid v uitgezet als functie van de datum



Figuur 3: v_{tot} in m/yr. voor alle stations; juli'05 = 1 juli 2005 etc.
De doorgetrokken lijnen zijn de gemiddelde waarden over de *totale* meetperiode. Bijv. voor S_4 : 99.2 m/yr. De pijl geeft steeds een verschil van 100 m/yr. aan. M.a.w. de grafieken zijn getransleerd; S_4 het meeste, S_9 het minste; S_{10} in het geheel niet, maar de schaal is overal dezelfde. Bij S_{10} varieert de snelheid nauwelijks.

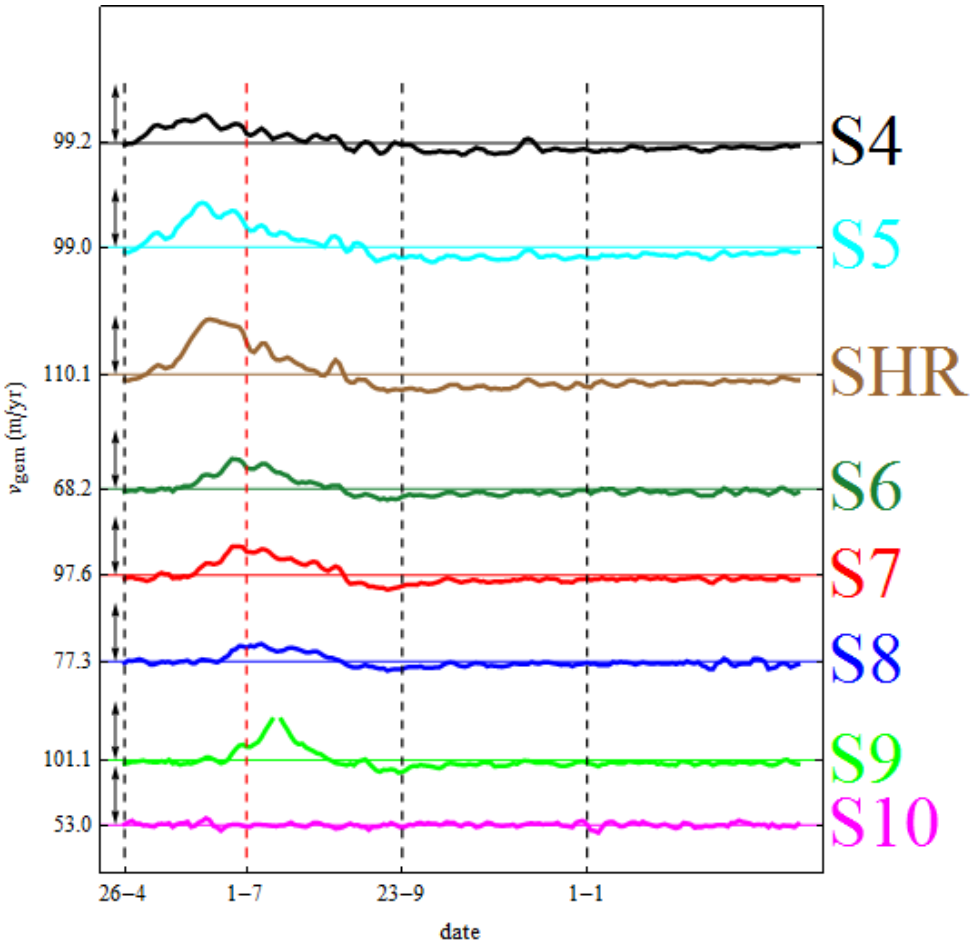
4.3 De jaarlijkse gang van v

Om een beter inzicht te krijgen in het verloop van de snelheid als functie van de tijd, hebben we ook de gemiddelde snelheid per datum onderzocht.

Voorbeeld
De meetperiode van station S_4 loopt van 29 aug. 2005 tot 26 aug. 2011. Het gemiddelde van de meetwaarden van v op het tijdstip 14.00 u. op de 6 dagen 1 *juli* 2006, ..., 1 *juli* 2011 wordt nu gedefinieerd als de *gemiddelde snelheid op 1 juli*, dus:

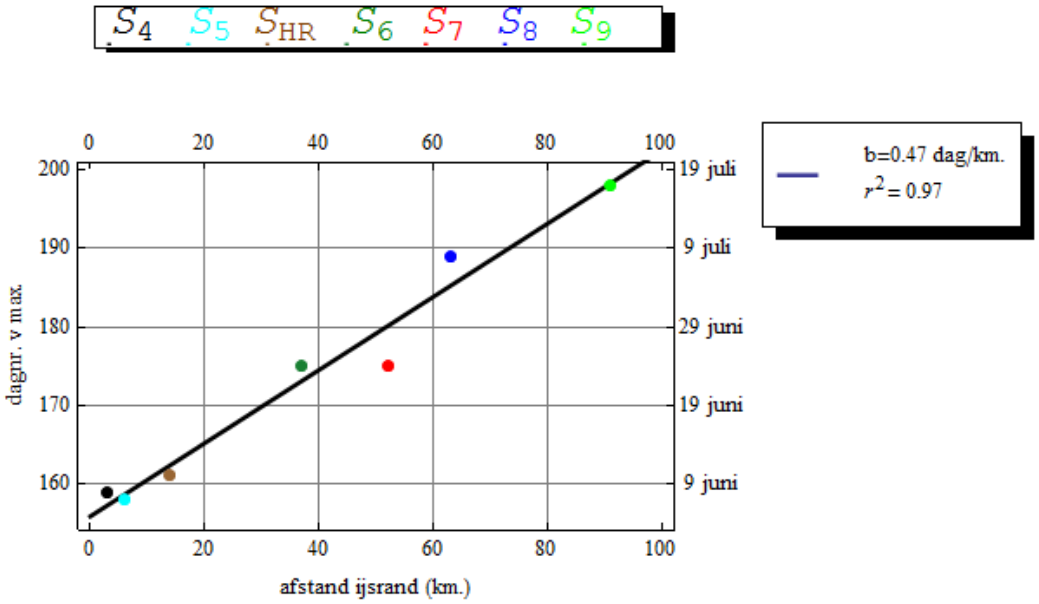
$$v_{gem,1juli} = \frac{1}{6} \times \sum_{jr=2005}^{2011} v_{jr,1juli,14\ u.} \tag{4}$$

Voor de datum *27 augustus* nemen we het gemiddelde van de meetwaarden op 14.00 u. op de *7* dagen 27 *aug.* 2005, ...27 *aug.* 2011 etc.
Voor elke datum en voor elk station zijn deze gemiddelde waarden berekend.
In fig. 4. zijn deze waarden uitgezet tegen de datum.



Figuur 4: de jaarlijkse gang van v voor alle stations. Zie figuur 3 voor toelichting.

We zien steeds rond 1 juli een duidelijke, korstondige toename van de snelheid. Bovendien verschijnt bij een hoger gelegen station deze piek op een iets later tijdstip. We geven een kwantitatieve anlyse.
In fig. 5 is het *dagnummer dat de snelheid maximaal was* uitgezet tegen de *afstand van het betreffende station tot de ijsrand.*
M.b.v. de meetpunten worden de lineaire fit –dit is de regressielijn– en de correlatiecoëfficient r berekend. Als de determinatiecoëfficient $r^2 > 0.5$, zoals hier het geval is, spreken we van een significant verband. [2]
De *helling* b van de regressielijn wordt de regressiecoëfficient genoemd.



Figuur 5: verband afstand ijsrand en tijdstip maximale snelheid per station.

[2] zie bijlage 2

4.4 Verhouding zomer- en wintersnelheid a

Vervolgens hebben we voor elk jaar en voor elk station de verhouding a tussen de zomer- en wintersnelheid berekend. De wintersnelheid v_{wt} van het jaar 2007 is de gemiddelde waarde van v over de *winter*: 23 sept. 2006 – 26 april 2007. De zomersnelheid v_{zm} is in dit geval de gemiddelde waarde van v over de *gehele zomer*:
26 april 2007 – 23 sept. 2007. etc. Het tijdstip 2.00 u. op laatstgenoemde data heeft het uurnummer: $c = 2762$ resp. $d = 6362$. Het betreft dus een periode van 3600 u. (150 dagen)

De zomersnelheid is dus gelijk aan:

$$v_{zm} = \frac{1}{d-c} \cdot \sum_{i=c+1}^{d} v_i \tag{5}$$

Geheel analoog wordt v_{wt} berekend.

Voor elk uur en elk station zijn echter ook de posities x_{NZ} en x_{OW} in *NZ*- en *OW*-richting bekend. De gemiddelde snelheid over de zomerperiode kan dus ook op de volgende, alternatieve manier worden berekend:

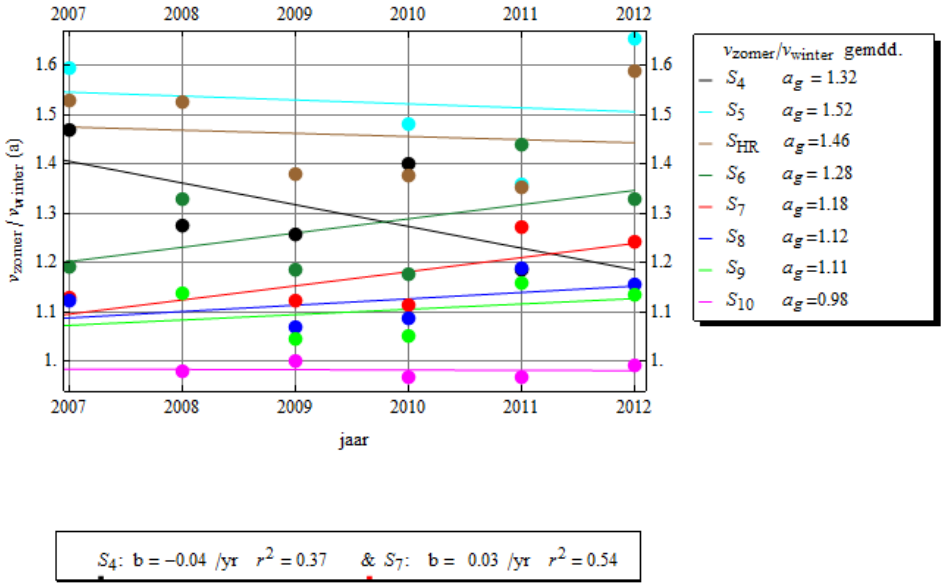
$$v_{zm,alt} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\sqrt{(x_{NZ}(d) - x_{NZ}(c))^2 + (x_{OW}(d) - x_{OW}(c))^2}}{d-c} \tag{6}$$

Met c en d zoals boven gedefinieerd

Het is evident dat $v_{zm,alt} \leq v_{zm}$. Immers, de lengte van de som van 2 vectoren is hoogstens gelijk aan de som van lengtes van de afzonderlijke vectoren. Gelijkheid geldt alleen als de 2 vectoren *dezelfde* richting hebben. [3] Het bleek dat in ons onderzoek de 2 getallen nagenoeg gelijk zijn. Meestal bedraagt het verschil rond de 1 %. In enkele gevalen is het verschil iets groter; echter nooit meer dan 4.3 % *We concluderen dat het ijs zich steeds in nagenoeg dezelde richting beweegt.* In ons onderzoek hebben we daarom steeds (5) gebruikt voor de berekening van snelheden over een bepaalde periode.

Uit fig. 6 lezen we af dat voor S_5 en S_{HR} de verhouding a tussen zomer- en wintersnelheid vrij groot is: ca. 1.5. Voor de hoger gelegen stations S_8 en S_9 is de ratio slechts 1.1. Voor S_{10} zien we nauwelijks verschil tussen de zomer- en wintersnelheid. Bij S_7 is sprake van een significante toename van de betreffende verhouding; bij S_4 een zwakke, negatieve correlatie tussen het jaartal en deze verhouding.

[3] zie bijlage 3

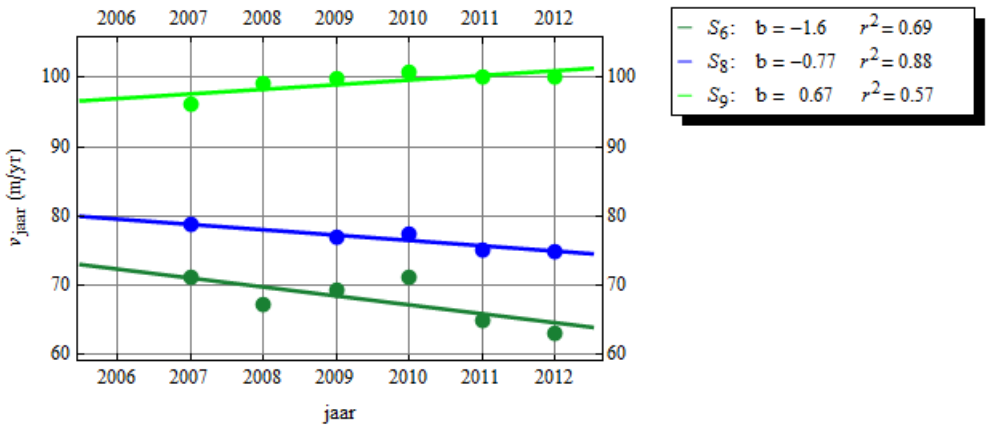


Figuur 6: $a = v_{zr}/v_{wt}$ per station.
a_g is het gemiddelde van de 4, 5 of 6 a-waarden die zijn gemeten.
Dit aantal is afhankelijk van de precieze meetperiode van het station.

4.5 Onderzoek jaarsnelheid v_{jaar}

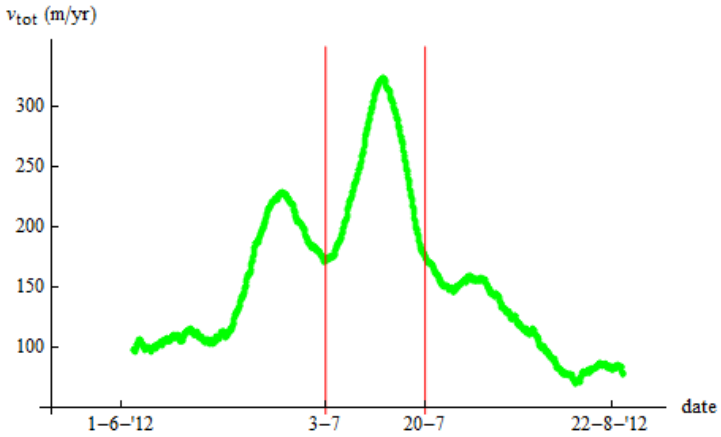
Tenslotte hebben we voor elk station ook onderzocht of de gemiddelde snelheid v_{jaar} per jaar verandert. We definiëren de jaarsnelheid van bijv. 2007 als het gemiddelde van de snelheid over de periode van 23 sept. 2006 – 23 sept. 2007. etc.
In fig. 6 worden de meetwaarden en de bijbehorende lineaire fit getoond voor de stations waarvoor het verband tussen jaartal en de jaarsnelheid *significant* was. Voor de stations S_6, S_8 bestaat er een negatieve correlatie tussen jaar en jaarsnelheid; voor station S_9 een positieve correlatie.

Zowel bij het onderzoek naar de verhouding tussen zomer- en wintersnelheid (§ 4.4) als bij de jaarsnelheid plaatsen we de kanttekening dat de periode slechts 5 of 6 jaar omvat. Dit is heel kort. De vraag of bepaalde trends zich zullen voortzetten, m.a.w. of bijv. over 10 of 20 jaar nog steeds sprake is van een significante toename c.q. afname van genoemde grootheden, kan met deze beperkte gegevens zeker niet afdoende worden beantwoord.



Figuur 7: Verband tussen jaartal en jaarsnelheid.
De eenheid van de regressiecoëfficient b is m/yr^2

4.6 Een opmerkelijke piek



Figuur 8: S_9 v zomer 2012

Nemen we de meetwaarden van station S_9 onder de loep (fig. 8), dan zien we een flinke piek in de snelheid tussen tussen 3 juli en 20 juli 2012 . Juist medio deze periode, namelijk op 13 juli, werd een smelt van ca. 97 % van de totale oppervlakte gedetecteerd. Een dergelijk hoog percentage was nog niet eerder gemeten. Niet alleen in wetenschappelijke kringen, maar ook in de media werd daarom aandacht besteed aan dit opmerkelijke feit. In werkelijkheid was de piek in de snelheid nog hóger. Immers, zoals toegelicht in §4.1 werden de snelheden in NZ- en OW-richting bepaald door het gemiddelde te nemen van 168 meetwaarden van de positie. Uit deze grootheden werd vervolgens de vectoriële snelheid berekend. Een serie van 168 meetwaarden komt overeen met 168 uur dus met 7 dagen. Zou de middeling hebben plaatsgevonden over een kórtere periode, bijv. over 48 uur, dan zou de piek nog hoger zijn geweest. In dit geval impliceert een kortdurende, intensieve smelt dus direct een korstondige, maar niettemin duidelijke toename van de snelheid.

5 Verband tussen smb en v

5.1 Per station

Onderzoek naar het gedrag van de snelheden v als functie van de tijd en als functie van de afstand tot de ijsrand is leerzaam. Echter veel boeiender is het om na te gaan of er een relatie is tussen afsmelting en snelheid. De aarde warmt langzaam op. En in een warmer klimaat zal er meer ijs smelten. Daarom hebben we voor elk seizoen de relatie onderzocht tussen de hoeveelheid smelt en v_{gem}
Een maat voor de hoeveelheid smelt is de jaarlijkse *smb*–waarde. De afkorting *smb* staat voor: *surface mass balance* Omdat verschillende soorten sneeuw verschillende dichtheden bezitten, is de eenheid van *smb* de éénduidige *meter water equivalent.*
Voor elk station hebben we de beschikking over afsmeltwaarden per jaar: *periode* 23 *sept.* jr − 23 *sept.* $jr + 1$. Deze meetwaarden zijn terug te vinden in de tabel in bijlage 3.
Omdat de snelheidspatronen per jaar een zekere regelmaat vertonen, onderscheiden we *5 perioden*:

- *winter (wt)* : 23 *sept.* − 26 *apr.*
- *vóórzomer (vz)* : 26 *apr.* − 1 *juli*
- *názomer (nz)* : 1 *juli* − 23 *sept.*
- *gehele zomer (zr)*: 26 *apr.* − 23 *sept.*
- *gehele jaar (jr)*: 23 *sept.* − 23 *sept.*

Uit de door het computerprogramma berekende uurlijkse snelheden kan eenvoudig de gemiddelde waarde van $v_{periode}$ voor de betreffende periode worden berekend. (zie §4.4)
De keuze van de smb-waarde behoeft enige toelichting.
We beschouwen bijv. het *jaar sept.* 2006 − *sept.* 2007.
Voor de *winter* van dit jaar is de smb-waarde gekozen van het *afgelopen* seizoen: *sept.* 2005 − *sept* 2006. Voor de *voorzomer, nazomer en gehele zomer* van 2007 nemen we de smb-waarde van het dan lopende seizoen *sept.* 2006 − *sept.* 2007.
De winter duurt 7 maanden en de zomer 5 maanden. Voor het *gehele jaar* nemen we daarom de volgende *gecorrigeerde* smb-waarde:

$$smb_{corr,jaar2006/2007} = (7/12).smb_{jaar2005/2006} + (5/12).smb_{jaar2006/2007} \tag{7}$$

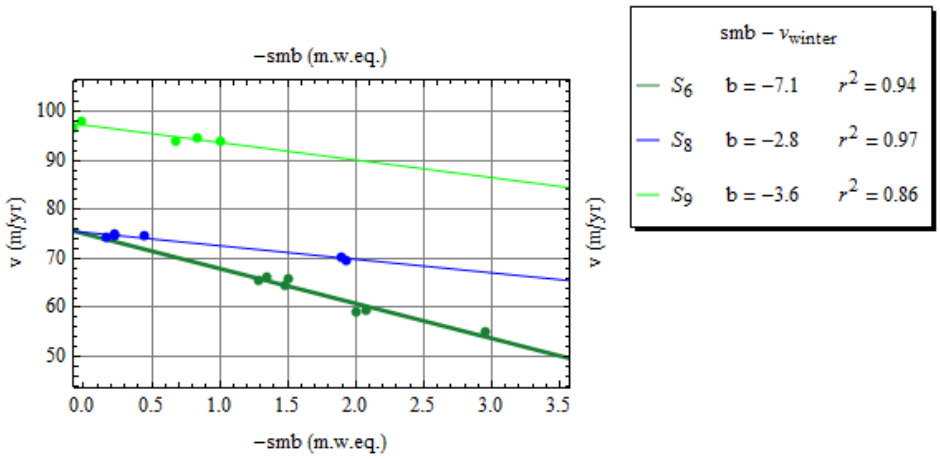
De smb-waarden voor de andere jaren worden op dezelfde manier verkregen.
Op deze manier vinden we voor elke periode en voor elk station een serie van 4 of 5 meetpunten. (het aantal meetpunten is afhankelijk van de totale meetperiode.) Op de x-as zetten we de *–smb-waarde* uit; op de y-as de $v_{periode}$. Als het punt in de plot zich dus *meer naar rechts bevindt*, is de x-coördinaat van het betreffende punt groter. Dit betekent dat de werkelijke *smb*-waarde meer negatief is. In dit geval is er dus *meer smelt.*
Door genoemde meetpunten wordt een lineaire fit en de bijbehorende *correlatiecoëfficient* r berekend. Als $r^2 > 0.5$ spreken we van een significant verband.

5.2 Per station: *resultaten*

In de volgende figuren en legenda geven we per periode *alleen* de regressielijnen en r^2-waarden weer, waarvoor het verband *significant* is. In dit geval wordt ook de waarde

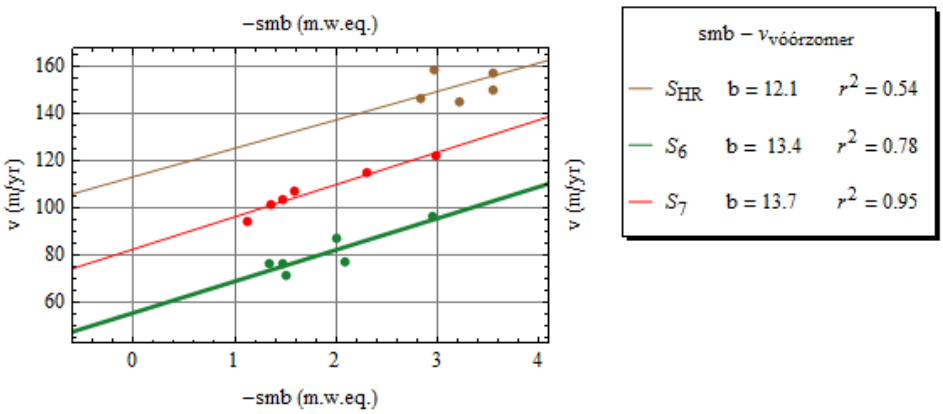
van de regressiecoëfficient b vermeld; dit is de *helling* van de betreffende regressielijn. De eenheid van b is steeds: $m/(m.w.eq\ .\ yr)$

- *winter*



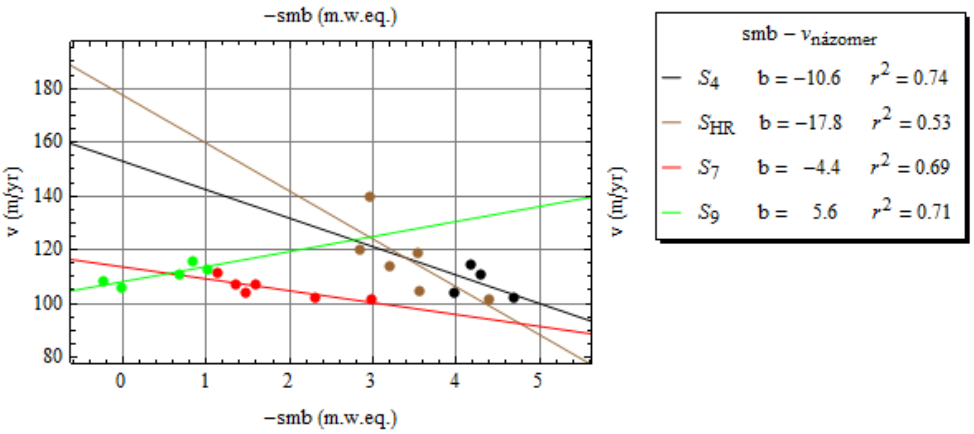
Figuur 9: *smb–v winter*

- *voorzomer*



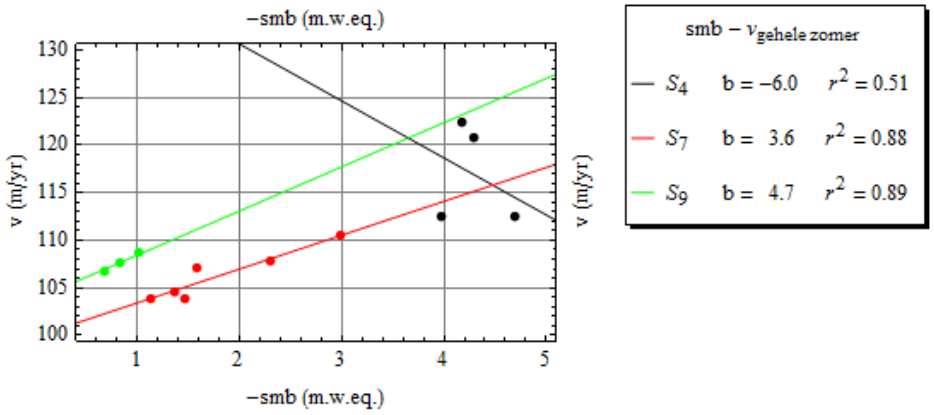
Figuur 10: *smb–v vóórzomer*

- *nazomer*



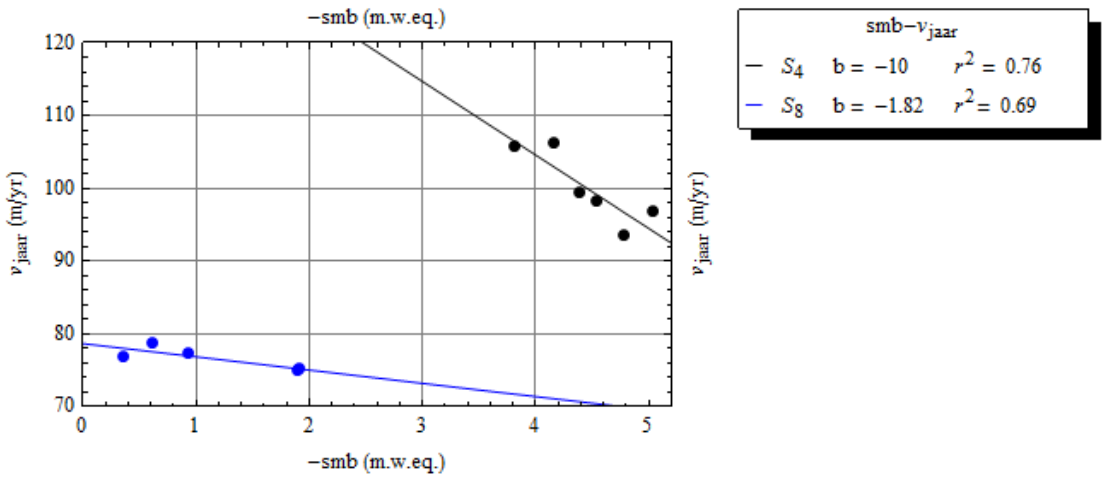
Figuur 11: *smb–v názomer*

- *gehele zomer*



Figuur 12: *smb–v gehele zomer*

- *gehele jaar*



Figuur 13: *smb–v gehele jaar*

Commentaar

- *winter* Het is logisch dat we in het geval van de *winter* niet de *smb*-waarde van het komende seizoen, maar van het *afgelopen* seizoen nemen. Fig. 9 leert ons dat voor de stations S_6, S_8 en S_9 het verband tussen *smb* en v significant is. De correlatie is negatief. Hoe meer smelt in de zomer, hoe lager de snelheid in de volgende winter. Voor S_6 is dit het sterktst.

- *vóórzomer* In de *vóórzomer* is het verband tussen *smb* en v voor de stations S_{HR}, S_6 en S_7 significant (fig. 10). De correlatie is positief. Hoe meer smelt in de voorzomer, hoe hoger de snelheden in de voorzomer. Deze stations reageren dus direct, primair op de smelt.

- *názomer* In de *názomer* is het verband tussen *smb* en v voor de stations S_4, S_{HR}, S_7 en S_9 significant. (fig. 11) Voor de eerstgenoemde drie stations is de correlatie negatief. Een grotere smelt geeft dus lagere snelheden in de názomer. Voor S_9 is de correlatie positief. Dit is min of meer toevallig om dat bij S_9 eigenlijk geen sprake is van een názomer.

- *zomer* Fig. 12 laat zien dat in de (gehele) *zomer* de correlatie voor de stations S_7, en S_9 sterk positief is en voor S_4 sterk negatief. Waarschijnlijk is over de gehele zomer genomen sprake van compenserende mechanismen. Het gevolg is dat er weinig relatie is tussen de smelt in de zomer en de snelheid.

- *jaar* Over het gehele jaar zien we bij de stations S_4 en S_8 een sterke negatieve correlatie tussen de smelt de snelheid.

Samenvattend kunnen we stellen dat, in het geval van significantie, de correlatie tussen de *smb*− en v−waarden negatief is voor de *winter*, de *názomer* en het *gehele jaar*. Voor de *vóórzomer* is de correlatie tussen smelt en snelheid juist positief. Voor de *gehele zomer* is er weinig relatie tussen smelt en snelheid.

Een toename van de smelt in de voorzomer impliceert dus een toename van de snelheid in de voorzomer. Voor de de nazomer , de winter en het gehele jaar geldt juist het omgekeerde
Het eerste lijkt heel logisch; het laatste juist niet. In § 5.5 proberen we een verklaring te geven voor genoemde fenomenen.

5.3 Over het gehele smeltgebied

In de vorige paragraaf hebben we de relatie onderzocht tussen smelt en snelheid per station. *Elk station telde even zwaar mee.* Het is de vraag of het laatstgenoemde fysisch correct is. Immers de hoger gelegen stations liggen veel verder uit elkaar dan de lager gelegen meetcentra; de hogere stations omvatten dus een veel groter gebied dan de lagere stations. In deze paragraaf onderzoeken we de relatie tussen de smelt en de snelheid in het *gehele* smeltgebied. We nemen daartoe *gewogen* gemiddelden van de $smb-$ en de v waarden van het gehele seizoen. Een station dat een groter gebied omvat zal zwaarder meewegen in de bepaling van genoemde gewogen gemiddelden.
In de 2e kolom van tabel 1 worden de posities weergegeven van de stations. Als we er van uitgaan dat de stations min of meer in een rechte lijn zijn gepositioneerd, dan hoort bijv. bij station S_9 een gebied met een lengte van 14 km. naar beneden (richting S_8) plus 26 km. naar boven (richting S_{10}); totaal dus 40 km. We nemen deze waarde als de weegfactor voor S_9. Omdat bij S_{10} nauwelijks verschil is tussen de snelheden in zomer en winter, wordt dit station verder buiten beschouwing gelaten in onze berekeningen.
We onderscheiden weer de 5 perioden, zoals gedefinieerd in § 5.1 Voor elk station i en voor elk seizoen k resp. elk jaar zijn $v^k_{av,i}$ en smb^{jr}_i bekend. In tabel 3 vinden we de betreffende waarden voor de vóórzomer van 2007.

Tabel 3: *vóórzomer 2007*: weegfactoren w en waarden smb en v_{av}

site	w	$-smb$	v_{av}
S_4	4.5	4.7	125.40
S_5	5.5	4.19	111.58
S_{HR}	15.5	3.55	157.40
S_6	19	2.0	86.93
S_7	13	2.3	114.56
S_8	19.5	1.16	87.77
S_9	40	0.68	101.52

Vervolgens berekenen we zowel van de $smb-$, als van de $v-$ waarden een *gewogen gemiddelde.*

Voor smb vinden we:

$$-smb_{wav,vz,2007} = \frac{(4.5 * 4.7 + ... + 40 * 0.68)}{(4.5 + 5.5 + ... + 40)} = 1.6407 \quad m.w.eq. \tag{8}$$

Exact hetzelfde doen we ook de de v - waarden :

$$v_{wav,vz,2007} = \frac{(4.5 * 125.40 + ... + 40 * 101.519)}{(4.5 + 5.5 + ... + 40)} = 106.087 \ m/yr. \tag{9}$$

(de labels *av* en *wav* zijn de afkorting van *average* (*gemiddelde*) resp. *weighted average* (*gewogen gemiddelde*)

Voor de vóórzomer van 2007 vinden we op deze manier twee grootheden.
We noteren dit als: $\{vz, 2007, 1.6407, 106.087\}$

Als we aannemen dat het gebied overal ongeveer dezelfde breedte heeft, geeft de gewogen –smb-waarde maal de totale lengte van het gebied, (117 km.) een maat voor het totale volume ijs dat is gesmolten per km. breedte

We herhalen boven omschreven procédé voor de andere jaren: 2008 t/m 2011

We vinden dan de volgende waarden:

Tabel 4: *voorzomer*: gewogen gemiddelden van *smb* en v per jaar.

$jaar$	$-smb_{wav,vzr}$	$v_{wav,vzr}$
2006	1.725	102.51
2007	1.641	106.09
2008	0.925	99.02
2009	0.798	100.73
2010	2.252	112.07
2011	1.697	100.07

De tabel geeft dus 6 punten weer:

- de x- coördinaat (in de 2^e kolom van tabel 4.) is de gewogen, gemiddelde $-smb$ - waarde: $-smb_{wav}$
- de y - coördinaat (in de 3^e kolom van tabel 4.) is de gewogen, gemiddelde v– waarde: v_{wav}

Evenals in § 5.2 wordt door deze punten weer een lineaire fit en de bijbehorende *correlatiecoëfficient* r berekend.

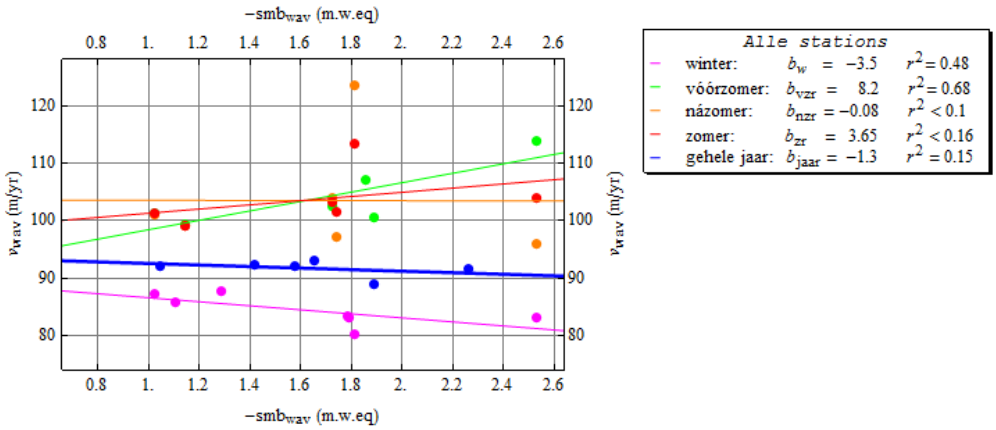
Ook voor de andere perioden berekenen we deze waarden.

We vinden totaal dus 5 regressielijnen, 5 regressiecoëfficienten en 5 r^2 - waarden.

5.4 Over het gehele smeltgebied: *resultaten*

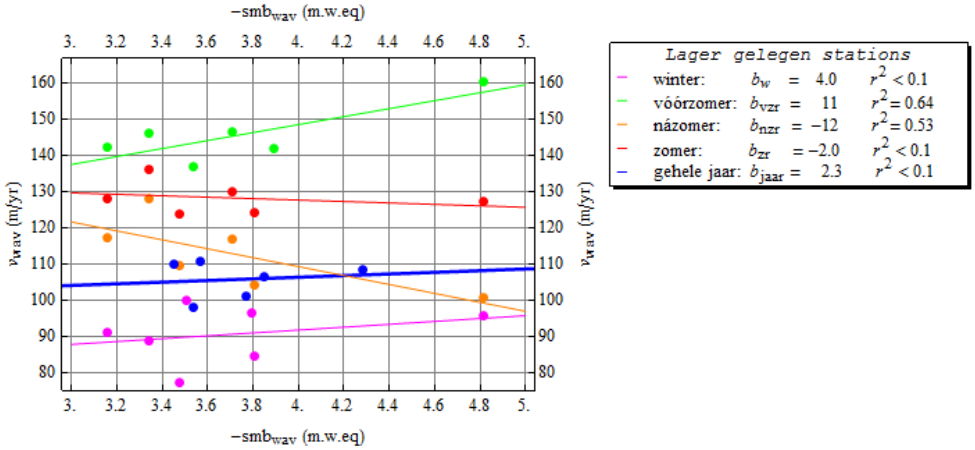
We geven nu de resultaten weer van het onderzoek naar het verband tussen de gewogen gemiddelden van smelt en snelheid.

- *alle stations*



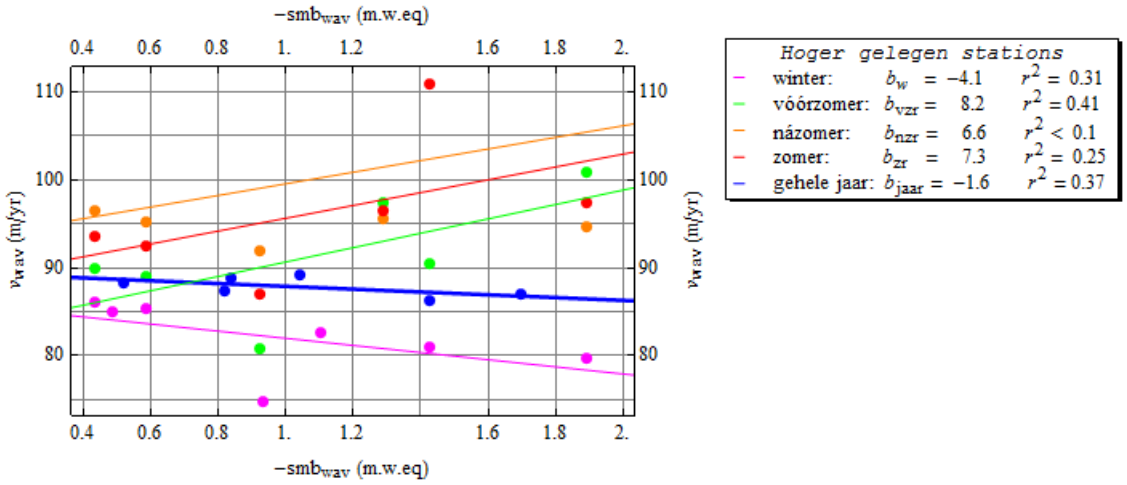
Figuur 14: verband $-smb_{wav} - v_{wav}$ *alle* stations

- *lager gelegen stations*

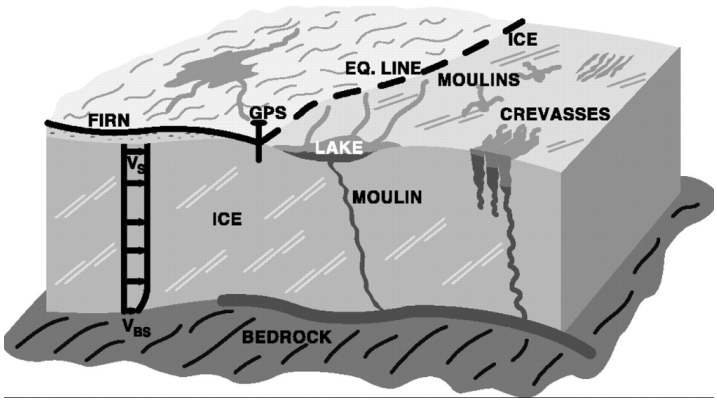


Figuur 15: verband $-smb_{wav}$ − $v_{tot,wav}$ *lager gelegen* stations

- *hoger gelegen stations*



Figuur 16: verband $-smb_{wav} - v_{tot,wav}$ *hoger gelegen* stations



Figuur 17: schematische weergave vorming moulins in het ijs

5.5 Interpretatie resultaten

Twee mechanismen
In het geval we *alle* stations meenemen in onze berekeningen (fig. 14), blijkt dat het verband tussen gewogen $-smb-$ en $v-$waarden significant is voor de winter en de voorzomer. In de voorzomer is sprake van een positieve correlatie; in de winter is de correlatie echter negatief. Over het gehele jaar gerekend is de correlatie ook negatief; een toename van de smeltwaarde van $\Delta_{|smb|} = 1$ m.w.eq. impliceert een afname $b_{jaar} = -1.3$ m/yr. van de snelheid
Voor de *laagste* stations (fig. 15) geldt dat de correlatie tussen smelt en snelheid in de voorzomer positief, maar in nazomer juist negatief is. Over het gehele jaar genomen is de correlatie poisitief; de snelheid neemt toe met 2.3 m/yr per 1 m. w. eq. toename van de smelt.
Bij de *hoogste* stations (fig. 16) zien we dat er voor *dezelfde perioden* als bij *alle* stations sprake is van een negatieve dan wel positieve correlatie. In dit geval geldt voor het gehele jaar dat een toename van de smeltwaarde van $\Delta_{|smb|} = 1$ m.w.eq. een afname $b_{jaar} = -1.6$ m/yr. van de snelheid impliceert.
Ondanks dat de $b_{jaar}-$waarde van de *lager gelegen* stations positief is, geeft de negatieve $b_{jaar}-$ waarde van de *hoger gelegen* stations de doorslag in de berekening van de $b_{jaar}-$-waarde van *alle* stations; laatstgenoemde $b-$waarde is ook negatief. De hoger gelegen stations omvatten immers een veel groter smeltgebied (lengte = 91.5 km.) dan de lager gelegen stations (lengte = 25.5 km.)

Voor het geval van *alle* stations zien we dus dat over de periode van het gehele jaar een toename van de smelt een afname van de snelheid impliceert. Voor de *hoogste* stations geldt dit in versterkte mate. Dit is tegen onze intuïtie. Een dergelijke paradox bleek ook bij het verband tussen de niet–gewogen waarden van *smb* en v (§ 5.2); in de nazomer, de winter en het gehele jaar was de correlatie tussen smelt en snelheid negatief. Zowel bij het verband tussen de gewogen gemiddelden als de niet gewogen gemiddelden van smelt en snelheid geldt dat in de voorzomer steeds wél sprake is van een positieve correlatie.
De toename c.q. afname van v als gevolg van een toegenomen *smb* kan echter als volgt worden verklaard:
We gaan uit van het gegeven dat een gletsjer twee soorten afwatering heeft: *geleidelijk* of *gefaseerd*.

1. *geleidelijke watertoevoer*
   Omdat er veel smelt is in de vóórzomer, is er dus ook veel smeltwater. Hierdoor ontstaan *geleidelijk* grote meren van smeltwater. Doordat het onderliggende ijs een kleinere dichtheid heeft, ontstaan door de waterdruk z.g.n. moulins. Dit zijn grotere en kleinere afvoerkanalen in het ijs, zowel horizontaal als verticaal. (zie. fig. 17) Hierdoor zal veel smeltwater (door de waterdruk) uiteindelijk de bedding van het ijs bereiken. Er onstaat op deze manier *geleidelijk* een uitgebreid drainage systeem, dat ook het smeltwater van de nazomer goed kan verwerken. Door het water onder het ijs wordt *geleidelijk* een opwaartse waterdruk opgebouwd en door deze druk wordt de gletsjer als het ware opgetild. Door deze verplaatsing in verticale richting en het feit dat het water in de bedding als glijmiddel fungeert, zal het ijs sneller gaan glijden richting zee.
   Het systeem kan zich echter al binnen enkele uren tot dagen aanpassen aan de omstandigheden:
   Onder invloed van een hoge waterdruk worden de kanalen namelijk steeds groter.

En onder invloed van de hogere waterdruk en de versnelde beweging van de ijsmassa worden ook de holtes in de gletsjer steeds groter. Als de grote waterstroom aanhoudt, zal er een punt worden bereikt waarop de druk van de ijsmassa de waterdruk overstijgt. Het water wordt nu via de holtes in het ijs weggeduwd. Het gevolg is dat het zojuist genoemde glijmiddeleffect afneemt en de ijsmassa vertraagt; v neemt dus af. In het model van een *geleidelijke* afwatering betekent *meer smelt uiteindelijk dus een afname van de snelheid.* Hierdoor wordt dus mogelijk negatieve correlatie tussen smelt en snelheid in de winter, de nazomer en het gehele jaar verklaard.

2. *gefaseerde watertoevoer*
   Er is echter ook een andere mogelijkheid: als de watertoevoer niet geleidelijk maar *gefaseerd* plaatsvindt, gaat de ijsmassa juist sneller bewegen. Immers, als er steeds *met tijdsintervallen, kortstondig* heel veel water door de gletsjer heen sijpelt, heeft dit telkens een versnellend effect. En omdat de grote watertoevoer kort duurt, treedt het boven omschreven vertragingseffect niet of nauwelijks op. De ijsmassa zal in dit geval over een langere periode meer opschuiven dan wanneer dezelfde hoeveelheid water *geleidelijk* zou doorsijpelen.
   De kortdurende, intensieve toename van de snelheid bij station S_9 in juli 2012 (§ 4.6) kan goed worden verklaard door dit laatsgenoemde model van watertoevoer: met tijdsintervallen sijpelt kort tijd veel water door de gletsjer.
   In de voorzomer is mogelijk sprake van genoemde gefaseerde wijze van watertoevoer; méér, kortstondige episodes van veel smelt impliceren een grotere snelheid. In de voorzomer is er ook nog geen uitgebreid drainage-systeem, zoals in de nazomer. Het onder 1 genoemde vertragingseffect treedt dus nog niet of nauwelijks op. I.h.a. zou laatstgenoemd effect op Groenland kunnen optreden als gevolg van seizoensgebonden smeltwater en tijdelijke watertoevoer door regen/natte sneeuw.

6 Onzekerheden in de berekende grootheden

6.1 Algemeen

De onzekerheid in *smb* wordt geschat op $\sigma_{smb} = 0.20$ m.w.eq. De marge in de posities is ca. 1.5 m. De genoemde marges in *smb* en v werken door in de onzekerheden van smb_{wav} en v_{wav} Als de grootheid $g(x_1, ...x_n)$ afhangt van de onafhankelijke variabelen x_1, ..., x_n met onzekerheden $\sigma_{x_1}, ...\sigma_{x_n}$. Dan geldt voor de marge σ_g in de berekende waarde g:

$$\sigma_g^2 = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\delta g}{\delta x_i} \sigma_{x_i})^2 \tag{10}$$

Voor het seizoen k geldt:

$$smb_{wav}^k = \sum w_i . smb_i^k \tag{11}$$

$$v_{wav}^k = \sum w_i . v_{av,i}^k \tag{12}$$

De sommatie is over de stations i; w_i zijn de gewichten uit kolom 2 van tabel 3 en smb_{wav}^k en v_{wav}^k de gewogen gemiddelden van *smb* en v van seizoen k uit kolom 3 resp. 4 van tabel 4.

Omdat de onzekerheden in de gemiddelde snelheden onafhankelijk zijn van het station i en de marge in de smb-waarde *bovendien* onafhankelijk is van het seizoen k, dus:

$$\sigma_{v,av,i}^k = \sigma_{v,av}^k \qquad en \qquad \sigma_{smb,i}^k = \sigma_{smb} \tag{13}$$

volgt m.b.v. (4), (5) en (6) dat:

$$\sigma_{smb_{wav}} = \frac{\sigma_{smb}}{w} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{7} w_i^2} \quad en \quad \sigma_{v,wav}^k = \frac{\sigma_{v,av}^k}{w} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{7} w_i^2} \tag{14}$$

$$met \;\; w = \sum_{i=1}^{7} w_i \tag{15}$$

6.2 Onzekerheden in *smb* en *v*

De smb-waarde wordt slechts één keer per jaar gemeten. We schatten de onzekerheid in de smelt voor elk seizoen en voor elk station op $\sigma_{smb} = 0.20$ m.w.eq.
We onderzoeken nu de onzekerheid in v_{wav}:
Elk uur wordt de precieze locatie gemeten. We schatten de onzekerheid in de afstand over een seizoen op 1.5 m. We berekenen vervolgens de onzekerheid in de snelheid van bijv. de *voorzomer* als volgt: de *vzr* duurt van 26 april tot 1 juli. Dit is 1584 uur. Een geheel jaar duurt 8760 uur. De onzekerheden in resp. de snelheid en in het gemiddelde worden dus gegeven door:

$$\sigma_{v,vzr} = 1.5 \times 8760/1584 = 8.30 \quad en \quad \sigma_{v,vzr,av} = \sigma_{vzr}/\sqrt{1584} = 0.21 \tag{16}$$

Omdat

$$w = 117 \qquad en \qquad \sum_{i=1}^{7} w_i^2 = 2801 \tag{17}$$

volgt nu m.b.v. (8b), (9) en (10) dat:

$$\sigma_{smb_{wav}} = 0.09 \quad (voor\ elk\ station\ en\ elk\ seizoen) \tag{18}$$

$$\sigma_{v_{vzr,wav}} = 0.09 \quad (voor\ elk\ station) \tag{19}$$

Op dezelfde manier wordt $\sigma_{v_{k,wav}}$ voor de andere seizoenen berekend.

Tabel 5: onzekerheden in *smb* en *v* per seizoen *k*

k	σ_{smb_k}	$\sigma_{smb_{wav,k}}$	σ_{v_k}	$\sigma_{v_{wav,k}}$	$\sigma_{v_{wav,k}}$
wt	0.2	0.09	2.55	0.04	0.02
vzr	0.2	0.09	8.30	0.21	0.09
nzr	0.2	0.09	6.52	0.15	0.07
hzr	0.2	0.09	3.65	0.06	0.03
jr	0.2	0.09	1.50	0.02	0.01

Voor de *lager* gelegen stations S_4, S_5 en S_{HR} en de *hoger* gelegen stations S_6, S_7, S_8 en S_9 gelden aangepaste waarden voor w en $\sum w_i^2$. Een geheel analoge berekening leert ons dat de onzerheden in smb_{wav} en $v_{wav,i}$ in deze situaties resp. 1.5 en 1.2 maal zo groot zijn als de corresponderende waarden in kolom 3 en 6 van tabel 5.

In § 5.2 en § 5.4 wordt voor elk seizoen k $y = v_k$ c.q. $y = v_{k,wav}$ uitgezet tegen $x = -smb$ resp. $x = -smb_{wav}$. Vervolgens wordt bij de betreffende meetpunten een lineaire fit berekend. De onnauwkeurigheden in de grootheden x en y kunnen op de volgende manier worden verdisconteerd in een equivalente onnauwkeurigheid voor *alleen* de variabele y:

$$\sigma_{y,equiv.} = \sqrt{\sigma_x^2 + (b.\sigma_y)^2} \tag{20}$$

met b de helling van de bijbehorende, lineaire fit.

Voorbeeld:
Voor o.a. S_6 geldt in de *winter* een significant verband tussen *smb* en v_{wt} (zie fig. 9)
De berekende helling van de lineaire fit $smb - v_{wt}$ voor S_6 is $b_{6,wt} = -7.1$. In dit geval is de equivalente onnauwkeurigheid in v_{wt} dus gelijk aan:

$$\sigma_{v,6,wt,equiv.} = \sqrt{0.04^2 + (7.1 \times 0.2)^2} = 1.42 \quad m/yr \tag{21}$$

De v_{wt}-waarden van S_6 zijn minimaal 55 m/yr. Genoemde marge is minder dan 2.6 % hiervan. Dergelijke, kleine percentages gelden ook voor de andere stations en seizoenen waarvoor een significant verband werd vastgesteld. Deze zijn maximaal 3.8 % Uit de meetwaarden wordt de regressielijn berekend. De marge in $\sigma_{v,wt,equiv.}$ impliceert op zijn beurt weer een fout in de regressiecoëfficient b. In dit geval bedraagt deze: $\sigma_{b,6,wt} = 0.86$. Dit is 12 % van $b_{6,wt}$

In de tabel in de bijlage [4] geven we voor elk station en voor elke periode waarvoor een significant verband tussen de smelt en de snelheid werd vastgesteld, de waarden van de regressiecoëfficient en de bijbehorende absolute en procentuele fout hierin. Voor de *voorzomer* en het *gehele jaar* zijn de procentuele marges maximaal 5 resp. 10 %.
In §5.4 werd het verband bestudeerd tussen de gewogen gemiddelden van snelheid en smeltwaarde. Dit verband werd onderzocht voor *alle* stations, voor de *lager gelegen* stations apart en voor de *hoger gelegen* stations apart. Steeds zijn 5 seizoenen onderzocht, maar het verband tussen genoemde grootheden over het *gehele jaar* is voor ons het meest interessant. M.b.v. een foutenanalyse, zoals zojuist beschreven, zijn opnieuw de procentuele fouten voor deze periode berekend. Deze vindt de lezer in tabel 6.

Tabel 6: Verband $smb_{wav} - v_{wav,jaar}$
regr. coëff. b_{jaar} en bijbehorende procentuele fout σ_b^{proc}

area	$b_{area,jr}$	$\sigma^{proc}_{b,area,jr}$
alle	-1.3	8.7 %
lage	2.3	0.2 %
hoge	-1.6	9.6 %

In de situaties dat er sprake is van een significant verband tussen smelt en snelheid c.q. de situaties die voor ons onderzoek interessant zijn, blijken de relatieve onnauwkeurigheden dus hoogstens 10 % te zijn van de berekende waarden. Dit is binnen de grenzen van het toelaatbare. Meer gedifferentieerde metingen van de smb-waarden, bijv. per seizoen zouden een kleinere marge voor de regressiecoëfficienten opleveren.

[4] zie bijlage 4

7 Conclusie

Dit onderzoek toont aan dat het goed mogelijk is dat meer smelt op de ijskap van Groenland, veroorzaakt door een warmer klimaat, niet alleen een toename maar ook heel goed een áfname van de snelheid van het ijs tot gevolg kan hebben. Een belangrijke vraag is of er op Groenland vooral sprake is van *geleidelijke* of juist *gefaseerde, kortstondige* afvoer van water (§ 5.5). Bovendien, welke vorm van watertoevoer zal in de toekomst domineren ? Of is er een blijvende afwisseling tussen genoemde mogelijkheden?
In ons onderzoek hebben we de posities en snelheden onderzocht in *horizontale* richting. Gewoonlijk is er echter ook een verplaatsing en een snelheid in *verticale* richting. Het is zelfs mogelijk dat locaal door afsmelting enerzijds én verplaatsing van het ijs naar boven anderzijds, per saldo het ijsoppervlak op dezelfde hoogte is gebleven. Het is dus zeker nuttig ook de verticale componenten van positie en snelheid te bestuderen.
Het is jammer dat de *smb*-waarden slechts één keer per jaar is gemeten. Meer gedifferentieerde metingen, bijv. per 3 maanden, zouden meer inzicht geven in het verband tussen smelt en de snelheid waarmee de ijskap zich beweegt.
We zouden ook graag metingen van de waterdruk vlak boven het ijsbed in het onderzoek betrekken. Hoe is deze afhankelijk van tijd en positie ? Is er na een episode van sterke smelt ook binnen korte tijd een significante toename van de waterdruk ? Of geldt dit alleen voor het hoger gelegen gebied ?
Genoeg vragen die het waard zijn te worden overdacht en die uitnodigen voor verder onderzoek.

8 Dankwoord

Gekomen aan het einde van het verslag en daarmee aan het einde van de periode van het bachelor-onderzoek wil ik Roderik van de Wal hartelijk bedanken voor de prettige en leerzame begeleiding. De gesprekken, gewoonlijk 1 of 2 keer per maand, waren steeds leerzaam en ontspannen. Ik heb veel van je geleerd over de ijskap van Groenland. Maar ook heb ik geleerd van je opbouwende kritiek, als ik iets verkeerd had gedaan. Nogmaals mijn dank voor al je moeite en geduld !
Ook wil ik je, als glacioloog, veel succes en plezier toewensen met het verdere onderzoek naar het gedrag van ijskappen en gletsjers, maar ook met het overdragen en delen van je kennis aan en met studenten en collega's.

9 Bijlage

1. *Tabel smb-waarden per jaar en per station.* [6]

Tabel 7: *smb* -waarden (m.w.eq.) per jaar en per station.
Het jaar 2004/2005 is de periode van 23 *sept*. 2004 − 23 *sept*. 2005 etc.

jaar	S_4	S_5	S_{HR}	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
2004/2005	-4.28	-3.63	-3.24	-1.28	-1.57	-0.17	0.08	0.45
2005/2006	-4.17	-3.7	-2.97	-1.5	-1.13	-0.23	0.08	0.39
2006/2007	-4.7	-4.19	-3.55	-2.0	-2.3	-1.16	-0.68	0.04
2007/2008	-4.29	-4.1	-3.54	-1.48	-1.36	-0.44	0.02	0.21
2008/2009	3.97	-3.38	-2.84	-1.34	-1.47	-0.22	0.23	0.2
2009/2010	-5.9	-5.12	-4.39	-2.95	-2.99	-1.93	-1.01	0.2
2010/2011	-3.81	-4.23	-3.21	-2.08	-1.59	-1.89	-0.84	0.2

2. *Correlatiecoëfficient.*
   Zij $\{(x_1, y_1).....(x_n, y_n)\}$ een lijst van meetwaarden.
   De *correlatiecoëfficient* r wordt gedefinieerd door:

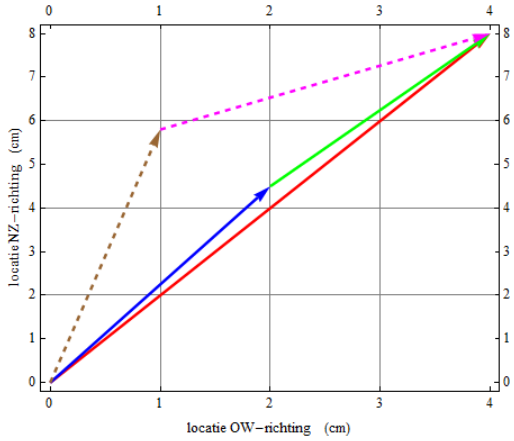
$$r = \frac{(\overline{xy} - \overline{x}.\overline{y})}{\sqrt{(\overline{x^2} - \overline{x}^2)(\overline{y^2} - \overline{y}^2)}}$$

   waarbij:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \overline{xy} = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} x_i.y_i \qquad \overline{x^2} = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad etc.$$

   Het getal r geeft weer in welke mate de x-waarden en y-waarden aan elkaar zijn gecorreleerd. r is minimaal -1 en maximaal 1
   Als bijv. $r = 0.9$ of -0.9 is sprake van een sterke positieve resp. negatieve correlatie. In dit geval zal de regressielijn $y = a + b.x$ (berekend volgens het kleinste kwadraten-principe) goed passen bij de meetwaarden. In het eerste geval is $b > 0$, in het tweede is $b < 0$.
   r^2 wordt de *determinatiecoëfficient* genoemd. In dit onderzoek noemen we het verband tussen x en y significant als $r^2 > 0.5$. Als $0.3 < r^2 < 0.5$ spreken we van een zwak significant verband.
   De helling van de regressielijn b wordt de *regressiecoëfficient* genoemd.

3. *Berekening van $v_{seizoen}$ op 2 verschillende manieren.*



Figuur 18: berekening snelheden op 2 manieren

Stel dat het ijs zich in 2 uur verplaatst van punt $(0, 0)$ naar punt (4.8). Dit kan bijv. via de in fig. 18 getekende trajecten:
-het *blauw-groene-traject*, via punt $(2, 4.5)$ óf
-het (gestippelde) *bruin-paarse*-traject, via punt $(1, 5.8)$

De korte pijlen geven steeds een verplaatsing (in cm.) per uur weer; de rode pijl is de resulterende verplaatsing in 2 uur.

Voor de snelheden (in cm/h) geldt:

$$v_{blauw} = \sqrt{(2^2 + 4.5^2)}/1 = 4.92 \qquad v_{groen} = \sqrt{(2^2 + 3.5^2)}/1 = 4.03$$
$$v_{bruin} = \sqrt{(1^2 + 5.8^2)}/1 = 5.89 \qquad v_{paars} = \sqrt{(3^2 + 2.2^2)}/1 = 3.72$$

De gemiddelde snelheid kan nu op de volgende manieren worden berekend:

$$v_{gem,bl,gr} = (4.92 + 4.03)/2 = 4.48$$
$$v_{gem,br,ps} = (5.89 + 4.80)/2 = 4.80$$
$$v_{rood} = \sqrt{(4^2 + 8^2)}/2 = 4.47$$

De waarden $v_{gem,bl,gr}$ en $v_{gem,br,ps}$ verschillen 0.13 % resp. 7/4 % van v_{rood}. Als de verplaatsingen (nagenoeg) in dezelfde richting zijn, zoals bij het *blauw-groene*-traject, is het verschil dus zeer klein. Omgekeerd, als het verschil zeer klein is, moeten de verplaatsingen bij benadering steeds in dezelfde richting hebben plaatsgevonden. We geven hiervan geen wiskundig bewijs, maar het voorbeeld van het *bruin-paarse-traject* is een goede illustratie van de juistheid van deze bewering. Het bleek dat voor de data die in dit onderzoek zijn bestudeerd, het verschil in de meeste gevallen hoogstens 1 % was. Bij de berekeningen van het gemiddelde v_k van de snelheid over een bepaald seizoen hebben we daarom steeds de berekening $v_{gem,bl,gr}$ gehanteerd.

4. *Tabel waarden regr. coëfficienten, absolute en procentuele marge*

Tabel 8: regr. coëff. , absolute en proc. marges -$smb - v_{periode}$ (§ 5.2)

per.	station i	$b_{i,per}$	$\sigma_{b,i,per}$	$\sigma^{proc.}_{b,i,per}$
wt	S_6	-7.1	0.85	12 %
wt	S_8	-2.8	0.60	22 %
wt	S_9	-3.6	0.70	19 %
vz	S_{HR}	12	0.28	2.3 %
vz	S_6	13	0.42	3.1 %
vz	S_7	14	0.68	5.0 %
nz	S_4	-11	0.25	2.3 %
nz	S_{HR}	-18	0.27	1.5 %
nz	S_7	-4.4	0.24	5.5 %
nz	S_8	5.6	0.45	8.0 %
hz	S_4	-6.0	0.15	2.5 %
hz	S_7	3.6	0.44	12 %
hz	S_9	4.7	0.84	18 %
jr	S_4	-10.1	0.57	5.6 %
jr	S_8	-1.82	0.19	10 %

10 Literatuurlijst

[1] Das etal, *Fracture propagation to the base of the Greenland Ice Sheet during supraglacial lake drainage*, 2011

[2] Joughin, I, etal, *Seasonal speedup along the western flank of the Greenland Ice Sheet*, 2010

[3] Spiegel, M.R., *Probability and Statistics*, New York, 1980

[4] Taylor, J.R., *Error Analysis*, Sausalito, Californië, 1997

[5] Van de Wal, R. S. W. etal, *Large and rapid melt-induced velocity changes in the ablation zone of the Greenland Ice Sheet*, 2008

[6] Van de Wal, R. S. W., etal, *Twenty-one years of mass balance observations*, 2012

[7] Zwally, H. J., etal, *Surface melt-induced acceleration of Greenland Ice-Sheet flow*, 2002