Redeneren met gronden

Correctheid, volledigheid en realisatie van rechtvaardigings logica

Bacheloreindwerkstuk Kunstmatige Intelligentie
Universiteit Utrecht
Begeleider: Rosalie Iemhoff

AnneMarie Borg
3685918
4 Juli 2013

1 Inleiding

Kunstmatige intelligentie kan gezien worden als het vakgebied dat probeert een agent, in de breedste zin van het woord, intelligente te ontwerpen. Daarvoor zal zo'n agent moeten redeneren, bij voorkeur zoals wij mensen dat doen, aangezien wij onszelf als intelligent beschouwen. Logica is een manier om redeneren te abstraheren.

Binnen de opleiding kunstmatige intelligentie aan de Universiteit Utrecht worden propositie logica, predikaten logica en modale logica onderwezen. Dit is echter nog maar het topje van de ijsberg als het gaat over verschillende soorten logica's. Ieder van deze logica's probeert een bepaald aspect van het menselijk redeneren zo goed mogelijk te modelleren.

Rechtvaardigings logica is nauw verwant aan de boven genoemde modale logica. Oorspronkelijk werd de rechtvaardigings logica gebruikt om over kennis te redeneren zonder dat de zogenoemde Gettier problemen daarbij in de weg zitten. Het voert echter te ver om deze problemen te bespreken, bekijk voor meer informatie daarover het artikel van S. Artemov uit 2008 [2]. In de modale logica wordt met noodzakelijkheden geredeneerd, deze zijn op slechts één manier te omschrijven, met de $\Box$. Binnen de rechtvaardigings logica wordt met gronden geredeneerd, deze worden met letters aangegeven. Er is hierin niet slechts een grond, maar er kunnen in een afleiding meerdere gronden voorkomen en er kunnen nieuwe (samengestelde) gronden ontstaan.

Een agent die menselijk moet kunnen redeneren zal ook om moeten kunnen gaan met problemen zoals Gettier deze in 1963 omschreef. Dat is mogelijk met behulp van de rechtvaardigings logica.

Het doel van dit artikel is het definiëren van de rechtvaardigings logica, aan de hand van de regels, axioma's en modellen die bij de logica horen. Hierbij zal eveneens ingegaan worden op het concept *constanten specificatie*, het is een onderdeel van de logica dat niet altijd nodig lijkt, maar als er geen goede definitie van gegeven zou worden, zouden waarheden niet bewezen kunnen worden. Er wordt een poging gedaan duidelijk te maken waar de constanten specificatie voor nodig is.

Vervolgens zal voor de *Logic of Proofs* (een onderdeel van de rechtvaardigings logica) correctheid en volledigheid bewezen worden. Modale logica en rechtvaardigings logica liggen dichtbij elkaar, het is zelfs mogelijk om afleidingen uit de ene logica om te vormen tot afleidingen uit de andere logica. Dit proces wordt realisatie genoemd en zal eveneens omschreven worden.

Aan de hand van opgenomen voorbeelden krijgt de lezer een idee hoe formules, modellen en afleidingen in de rechtvaardigings logica eruit zien en ontstaat een idee over het gebruik van deze logica als manier van redeneren.

2 Rechtvaardigings logica

Er zijn meerdere logica's die voortbouwen op de klassieke propositie logica. Daarbij valt te denken aan de predikaten logica, waarin gebruik wordt gemaakt van kwantoren $\forall$ (voor alle) en $\exists$ (er is een), of de modale logica, waarin gebruik wordt gemaakt van $\Box$ (noodzakelijk) en $\Diamond$ (mogelijk). In de modale logica kan onderscheid gemaakt worden tussen alle volgende werelden, met $\Box$ en minimaal één volgende wereld, met $\Diamond$. Er geldt echter altijd dat $\Box A$ gelijk is aan $\Box A$ en $\Diamond A$ is gelijk aan $\Diamond A$. Het is niet mogelijk een onderscheid aan te brengen tussen die volgende werelden, A is daar waar, of A is daar niet waar.

Rechtvaardigings logica is eveneens een logica die voortbouwt op de klassieke propositie logica. Het doel van deze logica is het modelleren van rechtvaardigingen. De waarheid van een uitspraak is gebaseerd op een grond, deze wordt aangegeven met een kleine letter. Als t een grond is voor een formule A, geldt $t : A$. Het zou heel goed kunnen zijn dat voor de formule A twee verschillende gronden bestaan: s en t. In tegenstelling tot de modale logica geldt nu dat $s : A$ en $t : A$ niet hetzelfde zijn. De formule $s : A$ geeft aan dat A waar is op grond van s en $t : A$ geeft aan dat A waar is op grond van t, deze gronden zijn verschillend, waardoor de formules eveneens verschillend zijn.

Naast de klassieke propositie logica wordt in de rechtvaardigings logica gebruik gemaakt van in elk geval de volgende twee axioma's:

$$\textbf{Applicatie: } s : (A \to B) \land t : A \to (s \cdot t) : B.$$
$$\textbf{Som: } s : A \to (s + t) : A \text{ en } t : A \to (s + t) : A.$$

Hierijn zijn A en B twee willekeurige formules en s en t twee gronden.

2.1 Verschillende vormen van rechtvaardigings logica

Lange tijd was de logica waarmee men ook rechtvaardigingen weer kon geven de *Logic of Proofs* (**LP**), ontworpen door Sergei Artemov. In het artikel dat Artemov in 2008 publiceerde [2], wordt echter de *Rechtvaardigings Logica* geïntroduceerd, met verschillende varianten.

De meest eenvoudige rechtvaardigings logica is $\mathbf{J}_0$, deze bestaat slechts uit de klassieke propositie logica, Applicatie en Som. Uit de klassieke propositie logica is Modus Ponens een belangrijke regel voor de rechtvaardigings logica.

Een agent die volgens $\mathbf{J}_0$ redeneert is zeer skeptisch: niets is waar, behalve de tautelogieën van de klassieke propositie logica en de axioma's zoals deze gedefinieerd zijn voor de rechtvaardigings logica. Toch kan zo'n agent wel redeneren met relatieve waarheden: wanneer een agent enkele aannames doet, kan hij op basis daarvan een waarheid concluderen. De aannames en de conclusie bevatten dan alleen variabele gronden.

Ondanks dat zo'n agent de conclusie niet als een absolute waarheid ziet (altijd waar), gaat hij ervan uit dat als zijn aannames toch waar blijken te zijn, de afgeleide waarheid eveneens waar. Als zo'n waarheid ontdekt wordt, zouden de variabele gronden uit de aannames vervangen kunnen worden door constante gronden. Op basis van de afleiding zullen dan eveneens de gronden uit de conclusie constantes worden.

De logica van rechtvaardigingen wordt verkort weergegeven als **J**. Deze bestaat uit de logica $\mathbf{J}_0$ en het volgende axioma:

> *Voor alle axioma's A en iedere constante e_1, e_2, ... , e_n kan afgeleid worden dat:* $e_n : e_{n-1} : \ldots : e_1 : A$.

Dit axioma wordt ook wel internalisatie genoemd. Met dit axioma worden constante gronden toegekend aan de axioma's die bij de rechtvaardigings logica horen. Dit gebeurd met behulp van de constanten specificatie, hoe dit in zijn werk gaat, wordt verderop uitgelegd.

In bepaalde vormen van de modale logica is een axioma opgenomen waarmee gezegd wordt dat als een agent iets weet, dan is het ook zo. Met andere woorden, je kunt niet iets weten dat niet waar is. Voor de modale logica geldt: als $\vdash A$ dan eveneens $\vdash \Box A$. In de rechtvaardigings logica bestaat zo'n zelfde axioma. Als ergens een grond voor bestaat, dan is het ook zo, dit wordt *Feitelijkheid* genoemd. De logica van feitelijke rechtvaardigingen, afgekort **JT** bestaat uit **J** en de Feitelijkheids regel: $t : A \to A$. Met deze regel geldt dat als $t : A$ af te leiden is, dan is A eveneens af te leiden.

Andersom wordt in de modale logica eveneens geredeneerd, als een agent iets weet, dan weet die agent ook dat hij het weet. In formule vorm geldt dat als $\vdash \Box A$ dan geldt eveneens $\vdash \Box\Box A$. Dit wordt *Positieve Introspectie* genoemd, rechtvaardigings logica kent hier een eigen vorm van: $t : A \to !t : t : A$, als $t : A$ af te leiden is, dan is $!t : t : A$ eveneens af te leiden. Met deze regel is de *Logic of Proofs* compleet. Voor **LP** zijn de volgende axioma's gedefiniëerd:

$$\begin{aligned} \textbf{Applicatie: } & s : (A \to B) \land t : A \to (s \cdot t) : B. \\ \textbf{Som: } & s : A \to (s + t) : A \text{ en } t : A \to (s + t) : A. \\ \textbf{Feitelijkheid: } & t : A \to A. \\ \textbf{Positieve Introspectie: } & t : A \to !t : t : A. \end{aligned}$$

Ondanks dat er meerdere logica's zijn die gebaseerd zijn op rechtvaardigings logica **J**, wordt vanaf nu met **LP** gewerkt. Hierover is veel geschreven en dus veel te vinden.

2.2 Modellen in rechtvaardigings logica

Een model in **LP** ziet er als volgt uit: $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{E}, \mathcal{V} \rangle$. $\mathcal{W}$ is een niet lege verzameling werelden/staten. $\mathcal{R}$ is een binaire relatie, reflexief en transitief. $\mathcal{E}$ is de grondfunctie op $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ en $\mathcal{V}$ is de valuatie voor atomaire formules, hiermee wordt bepaald wat wel en wat niet waar is in het model. In het model gelden de volgende eigenschappen met betrekking tot de waarheid van formules:

1. $\mathcal{M}, w \Vdash p$, waarbij p een propositionele variabele is. Er geldt: $w \in \mathcal{V}(p)$.
2. $\mathcal{M}, w \Vdash \bot$ is nooit waar, dus $\mathcal{M}, w \nVdash \bot$.
3. $\mathcal{M}, w \Vdash \neg A$ geldt dan en slechts dan als $\mathcal{M}, w \nVdash A$.
4. $\mathcal{M}, w \Vdash A \wedge B$ dan en slechts dan als $\mathcal{M}, w \Vdash A$ en $\mathcal{M}, w \Vdash B$.
5. $\mathcal{M}, w \Vdash A \vee B$ dan en slechts dan als $\mathcal{M}, w \Vdash A$ of $\mathcal{M}, w \Vdash B$.
6. $\mathcal{M}, w \Vdash (A \to B)$ dan en slechts dan als $\mathcal{M}, w \nVdash A$ of $\mathcal{M}, w \Vdash B$.
7. $\mathcal{M}, w \Vdash t : A$ dan en slechts dan als $A \in \mathcal{E}(t, w)$ en voor alle $v \in \mathcal{W}$, met $w\mathcal{R}v$ geldt dat $\mathcal{M}, v \Vdash A$.

Deze eigenschappen komen grotendeels overeen met de eigenschappen van de modale logica. Alleen de laatste eigenschap verschilt. In de modale logica geldt dat voor een model $\mathcal{M}$, met een wereld w een formule $\Box A$ waar is dan en slechts dan als voor alle werelden v, zodanig dat $w\mathcal{R}v$, af te leiden is: A. Omdat in de rechtvaardigings logica van verschillende gronden gebruik gemaakt kan worden, men zit niet vast aan die ene $\Box$, wordt de extra eis toegevoegd dat $A \in \mathcal{E}(t, w)$. Met deze eis wordt aangegeven dat in wereld w t een grond is voor de formule A, op basis van de gedefiniëerde grondfunctie.

Een formule A is waar in een wereld $w \in \mathcal{W}$ als $\mathcal{M}, w \Vdash A$, in alle andere gevallen is A niet waar in w. Voor alle gronden s en t, voor alle formules A en B en voor alls werelden $w, v \in \mathcal{W}$ gelden de volgende eigenschappen met betrekking tot $\mathcal{E}$:

- **Applicatie:** $A \to B \in \mathcal{E}(s, w)$ en $A \in \mathcal{E}(t, w)$ impliceert $B \in \mathcal{E}(s \cdot t, w)$.
- **Monotoniciteit:** $w\mathcal{R}v$ impliceert $\mathcal{E}(t, w) \subseteq \mathcal{E}(t, v)$.
- **Proof Checker[1]:** $A \in \mathcal{E}(t, w)$ impliceert $t : A \in \mathcal{E}(!t, w)$.
- **Som:** $\mathcal{E}(s, w) \cup \mathcal{E}(t, w) \subseteq \mathcal{E}(s + t, w)$.

2.3 Constanten Specificatie

Nu gedefiniëerd is wat de axioma's en regels van de logica zijn en hoe de modellen eruit zien, blijft er nog één gat over dat gevuld moet worden: hoe worden de gronden toegekend aan de axioma's? Dit wordt gedaan met een Constanten Specificatie $\mathcal{CS}$. Bekend is bijvoorbeeld dat $\Vdash A \to A$ zou moeten gelden, de propositie logica is immers een onderdeel van de rechtvaardigings logica. Maar als zo'n tautelogie waar is, dan zou daar eveneens een grond voor moeten bestaan. Met de tot nu toe beschreven rechtvaardigings logica is geen grond toe te kennen aan deze tautelogie, hier is een constanten specificatie voor nodig. Een constanten specificatie is een verzameling formules die er als volgt uit ziet voor een axioma A:

$$e_n : e_{n-1} : \ldots : e_1 : A.$$

[1]Er is voor gekozen om de naam van deze eigenschap niet te vertalen omdat daarmee de duidelijkheid van de term achteruit zou gaan. Daarnaast wordt binnen het Nederlands *Checken* regelmatig gebruikt.

Er geldt dat $n \geq 1$ en dat $e_1, e_2, \ldots, e_n$ constantes zijn. Daarnaast geldt dat als $e_n : e_{n-1} : \ldots : e_1 : A$ opgenomen is in de constanten specificatie, dan is eveneens $e_{n-1} : \ldots : e_1 : A$ opgenomen in de constanten specificatie.

Een grond die aan bijvoorbeeld een tautelogie of formule toegekend is, wordt niet meer aangegeven met s of t zoals de variabelen aangegeven werden in de definitie van de axioma's en de modellen. Voor de gronden die vastgesteld zijn worden bijvoorbeeld c en e gebruikt. Eventueel met een index, als het bijvoorbeeld veel gronden zijn die bij elkaar horen, zoals in de definitie van de constanten specificatie.

Naast het gebruik van letters als constanten zou eveneens de natuurlijke getallen gebruikt kunnen worden. Wat de constante gronden zijn hangt af van de gedefiniëerde $\mathcal{CS}$. Als een constanten specificatie gedefiniëerd is, kan deze toegevoegd worden aan de rechtvaardigings logica **LP**, deze wordt vervolgens als volgt omschreven: $\mathbf{LP}(\mathcal{CS})$.

Doordat er veel verschillende constanten specificaties te definiëren zijn, zijn er net zoveel verschillende rechtvaardigings logica's te definiëren. Hoe een formule uit $\mathbf{LP}(\mathcal{CS})$ eruit ziet is altijd afhankelijk van de constanten specificatie. Als een bewijs voor iedere vorm van **LP** geldt, dus voor iedere $\mathcal{CS}$, dan wordt niet aangegeven welke constanten specificatie van toepassing is, alleen als een specifieke $\mathcal{CS}$ gebruikt wordt, zal de logica weergegeven worden met $\mathbf{LP}(\mathcal{CS})$.

Naast de hierboven beschreven constanten specificatie wordt in sommige bewijzen gebruik gemaakt van een axiomatisch passende constanten specificatie. Hierin is voor ieder axioma van de logica die gebruikt wordt een grond gedefiniëerd. Als A een axioma is, dan is er een constante e_1, zodat $e_1 : A$ [2].

In zo'n axiomatisch passende constanten specificatie hebben alle axioma's, zowel uit de propositie logica, als de axioma's die gedefiniëerd zijn voor de rechtvaardigings logica een constante als grond.

Met deze definitie van de constanten specificatie is het mogelijk om te redeneren met de rechtvaardigings logica.

2.4 Voorbeelden in de rechtvaardigings logica

Met de gedefiniëerde axioma's, regels en modellen kunnen formules binnen de rechtvaardigings logica afgeleid worden. Bijvoorbeeld $t : \neg\neg p \to (c \cdot t) : p$ en $t : \neg\neg p \to ((c \cdot t) + s)p$:

- Bekijk eerst $t : \neg\neg p \to (c \cdot t) : p$. Binnen de rechtvaardigings logica gelden de tautelogieën van de propositie logica, één daarvan is $\neg\neg p \to p$. Omdat dit een tautelogie is, kan een constante grond c gekozen worden en aan de constanten specificatie $\mathcal{CS}$ toegevoegd worden, zodanig dat $c : (\neg\neg p \to p)$. Omdat een tautelogie altijd waar is, kan $t : \neg\neg p$ uitgebreid worden tot:

$$c : (\neg\neg p \to p) \wedge t : \neg\neg p.$$

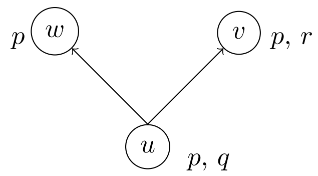
  Nu geldt met de eigenschap **Applicatie** dat $(c \cdot t)$ een grond is voor p. Het is echter niet nodig die tautelogie erbij te schrijven, waardoor geldt:

$$t : \neg\neg p \to (c \cdot t) : p.$$

- Op basis van bovenstaand voorbeeld kan eveneens naar $t : \neg\neg p \to ((c \cdot t) + s) : p$ gekeken worden. Bekend is dat $t : \neg\neg p \to (c \cdot t) : p$ en dat $t : p \to (t + s) : p$, op basis van de eigenschap **Som**. Nu geldt echter dat $(c \cdot t) : p$, dat maakt niet uit, er kan nog altijd gebruik gemaakt worden van **Som**. Daarmee geldt dat $(c \cdot t) : p \to ((c \cdot t) + s) : p$. Samenvattend volgt daaruit dat:

$$t : \neg\neg p \to ((c \cdot t) + s) : p.$$

Een eenvoudig model in de rechtvaardigings logica ziet er als volgt uit:



Merk op dat, omdat $\mathcal{R}$ reflexief is, er eveneens een mogelijkheid is om in één stap weer in de eigen wereld te zijn. In het model is te zien welke propositionele formules waar zijn in een wereld. Voor de grondfunctie $\mathcal{E}$ geldt, voor de propositionele formules en een grond t het volgende:

- $\mathcal{E}(t, u)$ bevat de propositionele formule p.
- $\mathcal{E}(t, v)$ bevat de propositionele formules p en r, omdat er vanuit v alleen pad naar v terug is.
- $\mathcal{E}(t, w)$ bevat de propositionele formule p, vanuit w is er eveneens alleen een pad naar w terug.

Noem dit model $\mathcal{M}$, dan geldt bijvoorbeeld het volgende:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M}, w \Vdash p & \mathcal{M}, v \Vdash p \wedge r & \mathcal{M}, u \Vdash p \wedge q \\ \mathcal{M}, w \Vdash t : p & \mathcal{M}, v \Vdash t : p & \mathcal{M}, u \Vdash t : p \\ \mathcal{M}, w \nVdash q \vee r & \mathcal{M}, v \nVdash t : q & \mathcal{M}, u \nVdash t : (p \wedge q) \end{array}$$

3 Correctheid en Volledigheid

Voor iedere logica is volledigheid en correctheid van belang. Als het mogelijk is om te bewijzen dat een logica, in dit geval rechtvaardigings logica, correct is, dan wordt eigenlijk bewezen dat de gegeven axioma's inderdaad kloppen voor het systeem dat men tracht te modelleren. Als volledigheid bewezen kan worden, dan wordt aangetoond dat uit deze axioma's alle waarheden uit de logica bewezen kunnen worden. Rechtvaardigings logica is correct en volledig. De klassieke propositielogica, die in rechtvaardingslogica gebruikt wordt, is eveneens correct en volledig. In het bewijs van de volledigheid en correctheid van de rechtvaardigings logica wordt aangenomen dat de propositie logica correct en volledig is. Het bewijs zoals dat hieronder beschreven wordt, volgt in grote lijnen *The logic of proofs, semantically* van Melvin Fitting [4].

3.1 Correctheid

Een logica is correct als de axioma's en regels van de logica kloppen, valide zijn. Het doel is dus om te bewijzen dat de axioma's afleidbaar zijn uit het systeem dat bij de rechtvaardigings logica **LP** hoort. De axioma's van de rechtvaardigings logica zijn de volgende:

$$\begin{array}{rl} \textbf{Applicatie:} & s : (A \to B) \wedge t : A \to (s \cdot t) : B. \\ \textbf{Som:} & s : A \to (s + t) : A \text{ en } t : A \to (s + t) : A. \\ \textbf{Feitelijkheid:} & t : A \to A. \\ \textbf{Positieve Introspectie:} & t : A \to !t : t : A. \end{array}$$

Onder andere de regel Modus Ponens komt voor, hiervan wordt, net als de overige regels uit de klassieke propositie logica, aangenomen dat deze valide is. Om de validitiet van de axioma's van **LP** te bewijzen wordt gebruik gemaakt van de eigenschappen van een model uit deze logica en de eigenschappen van de grondfunctie $\mathcal{E}$.

Omdat het niet vanzelfsprekend is dat $(s+t) : A$ hetzelfde is als $(t+s) : A$ zal voor de regel **Som** twee varianten bewezen worden. De twee verschillende varianten zijn eveneens in de definitie van het axioma gescheiden opgenomen.

- **Applicatie,** $t : A \to B \wedge s : A \to (t \cdot s) : B$. Te bewijzen dat als $t : A \to B$ het geval is en $s : A$ ook, dan volgt daaruit dat $(t \cdot s) : B$, dus: $B \in \mathcal{E}(t \cdot s, w)$ en voor alle werelden $v \in \mathcal{W}$, zodanig dat $w\mathcal{R}v$, geldt $\mathcal{M}, v \Vdash B$. Neem aan dat $t : A \to B$ en $s : A$ het geval zijn in model $\mathcal{M}$ in wereld $w \in \mathcal{W}$. Dan geldt dat $A \to B \in \mathcal{E}(t, w)$ en $A \in \mathcal{E}(s, w)$. Met **Applicatie** uit de eigenschappen van $\mathcal{E}$ geldt nu dat $B \in \mathcal{E}(t \cdot s, w)$.

  Omdat aangenomen is dat $\mathcal{M}, w \Vdash t : A \to B$ en $\mathcal{M}, w \Vdash s : A$ geldt dat voor alle $v \in \mathcal{W}$, zodanig dat $w\mathcal{R}v$, moet gelden $\mathcal{M}, v \Vdash A \to B$ en $\mathcal{M}, v \Vdash A$. Een onderdeel van rechtvaardigings logica is de klassieke propositie logica, met de bijbehorende regel Modus Ponens. Daarmee geldt, omdat $\mathcal{M}, v \Vdash (A \to B) \wedge A$ dat $\mathcal{M}, v \Vdash B$. Dus geldt, omdat $B \in \mathcal{E}(t \cdot s, w)$ en voor alle $v \in \mathcal{W}$ met $w\mathcal{R}v$ geldt $\mathcal{M}, v \Vdash B$, dat $t : A \to B$ en $s : A$ impliceren: $(t \cdot s) : B$.

- **Som:**
  - $s : A \to (s+t) : A$. Te bewijzen dat als $s : A$ het geval is in een model $\mathcal{M}$ en een wereld $w \in \mathcal{W}$, dan is $s+t : A$ daar ook het geval. Er moet dus gelden: $A \in \mathcal{E}(s+t, w)$. Bekend is de gegeven verzamelingen relatie **Som**. Neem aan dat $\mathcal{M}, w \Vdash s : A$. Dan geldt dat $A \in \mathcal{E}(s, w)$. Omdat $A \in \mathcal{E}(s, w)$ geldt eveneens $A \in \mathcal{E}(s, w) \cup \mathcal{E}(t, w)$. Met **Som** geldt dus dat $A \in \mathcal{E}(s+t, w)$. Als $\mathcal{M}, w \Vdash s : A$ dan geldt eveneens $\mathcal{M}, w \Vdash (s+t) : A$.
  - $t : A \to (s+t) : A$. Te bewijzen dat als $t : A$ het geval is in een model $\mathcal{M}$ en een wereld $w \in \mathcal{W}$, dan is $s+t : A$ daar ook het geval. Er moet dus gelden: $A \in \mathcal{E}(s+t, w)$. Bekend is de gegeven verzamelingen relatie **Som**. Neem aan dat $\mathcal{M}, w \Vdash t : A$. Dan geldt dat $A \in \mathcal{E}(t, w)$. Omdat $A \in \mathcal{E}(t, w)$ geldt eveneens $A \in \mathcal{E}(s, w) \cup \mathcal{E}(t, w)$. Met **Som** geldt dus dat $A \in \mathcal{E}(s+t, w)$. Als $\mathcal{M}, w \Vdash t : A$ dan geldt eveneens $\mathcal{M}, w \Vdash (s+t) : A$.

- **Feitelijkheid,** $t : A \to A$. Bewezen moet in dit geval worden dat als $t : A$ het geval is, dan is A ook het geval in die wereld. Neem aan dat $\mathcal{M}, w \Vdash t : A$, met de definitie van $\Vdash$ geldt nu dat $A \in \mathcal{E}(t, w)$ en dat voor alle $v \in \mathcal{W}$ met $w\mathcal{R}v$ geldt $\mathcal{M}, v \Vdash A$. Omdat $\mathcal{R}$ reflexief is, geldt dat $w\mathcal{R}w$ en dus dat $\mathcal{M}, w \Vdash A$.

- **Positieve Introspectie,** $t : A \to !t : t : A$. Als geldt dat $\mathcal{M}, w \Vdash t : A$ dan moet daaruit volgen dat $\mathcal{M}, w \Vdash !t : t : A$. Stel dat $\mathcal{M}, w \Vdash t : A$ dan geldt per definitie dat $A \in \mathcal{E}(t, w)$ en voor alle v zodanig dat $w\mathcal{R}v$ geldt $\mathcal{M}, v \Vdash A$. Allereerst moet bewezen worden dat $t : A \in \mathcal{E}(!t, w)$.

  Omdat geldt dat $A \in \mathcal{E}(t, w)$, vanuit de aanname, geldt met **Proof Checker** dat $t : A \in \mathcal{E}(!t, w)$. Daarmee is het eerste onderdeel bewezen. Voor het tweede onderdeel moet gelden dat voor alle $v \in \mathcal{W}$, zodanig dat $w\mathcal{R}v$, geldt $\mathcal{M}, v \Vdash t : A$. Nu geldt dat $\mathcal{M}, v \Vdash t : A$ dan en slechts dan als $A \in \mathcal{E}(t, v)$ en voor alle u, zodanig dat $v\mathcal{R}u$, geldt $\mathcal{M}, u \Vdash A$.

  Bewijs eerst dat, met de aanname dat $A \in \mathcal{E}(t, w)$, voor alle $v \in \mathcal{W}$, waarvoor geldt $w\mathcal{R}v$, $A \in \mathcal{E}(t, v)$. Nu geldt met **Monotoniciteit** dat $\mathcal{E}(t, w) \subseteq \mathcal{E}(t, v)$, omdat $A \in \mathcal{E}(t, w)$ moet daarmee gelden dat eveneens $A \in \mathcal{E}(t, v)$.

  Als laatste stap wordt bewezen dat voor alle $u \in \mathcal{W}$, met $v\mathcal{R}u$, $\mathcal{M}, u \Vdash A$. Omdat $\mathcal{R}$ transitief is en $w\mathcal{R}v$ en $v\mathcal{R}u$ geldt dat eveneens $w\mathcal{R}u$. Omdat $\mathcal{M}, w \Vdash t : A$ en $A \in \mathcal{E}(t, w)$ moet vervolgens met de definitie van $\Vdash$ gelden dat voor alle u, met $w\mathcal{R}u$ geldt dat $\mathcal{M}, u \Vdash A$.

  Met deze laatste twee stappen geldt dat voor alle v, met $w\mathcal{R}v$: $\mathcal{M}, v \Vdash t : A$. Dit maakt het bewijs compleet dat als $\mathcal{M}, w \Vdash t : A$ dan eveneens $\mathcal{M}, w \Vdash !t : t : A$.

Voor ieder axioma uit de rechtvaardigings logica is hiermee aangetoond dat deze allemaal valide zijn in de gegeven modellen die bij deze logica horen. Waaruit volgt dat de rechtvaardigings logica correct is.

3.2 Volledigheid

Het bewijzen van volledigheid voor een logica is over het algemeen ingewikkelder. Het doel van dit bewijs is aan te tonen dat alle waarheden van de rechtvaardigings logica **LP** te bewijzen zijn, dit wordt gedaan aan de hand van de axioma's zoals deze in het correctheidsbewijs bewezen zijn. Het bewijs wordt gegeven met behulp van een kanoniek model. Dit wordt eerst opgebouwd.

Consistente verzamelingen

Een verzameling $\mathcal{S}$ is inconsistent als $X_1 \wedge \ldots \wedge X_n \rightarrow \perp$ geldt voor $X_1, \ldots, X_n$ uit de verzameling $\mathcal{S}$. Een verzamling $\mathcal{S}$ wordt consistent genoemd als $\perp$ niet op die manier af te leiden is. Met andere woorden, een verzameling formules is consistent op het moment dat met de formules die erin voorkomen $\perp$ niet af te leiden is.

In het volledigheids bewijs zal gebruik gemaakt worden van maximaal consistente verzamelingen. Deze kunnen geconstrueerd worden uit consistente verzamelingen. Stel $\mathcal{S}_0$ is een consistente verzameling. Het doel is een maximaal consistente verzameling $\mathcal{S}$ te construeren. Laat $A_0, A_1, A_2, \ldots$ alle formules omschrijven, vervolgens moet voor alle formules (voor alle i waarvoor een A_i bestaat) bekeken worden of die formule toegevoegd kan worden aan de verzameling, zodat deze consistent blijft. Dit wordt als volgt gedaan:

$$\mathcal{S}_{i+1} = \begin{cases} \mathcal{S}_i & \text{als } \mathcal{S}_i \cup \{A_i\} \rightarrow \perp \text{ geldt.} \\ \mathcal{S}_i \cup \{A_i\} & \text{als } \mathcal{S}_i \cup \{A_i\} \rightarrow \perp \text{ niet geldt.} \end{cases}$$

Als alle formules A_i bekeken zijn, wordt de vereniging van alle gevonden $\mathcal{S}_i$ genomen, dit wordt de maximaal consistente verzameling $\mathcal{S}$. Mocht er toch gekeken worden of een formule A_j toegevoegd kan worden aan $\mathcal{S}$, dan zal dit niet mogelijk zijn. A_j moet langs gekomen zijn in het proces, als $A_j \notin \mathcal{S}$, dan is bepaald dat $\mathcal{S} \cup \{A_j\} \rightarrow \perp$, dit mag in een consistente verzameling niet het geval zijn. Er kunnen dus geen formules meer toegevoegd worden en $\mathcal{S}$ kan gebruikt worden als maximaal consistente verzameling in het kanonieke model dat geconstrueerd wordt voor het volledigheids bewijs.

Merk op dat voor een maximaal consistente verzameling $\mathcal{S}$ en een formule A geldt dat $A \in \mathcal{S}$ of dat $\neg A \in \mathcal{S}$. Met andere woorden, voor iedere formule A geldt dat A zelf of de negatie van A opgenomen is in de maximaal consistente verzameling $\mathcal{S}$.

Het kanonieke model

Laat $\mathcal{W}$ de verzameling zijn van alle maximaal consistente verzamelingen van **LP**-formules. Als $w \in \mathcal{W}$, dan geldt $w^* = \{A | (t : A) \in w \text{ voor een grond } t\}$. Definiëer vervolgens de relatie $\mathcal{R}$ als volgt: $w^* \subseteq v$ dan en slechts dan als $w\mathcal{R}v$. Hiermee ontstaat een frame $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ met de volgende twee eigenschappen:

- **Reflexiviteit:** Een reflexieve relatie houdt in dat voor alle $w \in \mathcal{W}$ geldt dat $w\mathcal{R}w$. Daarmee moet in dit frame gelden dat $w^* \subseteq w$. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de eigenschap $\vdash t : A \rightarrow A$ (Feitelijkheid). **Feitelijkheid** geeft aan dat als $t : A \in w$, dan geldt eveneens $A \in w$. Nu geldt voor iedere formule $A \in w^*$ dat dan $t : A \in w$, per definitie. Maar als $t : A \in w$, dan geldt eveneens dat $A \in w$, omdat w maximaal consistent is, daarmee geldt dat iedere formule die in w^* zit, ook in w zit. Dus geldt $w^* \subseteq w$ en dus $w\mathcal{R}w$. Hieruit volgt dat $\mathcal{R}$ reflexief is.

- **Transitiviteit:** Een transitieve relatie houdt in dat voor alle $u, v, w \in \mathcal{W}$ geldt dat als $w\mathcal{R}v$ en $v\mathcal{R}u$ dan ook $u\mathcal{R}v$. Neem aan dat $u, v, w \in \mathcal{W}$ en dat $w\mathcal{R}v$ en $v\mathcal{R}u$. Hieruit volgt direct dat $w^* \subseteq v$ en $v^* \subseteq u$. Bewezen moet worden dat $w\mathcal{R}u$, dus dat $w^* \subseteq u$. In dit bewijs wordt gebruik gemaakt van de eigenschap $\vdash t : A \rightarrow !t : t : A$ (Positieve Introspectie).

  Voor alle formules $A \in w^*$ geldt dat $t : A \in w$, maar met deze eigenschap geldt dat $!t : t : A \in w$ waaruit vervolgens volgt dat $t : A \in w^*$. Omdat $w^* \subseteq v$ geldt dus voor alle formules $A \in w^*$, dat $A \in v$ en dat $t : A \in v$, omdat v, net als w, maximaal consistent is. Als $t : A \in v$, dan geldt dat $A \in v^*$. Omdat $v^* \subseteq u$, geldt hiermee dat $A \in u$ en dus dat $w^* \subseteq u$. Hiermee is aangetoond dat alle formules die in w^* voorkomen, eveneens in u voorkomen. Hieruit volgt dat $\mathcal{R}$ transitief is.

Vervolgens wordt de $\mathcal{E}$ functie gedefinieerd als: $\mathcal{E}(t, w) = \{A | t : A \in w\}$, definieer eveneens voor atomaire formules $\mathcal{V}$ als volgt: $w \in \mathcal{V}(p)$ dan en slechts dan als $p \in w$. Het model dat nu ontstaat kan als volgt weergegeven worden: $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{E}, \mathcal{V} \rangle$. Om het model compleet te maken moet nagegaan worden dat $\mathcal{E}$ voldoet aan de eisen van de grondfunctie. Dat wordt hieronder gedaan:

- **Applicatie:** Voor deze eigenschap moet bewezen worden dat als $(A \to B) \in \mathcal{E}(s, w)$ en $A \in \mathcal{E}(t, w)$ dan geldt dat $B \in \mathcal{E}(s \cdot t, w)$. Dit moet gelden voor alle formules A en B. Stel dat A en B willekeurige formules zijn, dat $w \in \mathcal{W}$ en dat $A \to B \in \mathcal{E}(s, w)$ en $A \in \mathcal{E}(t, w)$. Per definitie van $\mathcal{E}$ geldt nu dat $t : A \in w$ en $s : A \to B \in w$. Nu geldt dat het axioma van Applicatie per definitie van de rechtvaardigings logica er als volgt uit ziet: $s : A \to B \wedge t : A \to (s \cdot t) : B$. Omdat w een maximaal consistente verzameling is, volgt nu dat $(s \cdot t) : B \in w$. Dit omdat alle formules die waar zijn in het model ook in w zitten, aangezien het axioma waar is en de eerste twee onderdelen al waar zijn, moet $(s \cdot t) : B$ wel waar zijn in w. Hieruit volgt dat $B \in \mathcal{E}(s \cdot t, w)$.

- **Monotoniciteit:** Stel dat $v, w \in \mathcal{W}$ en $w\mathcal{R}v$, dan geldt volgens deze eigenschap dat $\mathcal{E}(t, w) \subseteq \mathcal{E}(t, v)$. Dit wordt bewezen door aan te nemen dat $v, w \in \mathcal{W}$, $w\mathcal{R}v$ en dat er een willekeurige formule A is zodanig dat $A \in \mathcal{E}(t, w)$. Per definitie geldt dat $t : A \in w$. Met de eigenschap $\vdash t : A \to !t : t : A$ uit **LP** geldt vervolgens dat $!t : t : A \in w$. Met de definities van het model geldt hiermee dat $t : A \in w^*$, omdat $w\mathcal{R}v$ geldt dat $w^* \subseteq v$ en dus dat $t : A \in v$. Anders omschreven geldt dus dat $A \in \mathcal{E}(t, v)$. Omdat A willekeurig was en $A \in \mathcal{E}(t, w)$ volgt hieruit $\mathcal{E}(t, w) \subseteq \mathcal{E}(t, v)$.

- **Proof Checker:** Aangenomen wordt dat $A \in \mathcal{E}(t, w)$ impliceert dat $t : A \in \mathcal{E}(!t, w)$. Te bewijzen dat als $A \in \mathcal{E}(t, w)$, dan $t : A \in \mathcal{E}(!t, w)$. Stel dat $A \in \mathcal{E}(t, w)$, met $w \in \mathcal{W}$. Dan geldt per definitie dat $t : A \in w$. Eén van de eigenschappen van **LP** is dat $\vdash t : A \to !t : t : A$, dus geldt dat $!t : t : A \in w$. Met de definitie van $\mathcal{E}$ geldt vervolgens dat $t : A \in \mathcal{E}(!t, w)$. Voor iedere willekeurige formule A geldt dus dat als $A \in \mathcal{E}(t, w)$ dan eveneens $t : A \in \mathcal{E}(!t, w)$.

- **Som:** Om te bewijzen dat deze eigenschap geldt moet bewezen worden dat als $A \in \mathcal{E}(t, w)$ dan $A \in \mathcal{E}(s+t, w)$. Stel $w \in \mathcal{W}$ en A een willekeurige formule uit de rechtvaardigings logica en neem aan dat $A \in \mathcal{E}(t, w)$. Dan geldt per definitie dat $t : A \in w$. Eén van de axioma's van **LP** is dat $\vdash t : A \to (s + t) : A$. Omdat $t : A \in w$, geldt nu eveneens dat $(s + t) : A \in w$. Per definitie volgt hieruit dat $A \in \mathcal{E}(s + t, w)$. Omdat A willekeurig was geldt nu voor alle formules A dat als $A \in \mathcal{E}(t, w)$ dan $A \in \mathcal{E}(s + t, w)$.

Hiermee is aangetoond dat het gedefiniëerde model $\mathcal{M}$ voldoet aan alle eigenschappen van een **LP**-model. Het model $\mathcal{M}$ kan nu gebruikt worden in het volledigheids bewijs voor de rechtvaardigings logica **LP**.

Volledigheids bewijs

Met behulp van het hierboven gedefiniëerde model $\mathcal{M}$ kan volledigheid bewezen worden. Volledigheid wordt bewezen door het *waarheids lemma* te bewijzen, voor alle formules A en voor alle $w \in \mathcal{W}$:

$$A \in w \Leftrightarrow \mathcal{M}, w \Vdash A.$$

Het bewijs hiervan gebeurt met behulp inductie. Als basisgeval wordt gekozen voor het geval dat A een atomaire formule is: p. Vanuit daar kan gekeken worden naar formules van andere vormen, zoals $A \wedge B$ en $\neg A$. Deze formules zullen in algemene vorm (dus met A en B een formule van willekeurige vorm) bewezen worden. Vanuit de connectieven en het bewijs van de inductie hypothese (het basisgeval) zijn immers alle mogelijke formules op te bouwen.

- **Basisgeval:** Er moet bewezen worden dat $p \in w$ dan en slechts dan als $\mathcal{M}, w \Vdash p$. Met de definitie van $\mathcal{V}$ is bekend dat $p \in w$ dan en slechts dan als $w \in \mathcal{V}(p)$. Nu geldt per definitie dat $\mathcal{M}, w \Vdash p$ hetzelfde betekent als $w \in \mathcal{V}(p)$. Omdat per definitie van $\mathcal{V}$ geldt dat $p \in w \Leftrightarrow w \in \mathcal{V}(p)$ is hiermee de inductie hypothese bewezen.

  Hiermee geldt nu eveneens dat $p \notin w \Leftrightarrow \mathcal{M}, w \nVdash A$.

- **Formules van de vorm** $t : A$**:** Stel dat $t : A \in w$, dan geldt per definitie dat $A \in w^*$. Laat v een willekeurige verzameling uit $\mathcal{W}$ zijn, waarvoor geldt dat $w^* \subseteq v$, dan geldt eveneens $A \in v$. Met behulp van de inductie hypotese geldt vervolgens $\mathcal{M}, v \Vdash A$. Omdat $t : A \in w$ geldt dat $A \in \mathcal{E}(t, w)$, hieruit volgt dat $\mathcal{M}, w \Vdash t : A$. Dus als $t : A \in w$, dan $\mathcal{M}, w \Vdash t : A$, hiermee is het waarheids lemma van links naar rechts bewezen.

  Stel nu dat $\mathcal{M}, w \Vdash t : A$, dit kan eveneens genoteerd worden als $A \in \mathcal{E}(t, w)$, daarmee geldt dat $t : A \in w$. Dit is het bewijs van rechts naar links.

- **Formules van de vorm** $\neg A$**:** Te bewijzen dat als $\neg A \in w$ dan moet gelden dat $\mathcal{M}, w \Vdash \neg A$. Nu geldt dat $\neg A \in w$ dan en slechts dan als $A \notin w$, w is immers maximaal consistent en $A \wedge \neg A \rightarrow \bot$. Omdat $A \notin w$ geldt dat $\mathcal{M}, w \nVdash A$, zoals aangetoond in het basisgeval. Met de definitie van $\Vdash$ geldt dat $\mathcal{M}, w \nVdash A$ dan en slechts dan als $\mathcal{M}, w \Vdash \neg A$. Dus als $\neg A \in w$, dan $\mathcal{M}, w \Vdash \neg A$.

  De andere kant op moet bewezen worden dat als $\mathcal{M}, w \Vdash \neg A$ dan $\neg A \in w$. Nu geldt dat $\mathcal{M}, w \Vdash \neg A$ dan en slechts dan als $\mathcal{M}, w \nVdash A$, per definitie van $\Vdash$. Met de inductie hypothese is aangetoond dat $\mathcal{M}, w \nVdash A$ dan en slechts dan als $A \notin w$. Omdat w maximaal consistent is moet gelden dat $A \in w$ of $\neg A \in w$, omdat $A \notin w$ geldt dus dat $\neg A \in w$. Daarmee is aangetoond dat als $\mathcal{M}, w \Vdash \neg A$ dan $\neg A \in w$.

  Het waarheidslemma geldt dus eveneens voor formules van de vorm $\neg A$.

- **Formules van de vorm** $A \rightarrow B$**:** Stel dat $A \rightarrow B \in w$, er moet bewezen worden dat hieruit volgt: $\mathcal{M}, w \Vdash A \rightarrow B$. In het algemeen geldt voor een implicatie: $A \rightarrow B$ dan en slechts dan als A niet waar is, of B wel waar is. Omdat w maximaal consistent is en $A \rightarrow B \in w$ geldt dat $A \notin w$ of $B \in w$. Voor $A \notin w$ geldt met de inductie hypothese dat $\mathcal{M}, w \nVdash A$, voor $B \in w$ geldt met de inductie hypothese $\mathcal{M}, w \Vdash B$. Omdat dus geldt dat $\mathcal{M}, w \nVdash A$ of $\mathcal{M}, w \Vdash B$, geldt per definitie van $\Vdash$ dat $\mathcal{M}, w \Vdash A \rightarrow B$.

  Neem nu aan dat $\mathcal{M}, w \Vdash A \rightarrow B$, te bewijzen dat hieruit volgt: $A \rightarrow B \in w$. Er geldt met de definitie van $\Vdash$ dat: $\mathcal{M}, w \Vdash A \rightarrow B$ dan en slechts dan als $\mathcal{M}, w \nVdash A$ of $\mathcal{M}, w \Vdash B$. In het bewijs van het basisgeval is aangetoond dat uit $\mathcal{M}, w \nVdash A$ volgt dat $A \notin w$ en dat uit $\mathcal{M}, w \Vdash B$ volgt dat $B \in w$. Omdat één van de twee minimaal moet gelden volgens de definitie van de implicatie en $\Vdash$ geldt dus dat $A \notin w$ of $B \in w$. w is een maximaal consistente verzameling, waaruit volgt dat $A \rightarrow B \in w$.

  Hiermee is aangetoond dat formules van de vorm $A \rightarrow B$ eveneens voor kunnen komen als formules in het waarheids lemma, er geldt dat $A \rightarrow B \in w \Leftrightarrow \mathcal{M}, w \Vdash A \rightarrow B$.

- **Formules van de vorm** $A \wedge B$**:** Te bewijzen dat als $A \wedge B \in w$ dan geldt $\mathcal{M}, w \Vdash A \wedge B$. Neem aan dat $A \wedge B \in w$, omdat w maximaal consistent is geldt dat $A \in w$ en dat $B \in w$. Met de inductie hypothese geldt dus dat $\mathcal{M}, w \Vdash A$ en $\mathcal{M}, w \Vdash B$. Met de definitie van $\Vdash$ volgt daar direct uit dat $\mathcal{M}, w \Vdash A \wedge B$.

  De andere kant op moet bewezen worden dat als $\mathcal{M}, w \Vdash A \wedge B$ dan geldt eveneens $A \wedge B \in w$. Neem nu aan dat $\mathcal{M}, w \Vdash A \wedge B$, met de definitie van $\Vdash$ volgt daar direct uit dat $\mathcal{M}, w \Vdash A$ en $\mathcal{M}, w \Vdash B$. Met de inductie hypothese geldt vervolgens dat $A \in w$ en $B \in w$. Omdat w een maximaal consistente verzameling is volgt hieruit dat eveneens $A \wedge B \in w$.

  Er geldt dat $A \wedge B \in w \Leftrightarrow \mathcal{M}, w \Vdash A \wedge B$.

- **Formules van de vorm $A \vee B$:** Allereerst moet bewezen worden dat als $A \vee B \in w$ dan $\mathcal{M}, w \Vdash A \vee B$. Stel dat $A \vee B \in w$, dan geldt, omdat w maximaal consistent is, dat $A \in w$ of $B \in w$. Met de inductie hypothese geldt dus dat $\mathcal{M}, w \Vdash A$ of $\mathcal{M}, w \Vdash B$. De definitie van $\Vdash$ geeft vervolgens direct het gewenste resultaat, namelijk dat hieruit volgt dat $\mathcal{M}, w \Vdash A \vee B$.

  Vervolgens moet bewezen worden dat als $\mathcal{M}, w \Vdash A \vee B$ dan $A \vee B \in w$. Stel $\mathcal{M}, w \Vdash A \vee B$, dan geldt per definitie van $\Vdash$ dat $\mathcal{M}, w \Vdash A$ of $\mathcal{M}, w \Vdash B$. de inductie hypothese geeft vervolgens aan dat hieruit volgt dat $A \in w$ of $B \in w$. Omdat w maximaal consistent is volgt hieruit dat $A \vee B \in w$.

  Voor formules van de vorm $A \vee B$ geldt eveneens het waarheids lemma: $A \vee B \in w \Leftrightarrow \mathcal{M}, w \Vdash A \vee B$.

Met het hierboven gegeven bewijzen is het waarheids lemma bewezen, voor het gegeven model. Als A geen **LP** axiomatisch bewijs heeft, dan is $\{X \rightarrow \bot\}$ consistent. Bouw deze uit tot een maximaal consistente verzameling w, zodat $w \in \mathcal{W}$. Dan geldt vervolgens dat $\mathcal{M}, w \nVdash A$. Dit houdt in dat voor een formule A uit een maximaal consistente verzameling een **LP** axiomatisch bewijs te geven is. Er geldt dan er een model $\mathcal{K}$ is, zodanig dat $\mathcal{K} \Vdash A$. Hiermee is volledigheid voor de rechtvaardigings logica aangetoond.

4 Modale logica en rechtvaardigings logica

Tussen modale logica en rechtvaardigings logica bestaat een verband. Bij het omschrijven van de axioma's die bij de rechtvaardigings logica horen is dit al even genoemd. Er is echter een hele procedure ontwikkeld om formules van de modale logica, in het bijzonder **S4**, om te zetten naar formules van de rechtvaardigings logica **LP** en andersom. Dit proces wordt realisatie genoemd. Om de procedure uit te voeren moeten eerst de sequenten regels van beide logica's besproken worden.

4.1 Sequenten regels

Sequenten regels zijn uitdrukkingen van de vorm $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Γ en Δ kunnen enkel formules zijn, eventueel zelfs propositionele variabelen, maar het kunnen eveneens verzamelingen van formules zijn. Deze verzamelingen bevatten een eindig aantal formules. De verzameling Γ geeft de conjunctie van al die formules weer, ze zijn dus allemaal waar, de verzameling Δ geeft de disjunctie van alle formules in de verzameling weer, er is dus minimaal één van de formules waar. Hieruit volgt dat uit alle formules uit de verzameling Γ minimaal één formule uit de verzameling Δ afgeleid kan worden.

Met behulp van de sequenten regels kunnen afleidingen voor formules gemaakt worden, dit zou vergeleken kunnen worden met natuurlijke deductie, maar dan met sequenten. Binnen bijvoorbeeld de propositie logica wordt van verschillende connectieven gebruik gemaakt, ieder van deze connectieven heeft een eigen regel, voor zowel de introductie van zo'n connectief links, als de introductie rechts van $\Rightarrow$.

De logica's die vergeleken worden zijn **LP** en **S4**. Deze logica's maken allebei gebruik van de propositie logica. De sequenten regels voor de propositionele regels (zoals negatie, conjunctie en disjunctie) zijn te vinden in tabel 1. Daarnaast zijn in tabel 2 de sequenten regels te vinden voor de axioma's die bij de modale logica **S4** horen en in tabel 3 de axioma's die bij de rechtvaardigings logica **LP** horen.

Naast de gegeven sequenten regels voor de verschillende logica's zijn er nog twee axioma's waar een logica aan moet voldoen, om ervoor te zorgen dat een afleiding daadwerkelijk gemaakt kan worden. Dat zijn de volgende twee:

$$A, \Gamma \Rightarrow \Delta, A$$
$$\bot \Rightarrow \Delta.$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \neg\Rightarrow \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}\ \Rightarrow\neg$$

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \wedge\Rightarrow \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}\ \Rightarrow\wedge$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \vee\Rightarrow \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}\ \Rightarrow\vee$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \to\Rightarrow \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}\ \Rightarrow\to$$

Tabel 1: Sequenten regels van de propositie logica

$$\frac{A, \Box A, \Gamma, \Rightarrow \Delta}{\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \Box\Rightarrow \qquad \frac{\Box A_1, \ldots, \Box A_n \Rightarrow B}{\Box A_1, \ldots, \Box A_n, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Box B}\ \Rightarrow\Box$$

Tabel 2: Sequenten regels van de modale logica **S4**

Met behulp van sequenten is in een logica een bewijs visueel mooi weer te geven. Door een bewijs op deze manier weer te geven is het verband tussen **S4** en **LP** goed in te zien. Een bewijs met sequenten is een andere manier van een bewijs geven en kan voor meerdere logica's, niet alleen voor modale logica's of rechtvaardigings logica's gebruikt worden, mits die logica's een eigen verzameling van sequenten regels hebben.

4.2 Realisatie procedure

De realisatie procedure kan twee kanten op uitgevoerd worden. Vanuit een afleiding in de rechtvaardigings logica **LP** kan een afleiding gerealiseerd worden voor een formule in de modale logica **S4** en andersom. De formule in **S4** die ontstaat door de realisatie procedure uit te voeren op een formule A uit **LP** wordt aangegeven met A^o. De formule in **LP** die ontstaat door de realisatie procedure uit te voeren op een formule A uit **S4** wordt aangegeven met A^r. Het hieronder beschreven proces volgt in grote lijnen het proces dat Sergei Artemov beschreven heeft in *Explicit Provability and Constructive Semantics* [1].

Afleiding van A^o

Deze formule is eenvoudig af te leiden uit een afleiding voor een formule A van de logica **LP**. Door in die afleiding van A ieder voorkomen van $t : B$, met t een grond en B een formule die onderdeel uitmaakt van de afleiding, te vervangen door $\Box B$ ontstaat een formule die aan de regels en axioma's van de modale logica **S4** voldoet. Het nadeel is echter dat er informatie verloren kan gaan, het kan zo zijn dat er verschillende gronden voor kwamen, die informatie is met een $\Box$ niet weer te geven. Niet voor niets wordt deze procedure wel eens *wis projectie* genoemd.

De formule die aan het einde van de afleiding ontstaat is de formule A^o die opgebouwd wordt in **S4**.

Benodigde definities voor de afleiding van A^r

De afleiding van A^r is echter minder voor de hand liggend, omdat er van verschillende gronden gebruik wordt gemaakt en het niet altijd het geval is dat alle voorkomens van een $\Box$ met slechts één grond te vervangen zijn.

In de procedure wordt onderscheid gemaakt tussen positieve en negatieve voorkomens van een formule. Bekijk de propositionele letter p en een willekeurige formule B. Dan geldt dat p in de volgende formules positief is: $B \to p$, $B \wedge p$, $p \wedge B$, $B \vee p$, $p \vee B$, $\Box p$ en $\Gamma \Rightarrow \Delta, p$. In de volgende

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{t : A, \Gamma \Rightarrow \Delta} :\Rightarrow \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, t : A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, !t : t : A} \Rightarrow!$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, t : A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (t + s) : A} \Rightarrow+ \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, t : A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (s + t) : A} \Rightarrow+$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, s : (A \to B) \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, t : A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (s \cdot t) : B} \Rightarrow\cdot$$

Tabel 3: Sequenten regels van de rechtvaardigings logica **LP**

formules is het voorkomen van p negatief: $\neg p$, $p \to B$ en $p, \Gamma \Rightarrow \Delta$. De polariteit van B heeft geen invloed op de polariteit van p.

De realisatie die afgeleid wordt, wordt aangegeven met r, het doel is een normale realisatie af te leiden. Dat houdt in dat alle negatieve voorkomens van $\Box$ gerealiseerd worden door een variabele grond en dat de constanten specificatie die bij de formule hoort injectief is.

In het algemeen geldt voor de modale logica **S4** dat als de formule A afgeleid kan worden, dan is er een afleiding op basis van de sequenten notatie die A afleidt. Noem deze afleiding $\mathcal{T}$. In $\mathcal{T}$ blijft de polariteit van ieder onderdeel behouden: de voorkomens van $\Box$ die geïntroduceerd zijn met de regel $\Rightarrow \Box$ zijn positief, alle voorkomens die geïntroduceerd zijn met de regel $\Box \Rightarrow$ zijn negatief. Nu geldt dat voorkomens van $\Box$ verwant zijn als zij in verwante formules optreden, met betrekking tot premissen en conclusies van regels. Alle voorkomens van $\Box$ in de afleiding worden opgesplitst in families die verwant aan elkaar zijn. Als zo'n familie minimaal één voorkomen van de regel $\Rightarrow \Box$ heeft, dan wordt die familie *essentieel* genoemd.

Het Lifting Lemma

Naast de hierboven genoemde definities is het *lifting lemma*[2] een belangrijk lemma dat gebruikt zal worden. Dit lemma geeft aan dat als er een afleiding is voor een formule A, in **LP**, dan is er een grond t te vinden, een functie van de gronden die horen bij de formules om A af te leiden, zodat $t : A$. De complete definitie voor het lemma, zoals deze in het artikel van V. Brezhnev en R. Kuznets [3] uit gewerkt is:

> **Lifting Lemma:** Stel dat $x_1 : B_1, \ldots, x_n : B_n \Rightarrow A$, dan bestaat er een grond t, zodat $t = t(x_1, \ldots, x_n)$ waarvoor geldt dat $x_1 : B_1, \ldots, x_n : B_n \Rightarrow t : A$.

Deze grond zal aan de constanten specificatie $\mathcal{CS}$, die in de orginele afleiding van toepassing was, toegevoegd worden. Als deze $\mathcal{CS}$ injectief was, dan zal de uitgebreide $\mathcal{CS}$ dat eveneens zijn [1]. Het bewijs van het lemma zal het artikel van V. Brezhnev en R. Kuznets in grote lijnen volgen.
Bewijs van het lifting lemma: Gekeken wordt naar de afleiding $x_1 : B_1, \ldots, x_n : B_n \Rightarrow A$, er wordt naar een afleiding voor een grond t gezocht zodanig dat: $x_1 : B_1, \ldots, x_n : B_n \Rightarrow t : A$. Er wordt gebruik gemaakt van een constanten specificatie die voor ieder axioma (Applicatie, Som, Feitelijkheid en Positieve Introspectie) minimaal één constante grond bevat.

Het bewijs gaat op basis van inductie. De basisstap is het toekenen van de constante gronden aan de axioma's van de rechtvaardigings logica **LP**. Vervolgens zijn er enkele gevallen te onderscheiden over het voorkomen van de formule A en de daarbij horende grond die opgebouwd wordt:

- Stel dat A één van de axioma's van de rechtvaardigings logica **LP** is, dan kan er een grond c gekozen worden, daarbij mag c nog niet gebruikt zijn als grond, zodat t gelijk is aan c, dit is wat er in de basisstap gedaan wordt.

[2] Hier is er eveneens voor gekozen geen vertaling te geven voor de term, omdat er geen geschikte Nederlandse vertaling is gevonden.

- Als A een axioma is van **LP**, waar al een grond a aan gekoppeld is, dan kan op basis van Positieve Introspectie geconcludeerd worden dat grond t gelijk moet zijn aan $!a$, aangezien $a : A \rightarrow !a : a : A$.

- Het kan zijn dat A gelijk is aan een van de hypotheses $(x_i : B_i)$. In dat geval kan eveneens met Positieve Introspectie bepaald worden dat de grond waar t gelijk aan moet zijn $!x_i$ zal zijn.

- Als laatste mogelijkheid kan A afgeleid zijn uit een Modus Ponens stap, vanuit een formule C. In dat geval is A afgeleid uit $C \rightarrow A$ en C. Omdat $C \rightarrow A$ en C afleidbaar moeten zijn uit $x_1 : B_1, \ldots, x_n : B_n$ zullen er op basis van de inductiehypothese (de basisstap) gronden c_1 en c_2 zijn, zodanig dat $c_1 : C \rightarrow A$ en $c_2 : C$. Met de Applicatie eigenschap van **LP** geldt dus dat $(c_1 \cdot c_2) : A$, met andere woorden: grond t moet gelijk zijn aan $(c_1 \cdot c_2)$.

Op basis van het linker gedeelte van de afleiding $(x_1 : B_1, \ldots, x_n : B_n)$ en de definitie van **LP**, geldt dat er een grond t te construeren is, zodanig dat als $x_1 : B_1, \ldots, x_n : B_n \Rightarrow A$ dan geldt met deze grond t: $x_1 : B_1, \ldots, x_n : B_n \Rightarrow t : A$. Daarmee is het bewijs van het lifting lemma afgerond en kan het lemma in de afleiding van A^r gebruikt worden.

Dit bewijs werkt met een vooraf gedefiniëerde constanten specificatie. Het zou eveneens mogelijk zijn om een algemeen bewijs te geven, waarvan de constanten specificatie axiomatisch passend is. In dat geval geldt per definitie dat alle axioma's uit de rechtvaardigings logica **LP** al een grond toegekend hebben gekregen. S. Artemov bewijst het lemma op die manier in zijn artikel uit 2001 [1].

Afleiding van A^r

Het doel is nu om voor een injectieve constanten specificatie $\mathcal{CS}$ een afleiding in **LP** te construeren die voor iedere sequent $\Gamma \Rightarrow \Delta$ in de afleiding $\mathcal{T}$ afleidt dat uit de conjunctie van alle formules in Γ de disjunctie van alle formules in Δ volgt. Beide verzamelingen formules zijn dan al gerealiseerd. Deze constructie wordt in drie stappen gemaakt.

- **Stap 1:** Allereerst worden alle negatieve families bekeken en alle possitieve families die niet essentieel zijn. Alle voorkomens van $\Box B$ in deze families worden in deze stap vervangen door $t : B$, waarbij voor t steeds een verse variabele als grond gekozen wordt.

- **Stap 2:** In een essentiële familie moet, per definitie minimaal één keer de regel $\Rightarrow \Box$ voorkomen. Iedere keer dat deze regel voorkomt, wordt deze genummerd. Neem aan dat n_f het totaal aantal van dit soort regels is, voor familie f, hierbij geldt dat $n_f \geq 1$.

  Vervang nu alle voorkomens van $\Box$ in de familie f met het polynoom $x_1 + \ldots + x_{n_f}$, waarbij iedere x_i een verse voorlopige grond variabele is. Alle andere x_j, met $j \neq i$ zijn voorlopige variabelen. Het verkregen polynoom kan er dan als volgt uit zien:

  $$x_1 + \ldots + x_{i-1} + s + x_{i+1} + \ldots + x_{n_f}.$$

  Dat er herhaaldelijk gebruik wordt gemaakt van de eigenschap Som, komt omdat niet iedere $\Box$ door dezelfde grond vervangen kan worden. Bekijk bijvoorbeeld de volgende regel die in **S4** valide is:

  $$\frac{\Gamma \Rightarrow \Box A \quad \Gamma \Rightarrow \Box A}{\Gamma \Rightarrow \Box A}.$$

  Het hoeft echter niet het geval te zijn dat de twee voorkomens van $\Box$ in de bovenste regel dezelfde grond zouden hebben in een afleiding in **LP**. Daarom wordt gebruik gemaakt van Som, aan beide voorkomens wordt een andere grond meegegeven. De conclusie krijgt vervolgens de Som van deze twee gronden:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow s : A \quad \Gamma \Rightarrow t : A}{\Gamma \Rightarrow (s+t) : A} \quad .$$

Ieder voorkomen van een $\Box$ in zo'n essentiële formule kan dus met een hele reeks aan gronden, allemaal bij elkaar genomen met de Som-operator, vervangen worden.

Nu zijn alle voorkomens van $\Box$ in de afleiding $\mathcal{T}$ vervangen door een voorlopige grond, hieruit is een nieuwe afleiding ontstaan, noem deze $\mathcal{T}'$.

- **Stap 3:** Om van deze voorlopige variabelen gronden te maken wordt vanaf de onderkant naar boven gewerkt. Aan het begin is de constanten specificatie ($\mathcal{CS}$) die gebruikt wordt nog leeg, alleen bij het verwerken van de regel $\Rightarrow \Box$ wordt deze veranderd, in alle andere gevallen zal daar niets mee gebeuren. De axioma's $S, \Gamma \Rightarrow \Delta, S$ en $\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$ zijn afleidbaar, onafhankelijk van de $\mathcal{CS}$. Zodra een regel (anders dan $\Rightarrow \Box$) voorkomt, wordt deze verwerkt en wordt aangenomen dat deze regel eveneens voor de logica **LP** met constanten specificatie $\mathcal{CS}$ werkt.

  Omdat nu alleen nog gekeken wordt naar essentiële, positieve families, moet minimaal één keer een regel van de vorm $\Rightarrow \Box$ voorkomen. Die voorkomens zijn in stap 2 allemaal genummerd. Om het overzichtelijk te houden wordt hier eerst het geval uitgelegd dat er maar één keer zo'n regel voorkomt. In dat geval geldt dat $n_f = 1$. De regel $\Rightarrow \Box$ ziet er als volgt uit:

  $$\frac{\Box A_1, \ldots, \Box A_n \Rightarrow B}{\Box A_1, \ldots, \Box A_n, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Box B} \Rightarrow \Box .$$

  Na stap 2 zal deze er echter als volgt uit zien:

  $$\frac{y_1 : B_1, \ldots, y_k : B_k \Rightarrow B}{y_1 : B_1, \ldots, y_k : B_k \Rightarrow (x_i) : B} \ .$$

  Hierbij is x_i de verse voorlopige grond variabele die in stap 2 gekozen is, daarnaast zijn $y_1, \ldots, y_k$ grond variabelen. De regel $y_1 : B_1, \ldots, y_k : B_k \Rightarrow B$ is in **LP** af te leiden, voor de constanten specificatie $\mathcal{CS}$. Met behulp van het lifting lemma is er op basis van deze regel een grond af te leiden: $t(y_1, \ldots, y_k)$. Daarbij wordt $\mathcal{CS}$ uitgebreid, zodat ook $y_1 : B_1, \ldots, y_k : B_k \Rightarrow t(y_1, \ldots, y_k) : B$ afgeleid kan worden.

  Hiermee kan nu in de totale afleiding $\mathcal{T}'$ en in $\mathcal{CS}$ iedere x_i vervangen worden door $t(y_1, \ldots, y_n)$, $\mathcal{CS}$ zal hierbij injectief blijven. Met dit proces is nu $\Rightarrow \Box$ eveneens af te leiden in de rechtvaardigings logica **LP**, als er maar één regel voorkomt, geldt nu dat er een realisatie r gevonden is, deze realisatie is normaal.

  Bekijk nu het algemene geval, waarbij er één of meerdere voorkomens van de regel $\Rightarrow \Box$ zijn. In stap 2 zijn al deze voorkomens genummerd. Toen is eveneens het voorkomen van $\Box$ vervangen door het polynoom $x_1, \ldots, x_{n_f}$, waarbij x_i een verse voorlopige grond variabele is, voor i het nummer van de regel waarmee de $\Box$ geïntroduceerd is. De introductie regel van $\Box$ ziet er na stap 2 in het algemene geval als volgt uit:

  $$\frac{y_1 : B_1, \ldots, y_k : B_k \Rightarrow B}{y_1 : B_1, \ldots, y_k : B_k \Rightarrow (x_i + \ldots + x_{n_f}) : B} \ .$$

  Met behulp van het lifting lemma kan nu eveneens een grond geconstrueerd worden: $s(y_1, \ldots, y_n)$. Nu is in de rechtvaardigings logica **LP**, met constanten specificatie $\mathcal{CS}$ af te leiden dat geldt:

  $$y_1 : B_1, \ldots, y_k : B_k \Rightarrow s(y_1, \ldots, y_n) : B.$$

  Nog los van een constanten specificatie geldt echter dat af te leiden is:

  $$s : B \to (x_1 + \ldots + x_{i-1} + s + x_{i+1} + \ldots + x_{n_f}) : B,$$

dit kan gesubstitueerd worden, waarmee geldt dat met de huidige $\mathcal{CS}$ af te leiden is:

$$y_1 : B_1, \ldots, y_k : B_k \Rightarrow (x_1 + \ldots + x_{i-1} + s + x_{i+1} + \ldots + x_{n_f}) : B.$$

Vervang nu iedere x_i in de afleiding $\mathcal{T}'$ met $s(y_1, \ldots, y_n)$, doe dit eveneens in de constanten specificatie $\mathcal{CS}$. Omdat $s(y_1, \ldots, y_n)$ geen voorlopige variabelen bevat, is er nu één variabele minder aanwezig in de afleiding. Als dit proces voor iedere voorlopige grond variabele herhaald wordt, is uiteindelijk de hele regel $\Rightarrow \Box$ afleidbaar in **LP** met constanten specificatie $\mathcal{CS}$. Aan het einde zijn er geen voorlopige grond variabelen meer, deze zijn immers allemaal vervangen in het proces, waardoor $\mathcal{T}'$ een afleiding in **LP** is. De opgebouwde $\mathcal{CS}$ is injectief, waardoor de realisatie r normaal is.

Met bovenstaande stappen is een formule A^r opgebouwd in de rechtvaardigings logica **LP**, afgeleid uit de formule A uit de modale logica **S4**. Daarmee is aangetoond dat een formule A uit de logica **S4** in drie stappen tot een formule A^r uit de logica **LP** te komen is.

Realisatie

Aangetoond is dat er uit een formule A die af te leiden is in de rechtvaardigings logica **LP**, met behulp van een wis projectie een formule A^o af te leiden is, in de modale logica **S4**. Andersom is, met behulp van een normale realisatie in drie stappen van een formule B in de modale logica **S4** een formule B^r in de rechtvaardigings logica **LP** af te leiden.

Er bestaat dus een verband tussen deze twee vormen van logica, dit was al te zien in de opbouw van de axioma's die gelden in de rechtvaardigings logica **LP**. Maar nu is eveneens bewezen dat formules uit de ene logica om te schrijven zijn naar formules uit de andere logica. De realisatie procedure is daarmee compleet.

4.3 Voorbeeld realisatie

In de modale logica **S4** is $\Box A \wedge \Box B \Rightarrow \Box(A \wedge B)$ valide. Dit kan als volgt bewezen worden aan de hand van sequenten:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{axioma}}{A, \Box B \Rightarrow A}}{\Box A, \Box B \Rightarrow A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{axioma}}{B, \Box A \Rightarrow B}}{\Box B, \Box A \Rightarrow B}}{\Box A, \Box B \Rightarrow B}}{\Box A, \Box B \Rightarrow A \wedge B}}{\Box A, \Box B \Rightarrow \Box(A \wedge B)}\Rightarrow\Box}{\Box A \wedge \Box B \Rightarrow \Box(A \wedge B).}$$

In de afleiding komt één keer de regel $\Rightarrow \Box$ voor. In de sequenten calculus wordt $\Rightarrow$ gelezen als $\rightarrow$, dus als een implicatie zoals deze in de propositie logica gebruikt wordt. In een afleiding $\Gamma \Rightarrow \Delta$ is het voorkomen van een formule in Γ daarom negatief. Daarmee zijn alle voorkomens van $\Box$, die niet geïntroduceerd zijn met de regel $\Rightarrow \Box$, negatief.

De realisatie begint bij stap 1. Omdat er meerdere negatieve voorkomens zijn van $\Box$, worden deze eerst vervangen door een variabele grond, hiervoor worden p, q, r en s gebruikt. De afleiding in de rechtvaardigings logica, voordat $\Box$ geïntroduceerd wordt door $\Rightarrow \Box$, ziet als volgt uit:

$$(p + r) : A, (q + s) : B \Rightarrow A \wedge B.$$

Omdat er maar één voorkomen van $\Rightarrow \Box$ is, krijgt deze als voorlopige grond variabele t mee. De grondterm die opgebouwd wordt met behulp van het lifting lemma is een funcite van p, q, r en s: $t(p, q, r, s)$. De afleiding in de rechtvaardigings logica ziet de afleiding er nu als volgt uit:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{axioma}}{A, q : B \Rightarrow A}}{p : A, q : B \Rightarrow A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{axioma}}{B, r : A \Rightarrow B}}{s : B, r : A \Rightarrow B}}{r : A, s : B \Rightarrow B}}{(p+r) : A, (q+s) : B \Rightarrow A \wedge B}}{(p+r) : A, (q+s) : B \Rightarrow t(p,q,r,s)(A \wedge B)}}{(p+r) : A \wedge (q+s) : B \Rightarrow t(p,q,r,s)(A \wedge B)}$$

Voor een afleiding in de rechtvaardigings logica **LP** is hetzelfde te doen. Een axioma uit de rechtvaardigings logica is $s : A \to B, t : A \Rightarrow (s \cdot t) : B$, deze is met behulp van sequenten af te leiden.

$$\dfrac{\dfrac{\text{axioma}}{s : (A \to B), t : A \Rightarrow s : (A \to B)} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{axioma}}{t : A, s : (A \to B) \Rightarrow t : A}}{s : (A \to B), t : A \Rightarrow t : A}}{s : (A \to B), t : A \Rightarrow (s \cdot t) : B}$$

Het bepalen van de afleiding in de modale logica **S4** vanuit deze afleiding is eenvoudiger dan het proces hierboven beschreven. Alle gronden, variabel of constant, worden vervangen door een $\Box$, waardoor een afleiding in **S4** ontstaat. Zowel $(s+t)$ als $(s \cdot t)$ worden vervangen door een enkele $\Box$, omdat er in de modale logica niet op die manier onderscheid gemaakt wordt tussen verschillende soorten voorkomens van $\Box$.

$$\dfrac{\dfrac{\text{axioma}}{\Box(A \to B), \Box A \Rightarrow \Box(A \to B)} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{axioma}}{\Box A, \Box(A \to B) \Rightarrow \Box A}}{\Box(A \to B), \Box A \Rightarrow \Box A}}{\Box(A \to B), \Box A \Rightarrow \Box B}$$

5 Afsluiting

Zoals in de inleiding aangegeven is, is het redeneren op basis van logica een belangrijk aspect van de kunstmatige intelligentie. Rechtvaardigings logica is een logica die gebruikt kan worden om rechtvaardigingen voor waarheden weer te geven. Met de rechtvaardigings logica is het mogelijk problemen op te lossen die niet met de hieraan verwante modale logica op te lossen zijn. Dit is voor de kunstmatige intelligentie een mooie stap vooruit.

Een nadeel van de rechtvaardigings logica is dat er gebruik wordt gemaakt van de constanten specificatie. Zonder constanten specificatie zouden alle agenten skeptisch zijn, dat is niet de bedoeling, de mens is dat immers ook niet. Aan de andere kant is het niet altijd even duidelijk waar de constanten specificatie voor nodig is, omdat voor bijvoorbeeld het correctheids bewijs deze helemaal niet gebruikt wordt.

Een ander nadeel van de rechtvaardigings logica is de grondfunctie. Voor deze functie geldt net als voor de constanten specificatie dat deze niet netjes te formuleren is, maar dat de rechtvaardigings logica ook niet zonder kan. In de grondfunctie worden de werelden en gronden op een kunstmatige manier aan elkaar gekoppeld. Dat is jammer, aangezien men bij het redeneren eigenlijk zou willen dat het ene op een *logische* manier op het andere volgt.

De rechtvaardigings logica heeft voor het redeneren over kennis een goede bijdrage geleverd, het is duidelijk wat de connectie is met de modale logica, toch is de rechtvaardigings logica niet ideaal. Toekomstig onderzoek zou zich kunnen richten op de notatie van de grondfunctie of op het gebruik van de constanten specificatie. Op die manier wordt het misschien mogelijk om een logica te ontwikkelen die zo eenvoudig te gebruiken is als de modale logica, maar met de voordelen van de rechtvaardigings logica.

Referenties

[1] Artemov, S. N., Explicit Provability and Constructive Semantics, *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 7, no.1, pag. 1-36, 2001.

[2] Artemov, S. N., The Logic of Justification, *The Revieuw of Symbolic Logic*, vol. 1, no. 4, pag. 477-513, 2008.

[3] Brezhnev, V. en Kuznets, R., Making Knowledge Explicit: How Hard It Is, *Theoretical Computer Science*, vol. 357, no.1-3, pag. 23-34, 2005.

[4] Fitting, M., The logic of proofs, semantically, *Annals of Pure and Applied Logic*, vol. 132, no. 1, pag. 1-25, 2005.

[5] Troelstra, A. S., Schwichtenberg, H., *Basic Proof Theory*, Camebridge University Press, 1996.