Fysica, vriend of vijand?

Bachelorscriptie Natuur- en Wiskunde
Universiteit Utrecht
Lisette Graafland
Begeleider: Steven Wepster

20 augustus 2013

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Inleiding

Wiskunde en natuurkunde zijn heden ten dage nauw verbonden. Soms lijken ze zelfs onlosmakelijk verbonden. De natuurkunde heeft de wiskunde nodig om zich in te uiten, te laten begrijpen en te laten voorspellen. Als tegenprestatie trekt de wiskunde zich op aan de natuurkunde om de aandacht op zich te vestigen en de waardering voor haar te vergroten. Pure schoonheid is immers vaak niet genoeg om aandacht mee te krijgen. Een theorie wordt pas interessant, wanneer men haar kan toepassen in de praktijk. In het dagelijks leven zijn we immers op zoek naar het nut van de dingen. Een bloem kan mooi bloeien, maar draagt zij ook vrucht? Een wiskundige theorie kan elegant zijn, maar is zij ook nuttig?

De lineaire algebra houdt zich bezig met lineaire vergelijkingen, vectorruimten en matrices. Ze heeft haar wortels in de 19e eeuw[1]. De wortels van deze techniek liggen bij de quaternionen, het onderwerp van mijn scriptie. Onze moderne vectoralgebra[2] lijkt echter totaal onafhankelijk van het concept quaternion te zijn.

De lineaire algebra wordt veel toegepast in de natuurkunde. In veel takken van de natuurkunde komen lineaire vergelijkingen voor en de ruimten waarin de fysica leeft, blijken goed te beschrijven door middel van vectoren. Elke opleiding in de natuurkunde biedt inleidende cursussen aan in de lineaire algebra.

In mijn scriptie beschrijf ik hoe de quaternionen zijn ontdekt, hoe de quaternionen zich hebben ontwikkeld en waarom deze ontwikkeling stagneerde. Ik wil onderzoeken hoe de fysica aan de drie bovengenoemde fasen heeft bijgedragen. Hiertoe beschouw ik de opkomst en de ontwikkeling van de quaternionen in hoofdstuk 2 en 3. Daarnaast beschouw ik in hoofdstuk 4 de opkomst van het Gibbs-Heaviside systeem, de vectoralgebra waaruit ons moderne vectorsysteem zich uiteindelijk heeft ontwikkeld. Als laatste beschouw ik in hoofdstuk 5 de strijd om het bestaan tussen de quaternionen en het Gibbs-Heaviside systeem. In alle hoofdstukken zal ik steeds de rol van de fysica beschouwen.

Deze scriptie kan gelezen worden door wis- en/of natuurkunde studenten met een basiskennis van de lineaire algebra en infinitesemaalrekening. Quaternionen komen in deze inleidende cursussen echter nauwelijks voor, daarom is in hoofdstuk 7 een wiskundige toelichting over de quaternionen toegevoegd. In de wiskundige toelichting worden de grondbeginselen van de quaternionen beschreven. Daarnaast wordt er dieper in gegaan op begrippen die voorkomen in de tekst en extra toelichting vereisen. De wiskundige toelichting kan voorafgaand aan mijn scriptie gelezen worden of tijdens het lezen van mijn scriptie geraadpleegd worden.

In mijn scriptie verwijs ik vaak naar *A History of Vector Analysis*[2], geschreven door Michael J. Crowe. Crowe is mij voor geweest en heeft de gehele geschiedenis van het ontstaan van onze moderne vectoranalyse in kaart gebracht. Anders dan Crowe, richt ik mij meer op de geschiedenis van de quaternionen, slechts een deelonderwerp in het boek van Crowe. Daarnaast spits ik mij binnen het onderwerp quaternionen meer toe op de rol van fysica, waar Crowe een meer algemene beschrijving van de geschiedenis van de quaternionen geeft. Wanneer u na het lezen van mijn scriptie geïnteresseerd bent geraakt in de gehele geschiedenis van ons moderne vectorsysteem, beveel ik u van harte aan het boek van Crowe te lezen. Zelf heb ik dankbaar gebruik gemaakt van zijn boek als naslagwerk voor mijn scriptie.

Rest mij niets meer dan u veel leesplezier te wensen!

---

[1] Het meetkundige idee van een vector was al ouder, de techniek om hiermee te rekenen komt echter uit de 19e eeuw.

[2] Het woord Algebra kent vele betekenissen. 'De Algebra' is een van de stromingen binnen de wiskunde. Een bijvoeglijk naamwoord voor Algebra duidt een deel van deze wiskundige stroming aan, zoals de Lineaire Algebra. Daarnaast woord met 'een algebra' een wiskundige structuur aangeduid, zoals een algebra over een lichaam. In deze studie zullen de woorden vectoralgebra en vectoranalyse door elkaar gebruikt worden. Een vectoralgebra in de driedimensionale ruimte is een set vectoren uit $\mathbb{R}^3$ met de toegevoegde structuur van een optelling en een multiplicatie. Deze definities komen uit de moderne algebra. Voor de wetenschappers die leefden ten tijde van de ontwikkeling van de quaternionen, had het woord vectoralgebra nog een iets andere betekenis. Wanneer zij het woord 'vectoralgebra' aanhaalden, bedoelden zij meer een theorie waarbinnen aritmetische operaties zoals optelling en multiplicatie gedefinieerd zijn tussen vectoren in drie dimensies.

Hoofdstuk 2

Ontdekking en ontwikkeling van de quaternionen: Hamilton

Sir William Rowan Hamilton was een van de meest talentvolle, invloedrijke en belangrijkste wetenschappers uit de 19e eeuw. Dit hoofdstuk is aan Hamilton gewijd, omdat de ontdekking van de quaternionen geheel aan hem toegeschreven kan worden. Hamilton leefde van 1805 tot 1865.
Hamilton was zonder meer een genie binnen de wetenschap. Dit uitte zich bijvoorbeeld in uitzonderlijk hoge cijfers op het 'Trinity College'. Een voorbeeld van Hamiltons jeugdige talent is het vinden van een fout in de *Mécanique Céleste* van Laplace in zijn zeventiende levensjaar. Hamilton was nooit onderwezen in dit werk. Zelfstudie had de jonge Hamilton naar deze fout geleid. Talloze van zulke anekdotes en een aantal wetenschappelijke resultaten uit zijn eigen onderzoek zijn bekend uit de jeugd van Hamilton. We zouden Hamilton echter te kort doen als we alleen maar zijn bijdragen aan de wetenschap beschouwen. Hamilton was bijvoorbeeld extreem taalgevoelig, zo sprak hij in zijn veertiende levensjaar al 13 talen. Ook was hij een liefhebber van poëzie, waarin hij tegenslagen in persoonlijk en maatschappelijk leven verwerkte. Talentvol is dus nog een bescheiden uitdrukking voor een man als Hamilton. Vele biografieën zijn over het leven van de hoogbegaafde Hamilton verschenen, zoals 'The life and Early Work of Sir William Rowan Hamilton.' van J.L.Synge en 'Men of Mathematics' van E.T.Bell.

Dat Hamilton ook invloedrijk was, kunnen we eenvoudig illustreren aan de hand van de titelpagina van Hamiltons *Lectures on Quaternions.* De inhoud en invloed van dit boek zal later nog aan de orde komen. De beschrijving van Hamilton op deze titelpagina is als volgt:

> SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON, LL.D., M.R.I.A., FELLOW OF THE AMERICAN SOCIETY OF ARTS AND SCIENCES; OF THE SOCIETY OF ARTS FOR SCOTLAND; OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY OF LONDON; AND OF THE ROYAL NORTHERN SOCIETY OF ANTIQUARIES AT COPENHAGEN;

> CORRESPONDING MEMBER OF THE INSTITUTE OF FRANCE; HONORARY OR CORRESPONDING MEMBER OF THE IMPERIAL OR ROYAL ACADEMIES OF ST. PETERSBURGH, BERLIN, AND TURIN; OF THE ROYAL SOCIETIES OF EDINBURGH AND DUBLIN; OF THE CAMBRIDGE PHILSOPHICAL SOCIETY; THE NEW YORK HISTORICAL SOCIETY; THE SOCIETY OF NATURAL SCIENCES AT LAUSANNE; AND OF OTHER SCIENTIFIC SOCIETIES IN BRITISH AND FOREIGN COUNTRIES; ANDREWS'PROFESSOR OF ASTRONOMY IN THE UNIVERSITY OF DUBLIN; AND ROYAL ASTRONOMER OF IRELAND.

[8, Titelpagina] Een wetenschapper die lidmaat is van zoveel wetenschappelijke societeiten en drager van de titel 'koninklijke astronoom van Ierland' vanaf 1827 tot aan zijn dood, kan niet anders dan zeer invloedrijk geweest zijn gedurende zijn leven. Die laatste titel bracht ook het directeurschap over het koninklijke observatorium van het 'Trinity College' in Dublin met zich mee. In deze eretitel komt de invloed van Hamilton extra tot uiting. Aangezien wetenschappers en het staatsbestuur Hamilton zoveel eer toekenden, is Hamilton zeer invloedrijk in deze kringen geweest.
De faam die Hamilton heeft opgebouwd tijdens zijn leven, wordt ook beschreven door Crowe in *A History of Vector Analysis*. Crowe brengt de tijdsperiode die Hamilton besteedt aan de quaternionen in verband met belangrijke momenten uit Hamiltons leven:

> "By 1835 Hamiltons fame was established. In that year he was knighted and received a medal from the Royal Society; in addition he finished a paper on algebraic couples, which is the first of Hamiltons publications to be of direct importance for the present study. In 1837 he was elected president of the Royal Irish Academy and held this position until his resignation in 1845, soon after his discovery (1843) of quaternions. The last twenty-two years of his life, from 1843 to 1865, were for the most part devoted to the development of quaternions." [2, p.22]

Zijn invloed, zoals hier boven beschreven, geeft aan dat Hamilton al tijdens zijn leven belangrijk was voor de wetenschap. Hamilton heeft daarnaast ook vele bijdragen geleverd aan de huidige wetenschap. In deze studie richten we ons vooral op de quaternionen. Hoewel quaternionen als algebra niet of nauwelijks meer gebruikt worden en we ze meestal alleen als speciaal geval in een wiskundige stroming tegenkomen (de eerste niet-commutatieve ring bijvoorbeeld), kunnen we de quaternionen wel beschouwen als een van de eerste algebra's. Het idee voor deze algebra vergde een open blik en de capaciteit om uit de vertrouwde denkbeelden te stappen. We mogen Hamilton dus beschouwen als een van de grondleggers van onze moderne vectoralgebra, zo niet de belangrijkste.

In dit hoofdstuk wil ik beschouwen hoe Hamilton tot zijn ontdekking van de quaternionen kwam en welke invloed de fysica hierop heeft gehad. Verder wil ik beschouwen wat zijn visie op de quaternionen was en hoe hij ze heeft gepresenteerd aan het publiek. Mijn invalshoek bij deze vraag zal vanuit de fysica zijn.

Zag Hamilton zijn quaternionen bijvoorbeeld als gereedschap binnen de fysica of als een op zich zelf staande uitvinding die toevallig ook toepassingen had in de fysica? En in hoeverre legde hij nadruk op de fysica bij de bekendmaking van de quaternionen en het aantonen van de waarde van de quaternionen? In dit en het volgende hoofdstuk wil ik bovendien beschouwen hoe zijn presentatie van de quaternionen heeft bijgedragen aan de daadwerkelijke ontwikkeling van de quaternionen door wetenschappers zoals Peter G. Tait en James Clerck Maxxwell.

2.1 Hamiltons ontdekking van de Quaternionen

Het is belangrijk om te kijken of Hamilton in de periode voor en tijdens zijn ontdekking actief was als fysicus in verband met het bepalen van de rol van de fysica in de ontdekking van de quaternionen. In 1827 werd Hamilton 'Andrews' Professor of Astronomy' aan de universiteit van Dublin en 'Royal Astromer of Ireland'. Op zijn zeventiende kreeg Hamilton interesse in de mathematische optica wat leidde tot de publicatie van "Theory of Systems of Rays" in 1828. Hamilton boekte succesen binnen de optica door zijn mathematische methoden. Deze successen leidden Hamilton ertoe om deze methoden ook in de dynamica te gebruiken. Crowe vertelt ons dat het succes van deze werken sterk bijdroeg aan de faam van Hamilton. Opvallend was het gebruik van zoveel wiskunde in deze natuurkundige onderzoeken. Dit was in die tijd niet vanzelfsprekend.

We kunnen de invloed van de fysica op de ontdekking van de quaternionen het beste in kaart brengen door het woord te geven aan de ontdekker zelf. Wat zegt Hamilton zelf over de rol van de fysica bij zijn onderzoek naar quaternionen? Om deze vraag te beantwoorden, zullen we kijken naar de voorwoorden van de twee belangrijkste boeken die door Hamilton gepubliceerd zijn over quaternionen, namelijk *Lectures on Quaternions*[8] en *Elements on Quaternions*[9]. Het voorwoord van het eerste boek heeft Hamilton zelf geschreven. Het was daarnaast het eerste boek wat Hamilton publiceerde over quaternionen en speelt dus een extra grote rol in ons onderzoek. Het voorwoord van het tweede boek is deels door zijn zoon geschreven, die wel getracht heeft de losse punten die Hamilton al geschreven had in het voorwoord te verwerken. Dit laatste boek is namelijk na de dood van Hamilton gepubliceerd en Hamilton heeft niet meer de tijd gehad zijn voorwoord af te maken.

Het eerste boek, *Lectures on Quaternions*, is een zeer omvangrijk boek en bevat meer dan 700 pagina's tekst. Alleen het voorwoord bevat al 60 pagina's tekst. Hamilton begint zijn *Lectures* met een korte samenvatting over de inhoud van zijn boek. Als eerste behandelt hij de, voor ons interessante, vraag hoe hij de quaternionen heeft ontwikkeld tot de algebra die hij in zijn *Lectures* presenteert. Daarna legt hij uit waarom men de quaternionen in gebruik moet nemen.

Hamilton had al een bijdrage geleverd aan de complexe getallen in zijn *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples*[7]. Hamilton presenteert in dit artikel complexe getallen als geordende tweetallen, die bestaan uit reële getallen. De moderne wiskunde presenteert de complexe getallen op bijna dezelfde manier als Hamilton in dit artikel heeft gedaan. Een uitbreiding van dit systeem naar geordende drietallen was een logische volgende stap. Het artikel van Hamilton over algebraïsche koppels werd namelijk goed ontvangen en hierdoor werd Hamilton gestimuleerd zijn systeem uit te breiden naar drietallen[1]. Naast Hamilton hadden al meerdere wetenschappers geprobeerd de complexe getallen tot een algebra in drie dimensies uit te breiden.

Hamilton wijst in zijn voorwoord nog een tweede reden aan die zijn passie om de complexe getallen uit te breiden naar tripletten verklaart. De tweede reden is misschien wel de belangrijkste reden, aangezien Hamilton hier de meeste nadruk op legt in het voorwoord van zijn *Lectures*. Deze reden is echter niet gemakkelijk uiteen te zetten. De reden komt voort uit Hamiltons algemene visie op de algebra. Deze visie had Hamilton al eerder in een artikel beschreven. De titel van dit artikel luidt *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time*[7]. Zowel in dit artikel als in het voorwoord van zijn *Lectures* zet Hamilton zijn visie op de algebra uiteen. Met dit verschil dat Hamilton in zijn *Lectures* deze visie (beknopter en met verwijzingen naar bovenstaand artikel) uiteen zet met als doel de geschiedenis van het proces van de ontdekking van de quaternionen te schetsen.
Het deel van het voorwoord over Hamiltons visie op de algebra is complex en moeilijk samen te vatten. Het is ook niet gemakkelijk om Hamiltons visie op de algebra te koppelen aan de ontdekking van de quaternionen. Het is echter toch een belangrijk onderwerp, aangezien Hamilton stelt dat de ontdekking van de quaternionen deels hierop berust. Ik zal daarom hieronder aan de hand van enkele passages uit de *Lectures* aantonen dat de quaternionen inderdaad deels uit deze complexe visie zijn ontstaan, maar ik zal verder niet ingaan op de inhoud van deze visie.

Hamilton begint de tweede reden voor het vinden van tripletten op de volgende manier:

> "The difficulties which so many have felt in the doctrine of Negative and Imaginary Quantities in Algebra forced themselves long ago on my attention, the whole subject still appeared to me to deserve additional inquiry, and to be susceptible of a more complete elucidation. And while agreeing with those who had contended that negatives and imaginaries were not properly *quantities* at all, I still felt dissatisfied with any view which should not give to them, from the outset, a clear interpretation and *meaning*; and wished that this should be done, for the square roots of negatives, without introducing considerations *so expressly geometrical*, as those which involve the conception of an *angle*"[8, p.1,2]

Uit bovenstaand citaat is het voor deze studie alleen belangrijk om de behoefte van Hamilton op te merken om aan de imaginaire getallen een betekenis

[1]De naam die Hamilton zelf gebruikt voor deze drietallen is 'triplets', in het nederlands 'tripletten'. Ik zal deze naam in de komende tekst overnemen.

te geven. Hamilton ziet de imaginaire getallen als elementen uit de algebra. Om een juiste betekenis van de imaginaire getallen te vinden zoekt Hamilton daarom eerst naar de juiste betekenis van de algebra in het algemeen. De betekenis die Hamilton geeft aan de algebra is een wetenschap 'of Pure Time':

> "In this manner I was led, many years ago, to regard Algebra as the Science of Pure Time: and an Essay, containing my views respecting it as such, was published in 1835. If I now reproduce a few of the opinions put forward in that early Essay, it will be simply because they may assist the reader to place himself in that point of view, as regards the first elements of *algebra*, from which a passage was gradually made by me to that comparatively *geometrical* conception which is the aim of this volume to unfold. And with respect to anything unusual in the *interpretations* thus proposed, for some simple and elementary notations, it is my wish to be understood as not at all insisting on them as *necessary*, but merely proposing them as consistent among themselves, and preparatory to the study of quaternions, in at least one aspect of the latter.[8, p.2,3]

Het is niet zo belangrijk *hoe* Hamilton geleid is naar deze visie op de algebra voor ons onderzoek. Het is belangrijker dat Hamilton aan het eind van dit citaat benadrukt, dat de studie van de betekenis van de algebra *voorbereidt* tot de studie van quaternionen. Hamilton beschrijft hier een deel van de route die hij volgde om bij de quaternionen uit te komen.

Verderop in zijn voorwoord vat Hamilton de weg naar zijn quaternionen nog één keer kort samen:

> "The theory of triplets and sets, thus spoken of at the close of the Essay of 1835, had in fact formed the subject of various unpublished investigations, of which some have been preserved: and a brief notice of them here(especially as relates to triplets) may perhaps be useful, by assisting to throw light on the nature of the passage, which I gradually came to make from *couples* to *quaternions*."[8, p.16]

Het 'Essay' waaraan gerefereerd wordt, draagt de titel *Algebra as the Science of Pure Time*. Dit is het artikel dat ook bijgesloten was in het eerder genoemde artikel over de algebraïsche koppels[7]. In dit artikel zette Hamilton dus, vanuit zijn visie over de algebra, een theorie uiteen waar de tripletten (en verzamelingen) aan moesten voldoen. Hierna volgde een zoektocht naar deze tripletten die ik hieronder nog beschrijf. De zoektocht naar tripletten was niet bevredigend (de tripletsystemen bleven ongepubliceerd), maar Hamilton ontdekte wel via deze zoektocht de quaternionen.

Hamilton vertelt vervolgens verder over de meerdere pogingen van hemzelf en andere wetenschappers om een bevredigende theorie over tripletten te vinden. Een triplet heeft de basis $(1, i, j)$. Hoewel Hamilton een aantal zeer serieuze en complete theorieën opstelde, vond hij geen van deze theorieën bevredigend. Vooral het feit dat Hamilton niet in staat was een distributieve multiplicatie te definiëren, ergerde hem. Hij bleef dus verder zoeken, wat uiteindelijk leidde tot de toevoeging van een derde eenheidsvector k en een multiplicatie die in de wiskundige toelichting beschreven is[2]. Deze ingeving kreeg Hamilton tijdens een wandeling met zijn vrouw langs het 'Royal Canal' in Dublin en Hamilton kerfde de onderlinge relaties tussen de eenheidsvectoren i, j en k in de 'Brougham bridge'. Vandaag de dag is er nog een herdenkingsteken op deze brug dat aan dit moment herinnert.

Na een uitgebreide beschrijving van de eigenschappen van de quaternionen, zoals hij ze op dat moment ontdekte, vertelt Hamilton over de periode na zijn ontdekking:

> "When the conception, above described, had been so far unfolded and fixed in my mind, I felt that the *new instrument* for applying *calculation to geometry*, for which I had so long sought, was now, at least in part, attained. And although I had left several former conjectures respecting *triplets* for many years uncommunicated, except by name, even to friends, yet I at once proceeded to lay these results respecting *quaternions* before the Royal Irish Academy (at a Meeting of Council in October, 1843, and at a General Meeting shortly subsequent): introducing also their connexion with spherical trigonometry, some sketch of which appeared a few months later in London (in the Philosophical Magazine for July, 1844). On that *connexion of quaternions with spherical trigonometry*, and generally with *spherical geometry*, I need not at present dwell, since it is sufficiently explained in the concluding Lectures of this Volume: but it may be not improper that a brief account should here be given, of a not much later but hitherto unpublished speculation, of a character partly geometrical, but partly also metaphysical (or a priori), by which I sought to explain and confirm some resluts that might at first seem strange, among those to which my analysis had conducted me, respecting the *quadrinomial form*, and *non-commutative property*, of the *product* of two directed lines in space."[8, p.47,48]

Deze passage licht ons allereerst toe wat Hamilton met de quaternionen in handen dacht te hebben, nadat hij deze ontdekt had. Hamilton spreekt hier over een nieuw instrument om te kunnen rekenen in de meetkunde. De motivatie om de quaternionen te vinden is, zoals we gelezen hebben, terug te voeren op de visie van Hamilton over de algebra als een wetenschap 'of Pure Time'. Op deze motivatie legt Hamilton dus echter niet meer de nadruk na de ontdekking van de quaternionen. Hij legt de quaternionen in de passage over de periode na de ontdekking voor aan de lezer als een instrument om te kunnen rekenen in de meetkunde. Het is wel opvallend dat Hamilton juist hier het woord instrument gebruikt, in deze alinea vertelt Hamilton namelijk hoe hij de quaternionen aan het publiek bekend heeft gemaakt.

Hamilton vertelt vervolgens dat hij zo zeker van de waarde van zijn quaternionen was, dat hij ze zonder twijfel voorlegde aan de Royal Irish Academy. Hij introduceert echter niet alleen de quaternionen op deze twee ontmoetingen, hij introduceert tegelijkertijd hun connectie met de boldriekhoeksmeting. De boldriehoeksmeting is een onderdeel van de bolmeetkunde dat zich bezighoudt

[2]Zie Wiskunde toelichting, paragraaf 7.1.

met polygonen (driehoeken) op de bol en de relaties tussen de zijden en de hoeken. Boldriehoeksmeting was in Hamiltons tijd tot op de dag van vandaag van groot belang voor berekeningen in astronomie en berekeningen aan het aardoppervlak. Het wordt toegepast in de navigatie op de aarde en in de ruimte. Al eerder is genoemd dat Hamilton ten tijde van zijn ontdekking professor was in de astronomie en 'Royal Astronomer of Ireland'. Doordat Hamilton actief was in de astronomie kon Hamilton na de ontdekking van de quaternionen dus gelijk een toepassing van de quaternionen in dit vakgebied voor ogen hebben. Hamilton introduceert dus niet alleen zijn nieuwe algebra aan de 'Royal Academy', maar geeft *tegelijkertijd* aan waarom de waarde van deze algebra zo groot is: ze kan als *instrument* gebruikt worden binnen de fysica. Aangezien Hamilton zo verdienstelijk is geweest binnen de fysica, is de koppeling die Hamilton gemaakt heeft tussen quaternionen en de boldriehoeksmeting waarschijnlijk bevordelijk geweest voor de acceptatie van de quaternionen. Nog belangrijker is het feit dat de quaternionen vanaf hun eerste presentatie in verband zijn gebracht met de fysica. De mensen denken vanaf dit moment dus bij de quaternionen ook gelijk aan eventuele toepassingen in de fysica.

Hierna benadrukt Hamilton dat een aantal toepassingen van quaternionen in de boldriehoeksmeting in zijn *Lectures* gevonden kunnen worden en gaat dan door naar het laatste belangrijk punt uit de hierboven geciteerde passage. Voordat de lezers aan zijn *Lectures* beginnen wil hij duidelijkheid geven over speculaties die ronddwalen over twee karakters uit zijn algebra die niet alleen meetkundig van aard zijn, maar ook metafyisch. Ten eerste de quadrinomale vorm van zijn quaternionen, in plaats van tripletten en ten tweede het non-commutatieve product. Hamilton wil hier de lezer behouden die de quaternionen wil toepassen in een drie-dimensionale ruimte, de fysicus. Hij bestempelt deze begrippen als metafysisch, dus met een betekenis die fysica overstijgt. Aangezien er verkeerde speculaties rondgaan over de interpretatie van deze begrippen, wil hij de interpretatie zelf meteen grondig verklaren. Door middel van deze verklaring zien de lezers dan dat deze begrippen daadwerkelijk een reële betekenis hebben binnen de drie-dimensionale ruimte. Zo verliest Hamilton niet de aandacht van de fysicus.

Na het geven van de meetkundige betekenis van een quaternion en van het quaternionenproduct[3], en vervolgens van andere begrippen binnen zijn theorie, komt Hamilton aan het einde van het voorwoord van zijn *lectures*. Hij begint zijn afsluiting als volgt:

> "For the unfolding of this general view, and the deduction from it of many geometrical and of some physical consequences [Some such *physical* applications were early suggested by Sir J.Herschel], I must refer to the following *Lectures*[8, p.63]"

Aan het eind van zijn voorwoord wijst Hamilton dus nadrukkelijk nog een keer op de fysische toepassingen. De notitie tussen de haken geeft aan dat hij serieus wordt genomen door fysische collega's. De interesse die zijn fysische collega's voor hem toonden zal Hamilton te danken hebben aan zijn eigen verdiensten in de fysica.

2.2 Conclusie ontdekking Hamilton

Nu we in vogelvlucht het voorwoord van de *Lectures* hebben doorgenomen, kunnen we naar mijn mening een duidelijk beeld schetsen van de inspiratie die Hamilton heeft gehad voor de ontdekking van de quaternionen, zijn visie op de quaternionen en de manier waarop hij de quaternionen gepresenteerd heeft aan het publiek. Ik zal dit proberen kort samen te vatten en me vooral richten op de rol van de fysica in deze vragen.

We hebben gezien dat de quaternionen zijn voortgekomen uit Hamiltons passie voor het vinden van de zogenoemde tripletten. Vele sluitende, maar onbevredigende, tripletsystemen zijn de revue gepasseerd en hebben Hamilton uiteindelijk geleid naar de quaternionen. Voor zijn zoektocht naar tripletten had Hamilton twee redenen. Allereerst het verlangen om de complexe getallen uit te breiden naar drie dimensies. Dit verlangen werd in die tijd ook teruggezien bij andere wetenschappers. Op de tweede reden legt Hamilton echter de meeste nadruk: Hamiltons visie op de algebra stimuleerde hem om tripletten te vinden. Deze visie is moeilijk te beschrijven. De visie is onduidelijk onder woorden gebracht en is voor meerdere onderzoekers in het verleden, en voor mij nu, een struikelblok geweest[4]. De vraag waarom Hamiltons visie van de algebra het verlangen opwekte om tripletten te vinden is gelukkig niet zo belangrijk voor deze studie. Wat opvalt en wat wel belangrijk is voor deze studie, is juist hetgeen waar Hamilton *niet* naar verwijst in zijn beschrijving van de inspiritatie die hij had voor de ontdekking van de quaternionen, namelijk een eventuele toepassing binnen de natuurkunde. Hier spreekt Hamilton pas over na zijn verslag van de ontdekking. Uitgaande van zijn *Lectures* lijkt de natuurkunde dus geen rol te spelen in zijn zoektocht naar en de ontdekking van de quaternionen.

Zijn visie op de quaternionen, *na* de ontdekking hiervan, kan echter wel in verband met de fysica gebracht worden. Zo stelt Hamilton herhaaldelijk dat hij met de quaternionen het instrument heeft gevonden, waarmee men berekeningen in de meetkunde kan uitvoeren[5]. Met dit instrument kunnen volgens Hamilton meetkundige en fysische relaties worden afgeleid. Daarnaast wordt er op de titelpagina van zijn *Lectures* gelijk verwezen naar fysische toepassingen en worden deze toepassingen nog expliciet genoemd aan het einde van het voorwoord.

De fysische waarde die hij toekent aan de quaternionen houdt Hamilton ook niet verborgen voor het grote publiek. Sterker nog, bij zijn eerste openbare lezing over het onderwerp, wijst hij gelijktijdig met de bekendmaking van de quaternionen op de fysische toepassingen van de quaternionen. Deze toepassingen zijn vooral astronomisch van aard, wat de geloofwaardigheid van de quaternionen ten goede komt, aangezien Hamilton actief is als professor in de astronomie en hij de titel 'Koninklijke astronoom van Ierland' draagt. Hamilton presenteert de quaternionen dus als een instrument in de natuurkunde. Zijn publiek dat voor het eerst van quaternionen hoorde, hoorde gelijk over het belang van de

[3]Zie wiskundige toelichting, paragraaf 7.1.

quaternionen in de natuurkunde. De quaternionen en de natuurkunde worden dus vanaf het moment van de presentatie van de quaternionen met elkaar in verband gebracht.
Zoals we later zullen zien, zal de ontwikkeling van quaternionen vooral gedragen worden door wetenschappers met banden in de fysica, zoals Peter. G. Tait. De natuurkundige presentatie van de quaternionen zorgde dus ook voor een natuurkundige invloed op de ontwikkeling van de quaternionen.

2.3 Hamilton en de quaternionen aan het einde van zijn leven

Het tweede boek wat Hamilton schreef over quaternionen draagt de titel *Elements on Quaternions*[9]. Dit boek is minder relevant om informatie over de ontdekking en de presentatie aan het publiek uit te extraheren, omdat het na de dood van Hamilton gepubliceerd is. De inleiding van dit boek is door zijn zoon geschreven. Na de inleiding volgt een voorwoord dat deels bestaat uit Hamiltons eigen ideeën en dat deels is aangevuld door zijn zoon. Een alinea op de eerste pagina van dit voorwoord trekt nog extra de aandacht met betrekking tot de visie die Hamilton had op de quaternionen aan het einde van zijn leven:

> "Shortly before my father's death, I had several conversations with him on the subject of the "Elements." In these he spoke of anticipated applications of Quaternions to Electricity, and to all questions in which the idea of Polarity is involved— applications which he never in his own lifetime expected to be able fully to develope, bows to be reserved for the hands of another Ulysses.. . . "[9, p.vii]

De verwijzing naar de toepassingen in de studie van elektriciteit heeft te maken met de publicatie van Maxwells *Treatise on Electricity*[16]. Elektriciteit was een populair vakgebied in deze tijd en trok de aandacht van vele natuurkundigen. Maxwell en Hamilton waren vrienden en hebben een grote correspondentie gehad over de toepassing van quaternionen in elektriciteit. Aan het einde van zijn leven benadrukte Hamilton dus sterk de mogelijkheid om zijn quaternionen toe te passen in de natuurkunde, hoewel hij deze mogelijkheid zelf nog niet benut had. Dit citaat illustreert wel de ontwikkeling die Hamilton voor zijn quaternionen voor ogen had; een ontwikkeling aan de hand van de fysica.

---

[4]Zie *Explanation in the Historiography of Mathematics: The Case of Hamilton's Quaternions*[13, p.602]

[5]Wat Hamilton bedoelt met deze 'berekeningen in de meetkunde' durf ik niet met zekerheid te stellen. Handelingen zoals optellen, aftrekken en vermenigvuldigen werden al wel gebruikt in Hamiltons tijd, maar waren nog niet zo duidelijk gedefinieerd als operatoren op een verzameling. Ik denk dat Hamilton met 'berekeningen in de meetkunde' berekeningen bedoelde die de bovengenoemde handelingen bevatten en die niet (alleen) betrekking hebben op scalairen, maar op elementen uit de meetkunde, zoals lijnstukken (vectoren).

Hoofdstuk 3

Ontwikkeling van de quaternionen: Peter Guthrie Tait en James Clerck Maxwell

3.1 Peter Guthrie Tait, advocaat van de quaternionen

De voornaamste ontwikkelaar van de quaternionen na Hamilton was Peter Guthrie Tait. Tait werd in 1831 geboren in Edinburgh, de hoofdstad van Schotland. In 1853 kwam Tait voor het eerst in aanraking met de quaternionen toen hij een begin maakte met het lezen van de *Lectures* van Hamilton, maar pas in 1857 begon zijn interesse voor de quaternionen echt te groeien. Tait was intussen actief als professor in de wiskunde op het 'Queen's College' in Belfast, de hoofdstad van Noord-Ierland. Tait gaf daarnaast les in wat wij heden ten dage experimentele natuurkunde zouden noemen en stimuleerde de studie van warmte, elektriciteit en licht. In 1857 werd de interesse van Tait voor quaternionen groter tijdens het lezen van Helmholtz beroemde artikel over vortex beweging, de draaiende beweging die kan optreden in een vloeistof. Tait dacht tijdens het lezen van dit artikel terug aan de deloperator $\nabla = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}$ uit de *Lectures*. Deze operator kon naar zijn mening nuttig worden toegepast in het artikel van Helmholtz.
Crowe zegt over de opkomende interesse in quaternionen van Tait het volgende:

> "It is clear from the above (and from numerous other statements by Tait) that his interest in quaternions was for their physical applications."[2, p.118]

Eerder vatte Crowe al kort samen waarom Tait zo belangrijk geweest is in de geschiedenis van de vectoranalyse[2, p.117]. Zijn samenvatting bestond uit vier punten die ik kort wil aanschouwen en toelichten.
(1) Al eerder zagen we dat de fysica zorgde voor Taits groeiende interesse in

quaternionen. Vanaf 1858 begon een intensieve correspondentie tussen de twee belangrijkste personen uit de geschiedenis van de quaternionen, Hamilton en Tait. Uiteindelijk werd Tait de nieuwe leider na Hamilton. Vanuit deze rol produceerde Tait acht boeken over quaternionen.
(2) Hamilton spoorde Tait aan in het schrijven van zijn eerste artikel dat gebruikmaakte van quaternionen. Dit artikel ging over het golf oppervlak van Fresnel en behandelde de propagatie van licht in een bepaald soort kristal. Hamilton spoorde Tait ook aan tot de publicatie in 1867 van zijn *Elementary Treatise on Quaternions*[25].
Tait breidde de quaternionen in deze boeken en artikelen uit met nieuwe stellingen, waarvan analoge stellingen nog steeds gebruikt worden in de moderne vector algebra. Hij liet zien hoe men de quaternionen als instrument voor de fysica kon gebruiken. De mogelijkheid om quaternionen toe te passen in de fysica, die Hamilton had bedacht, voerde Tait dus uit.
(3) Een opvallende vriendschap waar Crowe naar verwijst en die de ontwikkeling van de quaternionen later zou beïnvloeden, was de vriendschap tussen James Clerck Maxwell en Tait. Maxwell en Tait waren al jeugdvrienden en werden in hun studietijd vaste vrienden die veel correspondeerden. De manier waarop Tait Maxwell heeft gestimuleerd in het gebruik van quaternionen zullen we later nog bespreken. Het gebruik van quaternionen in een van de bekendste boeken van Maxwell en de manier waarop Maxwell de quaternionen gebruikte, kunnen namelijk beschouwd worden als een van de keerpunten in de geschiedenis van de quaternionen.
(4) In zijn vierde punt stelt Crowe dat Tait de belangrijkste tegenstander van onze moderne vectoralgebra was. Dit laatste punt lijkt ongegrond, aangezien onze moderne vectoranalyse nog niet ontwikkeld was in de tijd waarin Tait leefde. Toch heeft Crowe grotendeels gelijk. Tait zou namelijk de grootste tegenstander zijn van de vectoranalyse, waaruit later onze moderne vectoralgebra is ontwikkeld. De geschiedenis van deze vectoranalyse wordt besproken in hoofdstuk vier. Hoofdstuk vijf gaat over het debat tussen de quaternionisten en andere vectoranalytici. In dit hoofdstuk wordt de rol van Tait als belangrijkste tegenstander van de voorloper van onze moderne vectoralgebra uitgebreid geïllustreerd.

Uit deze samenvatting kunnen we opmaken dat de invloed van Tait op de ontwikkeling van de quaternionen absoluut niet gering was. De interesse die Tait in de quaternionen kreeg door de fysica, benoemd in het bovenstaande citaat van Crowe[2, p.118], groeide dus uit naar de behoefte om de quaternionen sterk te ontwikkelen.

Opvallend is de laatste alinea die Crowe wijdt aan de bijdragen van Tait:

> "Tait, as the leading advocate and developer of quaternion analysis in the last third of the nineteenth century, changed the direction of emphasis in quaternion analysis toward its usefulness as a tool for physical science. He did this by developing and stressing those parts of the analysis which were most useful for physical science. This tranfsormation of quaternion analysis was very probably a necessary preliminary for the development of the Gibbs-Heaviside modern vector analysis from quaternion analysis. One important

> example of this is the fact that in Hamiltons works one can find almost no discussion of the operator ∇, which is a fundamental part of modern vector analysis, while in Tait's works the discussion of this operator was probably fuller and better than could be found in any other mathematics books of the time. Historically it turns out that this change in direction in quaternion analysis was decisive for later developments. "[2, p.125]

De nadruk die Tait legde op de natuurkunde is blijkbaar beslissend geweest voor latere ontwikkelingen van de quaternionen. Of dit een positieve of negatieve invloed had is een belangrijke vraag die we uitgebreid zullen bespreken. Hiertoe zullen we eerst de bijdrage van Taits jeugd- en studievriend beschouwen; James Clerck Maxwell.

3.2 Maxwell en zijn *Treatise on Electricity and Magnetism*

De bijdrage die James Clerk Maxwell aan de natuurkunde in de 19e eeuw gaf, is van grote waarde. Zijn naam komt nu nog prominent voor in alle (studie)boeken over de elektrodynamica. Maxwells bekendste boek is *A Treatise on Electricity and Magnetism* uit 1873 waarin de beroemde 'Maxwell vergelijkingen' opgeschreven staan. De vergelijkingen in zijn *Treatise* schreef hij zowel in quaternionenvorm als in Cartesische vorm. Zijn vergelijkingen komen echter al voor in *On physical Lines of Forces*, een boek over elektromagnetisme dat al in 1861 was uitgegeven. In dit boek waren de vergelijkingen nog volledig uitgeschreven in Cartesische coördinaten. Pas in 1870 kwam Maxwell in aanraking met de quaternionen. De behoefte aan een vectoranalyse was in de tussentijd bij Maxwell ontstaan. Zijn beroemde vergelijkingen en de belangrijke begrippen uit zijn elektrodynamica vroegen namelijk om een andere wiskundige beschrijving.

Maxwell schreef in 1871 een artikel waarin hij uiteenzette wat voor mathematische classificatie van grootheden er nodig is voor de fysica, *On the Mathematical Classification of Physical Quantities*[18]. Wanneer in de fysica grootheden ontdekt worden, wil men graag een relatie tussen deze grootheden vinden die wiskundig te beschrijven valt. Je kunt deze relaties vinden tussen grootheden binnen eenzelfde fysisch vakgebied. Een voorbeeld hiervan zijn relaties tussen de grootheden druk, temperatuur, dichtheid etc. Dit zijn begrippen uit de thermodynamica.
Maxwell zocht echter naar een classificatie van grootheden met dezelfde mathematische vorm, maar een verschillende fysische aard, zoals een eindige rechte lijn, een kracht en de snelheid van een rotatie. Deze grootheden hebben een verschillende fysische interpretatie, maar dezelfde wiskundige beschrijving (Hedendaags een vector in drie dimensies). Het praktisch nut van zo'n classificatie is duidelijk aan de hand van het volgende voorbeeld. Stel dat de grootheden uit een nieuwe wetenschap dezelfde mathematische vorm hebben als grootheden uit een oude wetenschap. Daarnaast hebben mathematici in de oude wetenschap alle relaties tussen deze grootheden uitgevogeld. Dan weet men dat deze relaties ook direct van toepassing zijn tussen de grootheden in de nieuwe wetenschap, zonder dat men eerst de fysische ideeën van de nieuwe wetenschap heeft ontdekt.

Het wiskundig geraamte van de oude wetenschap is dus direct van toepassing op de nieuwe wetenschap. Om de onderlinge relaties tussen grootheden te bepalen in dezelfde wetenschap is dan geen fysische interpretatie nodig. Na deze uitleg over het nut van de mathematische classificatie noemt Maxwell enkele voorbeelden uit de wetenschap waarbij de mathematische classificatie toegepast had kunnen worden. Hieronder volgt een van de voorbeelden:

> "Another example, by no means so obvious, is that which was originally pointed out by Sir William Thomson, of the analogy between problems in attractions and problems in the steady conduction of heat, by the use of which we are able to make use of many of the results of Fourier for heat in explaining electrical ditributions, and of all the results of Poisson in electricity in explaining problems in heat."[17, p.258]

Vervolgens stelt Maxwell de eisen op, waaraan deze specifieke mathematische classifacatie moet voldoen en zo belandt hij bij Hamilton, de uitvinder van de quaternionen:

> "A most important distinction was drawn by Hamilton when he divided the quantities with which he had to do into Scalar quantities, which are completely represented by one numerical quantity, and Vectors, which require three numerical quantities to define them.
> The invention of the calculus of Quaternions is a step towards the knowledge of quantities related to space which can only be compared for its importance, with the invention of triple co-ordinates by Descartes. The ideas of this calculus, as distinguished from its operations and symbols, are fitted to be of the greatest use in all parts of science."[17, p.259]

Dit is het eerste citaat van Maxwell waaruit blijkt hoeveel waardering hij had voor de quaternionen. In dit artikel, maar ook in zijn *Treatise on electricity and magnetism* zijn er nog vele te vinden waar Maxwell vol lof over de quaternionen van Hamilton praat. In dit artikel, maar ook in zijn *Treatise* gaat ook veel lof naar Tait, door wie Maxwell in contact is gekomen met de quaternionen. Maxwells *Treatise*, waarin hij behaalde resultaten van andere natuurkundige wetenschappers combineerde met eigen inzicht, werd zeer goed ontvangen in zijn tijd en veel mensen zijn dus via Maxwell in contact gekomen met de quaternionen.

Wanneer we echter kritisch kijken naar het bovenstaande citaat valt het een en ander op. Maxwell prijst de quaternionen vooral om de 'ideas, as distinguished from its operations and symbols'. Het meetkundige idee wat mensen via de quaternionen bij grootheden in de natuurkundige krijgen vindt Maxwell van grote waarde, maar de methoden vindt Maxwell minder prijzenswaardig. Enkele aspecten van de quaternionen zoals de lineaire vectorfunctie en deloperator komen herhaaldelijk terug in Maxwells *Treatise*, maar Maxwell gebruikt niet alle aspecten van de quaternionenalgebra. Crowe citeert in zijn boek ter illustratie een deel van een brief uit 1878 van Maxwell aan Tait[2, p.137,138], waaruit blijkt welke scherpe randjes hij aan de quaternionenanalyse ziet:

> "Here is another question. May one plough with an ox and an ass together? The like of you may write everything and prove everything

in pure 4nions, but in the transition period the bilingual method may help to introduce and explain the more perfect.
But even when that which is perfect is come that which builds over three axes will be useful for purposes of calculation by the Cassios of the future.
Now in a bilingual treatise it is troublesome, to say the least, to find that the square of AB is always positive in Cartesians and always negative in 4nions, and that when the thing is mentioned incidentally you do not know which language is being spoken.
Are the Cartesians to be denied the idea of a vector as a sensible thing in real life till they can recognise in a metre scale one of a peculiar system of square roots of -1?
It is also awkward when you are discussing, say, kinetic energy to find that to ensure its being $+\nu\epsilon$ you must stick a $-$ sign to it, and that when you are proving a minimum in certain cases the whole appearance of the proof should be tending towards a maximum.
What do you recommend for El. and Mag. to say in such cases?
Do you know Grassmann's Ausdehnungslehrre? Spottiswoode spoke of it in Dublin as something above and beyond 4nions. I have not seen it, but sir W. Hamilton of Edinburgh used to say that the greater the extension the smaller the intention."[1, p.151,152]

Uit de eerste vraag die Maxwell aan Tait stelt, worden we iets wijzer over de manier waarop Maxwell de quaternionen hanteerde. Hij gebruikte ze samen met het Cartesische systeem, omdat hij zijn theorieën zo duidelijker aan de lezer kon overbrengen. Met de quaternionen was hij niet in staat een perfecte uitleg te geven.
De vragen die hierop volgden, zullen omgevormd worden door Gibbs en Heaviside tot standpunten tegen de quaternionenanalyse. Gibbs en Heaviside zijn de grondleggers van het zogenoemde Gibbs-Heaviside systeem. Dit systeem werd de directe concurrent van de quaternionen. Later zal ik uitgebreider ingaan op de standpunten tegen de quaternionen van Gibbs en Heaviside. In een van deze standpunten leggen zij net als Maxwell de nadruk op de verwarring die het negatieve kwadraat AB met zich mee brengt. Niet alleen in het kwadraat van AB duikt dit minteken op, overal in de quaternionenalgebra komen mintekens voor die moeilijk te interpreteren zijn. Maxwell vraagt dan ook aan Tait hoe hij dit gedeelte van de quaternionenalgebra zou kunnen inpassen in zijn *Treatise on Electricity and Magnetism*[1]
Gibbs en Heaviside zijn allebei via Maxwell in aanraking met de quaternionen gekomen. Deze geschiedenis van Gibbs en Heaviside zal in hoofdstuk vier besproken worden. In eerste instantie lijkt de bekendmaking van de quaternionen aan Gibbs en Heaviside positief te zijn. Aan Gibbs en Heaviside zijn de verborgen kritische noten van Maxwell echter niet ontgaan. Deze kritiek bleek een stimulans om hun eigen vectoranalyse te ontwikkelen. Gibbs zal later naar de *Ausdehnungslehre* van Grassman verwijzen, waarnaar Maxwell in dit citaat refereert, in verband met de grote overeenkomsten tussen de *Ausdehnungslehre* en zijn vectoranalyse. Op deze *Ausdehnungslehre* zijn de kritische vragen over bijvoorbeeld de steeds opdoemende mintekens niet van toepassing.

Of deze brief openbaar gemaakt is, nadat hij werd geschreven is niet bekend.

Kritische lezers konden echter ook uit de weggelaten delen van de quaternionen-analyse in de *Treatise* van Maxwell, uit de citaten van Maxwell die hierboven beschreven zijn en uit de visie van Maxwell in de *Mathematical Classification* concluderen dat Maxwell niet alle aspecten, die hij zocht in een algebra, gevonden heeft in de quaternionen.

3.3 Conclusie ontwikkeling van de quaternionen door Tait en Maxwell

Nu we de ontwikkeling van de quaternionen aan de hand van twee voorname wetenschappers in beeld hebben gebracht, kunnen we de rol bepalen die de fysica in de ontwikkeling van de quaternionen gespeeld heeft.

De belangrijkste advocaat voor de quaternionen, Peter Guthrie Tait, kreeg interesse in de quaternionen om hun fysische toepassing. Deze interesse groeide uit naar de behoefte om de quaternionen sterk te ontwikkelen. Tait ontwikkelde de quaternionen op twee manieren.
Tait ontwikkelde de quaternionen als een op zichzelf staande wiskundige theorie door het schrijven van de eerste leesbare inleiding in de quaternionen en door het schrijven van andere analytische boeken.
Tait ontwikkelde de quaternionen daarnaast als een gereedschap, waarmee men in de fysica kon werken. Wanneer Tait de waarde van de quaternionen probeerde aan te tonen, legde hij de meeste nadruk op de quaternionen als gereedschap voor de fysica in plaats van de quaternionen als op zichzelf staande wiskundige theorie.
Het gereedschap wat Tait vervaardigde uit de quaternionen, heeft Tait zelf gebruikt binnen de fysica. Met dit gebruik illustreerde Tait vooral op welke manier men het gereedschap kon toepassen. Tait heeft de quaternionen echter niet veel gebruikt in de opstelling van *nieuwe* fysische theorieën[2]. Daar tegenover staat dat Tait dit gereedschap wel heeft voorgelegd aan zijn jeugdvriend Maxwell, die de quaternionen ging gebruiken in zijn *Treatise*. Dit boek kreeg veel waardering binnen de fysica, juist door de originaliteit van zijn fysische theorieën, en vele lezers zijn door middel van dit boek in contact gekomen met de quaternionen.

Tot dit punt lijkt de bijdrage die de fysica leverde aan de ontwikkeling van de quaternionen positief te zijn. De quaternionen waren stevig onderbouwd door Tait en kregen veel bekendheid door Maxwell.

Maxwell sprak vol lof over Tait, Hamilton en het *idee* van de quaternionen. We hebben echter gezien dat de *manier* waarop Maxwell de quaternionen hanteerde ook de beperkingen van de quaternionen naar voren bracht. De vraag is nu hoeveel lezers van Maxwell zijn kritische noten hebben opgemerkt.
We zullen zien dat de verkapte kritiek die Maxwell geuit heeft in ieder geval aan twee van zijn lezers niet ontgaan is. De gevolgen hiervan bespreken we in het volgende hoofdstuk.

[1] In het citaat aangeduid als 'El. and Mag.'
[2] Zie [2, p.120].

Hoofdstuk 4

De vectoranalyse van Gibbs en Heaviside

Josiah Willard Gibbs en Oliver Heaviside waren twee wetenschappers die in dezelfde tijd leefden als Tait. Zij presenteerden een alternatieve vectoralgebra rond 1880. Op de presentatie van hun systeem volgde een groot debat tussen aan de ene kant de quaternionisten en aan de andere kant de aanhangers van het Gibbs-Heaviside systeem.
De invloed van de quaternionenalgebra is na het debat afgenomen door het Gibbs-Heaviside systeem[1]. Het is daarom voor deze studie belangrijk om eerst te kijken naar de invloed die de natuurkunde heeft gehad op de opkomst van het Gibbs-Heaviside systeem. Een bijdrage van de natuurkunde aan de opkomst van het Gibbs-Heaviside systeem, deed namelijk indirect afbreuk aan de quaternionen.
Vervolgens is het belangrijk om te kijken naar de rol die de natuurkunde speelde in het debat tussen enerzijds de quaternionisten en anderzijds de aanhangers van het Gibbs-Heaviside systeem. Dit debat zal besproken worden in hoofdstuk vijf.

De inhoud van het Gibbs-Heaviside kan in essentie vergeleken worden met de beperking van ons moderne vectorsysteem op drie dimensies. Hoewel de notatie sterk verschilt, bevatte het Gibbs-Heaviside alle basisbegrippen van ons moderne vectorsysteem in drie dimensies. Hierbij kan gedacht worden aan de begrippen vector, norm van een vector, optelling, inproduct en uitproduct. Het systeem bevatte ook niet *meer* begrippen dan ons moderne vectorsysteem, in tegenstelling tot de quaternionen. In het Gibbs-Heaviside systeem zijn begrippen uit de quaternionenalgebra overgenomen, veranderd of geëlimineerd.

We zullen zien dat Maxwells *Treatise*[16] de basis heeft gelegd voor de vectoranalyse van zowel Gibbs als Heaviside. Voordat we de opkomst van het Gibbs-Heaviside systeem en Maxwells invloed hierop zullen bespreken, is het van belang te weten dat Gibbs en Heaviside hun vectoranalyse los van elkaar ontwikkeld hebben. Pas later zijn de twee wetenschappers met elkaar in contact gekomen en waren ze het snel met elkaar eens dat hun algebra, afgezien van de

[1] Crowe beschrijft deze geschiedenis in hoofdstuk 7 'The Emergence of the modern system of vector analysis'[2, p.225-243].

notatie, in essentie hetzelfde was[2]. We zullen daarom afzonderlijk de inspiratie voor hun vectoranalyse onderzoeken.

4.1 Josiah Willard Gibbs

Het is voordelig voor deze studie dat Gibbs en Heaviside beiden zelf heel duidelijk beschreven hebben hoe de ontwikkeling van hun algebra is verlopen. Crowe heeft in zijn boek een deel van een brief van Gibbs' hand geciteerd[2, p.152], waarin Gibbs op vele vragen die betrekking hebben op de oorsprong van Gibbs' algebra een antwoord geeft. Deze brief komt uit 1888 en was oorspronkelijk gericht tot Victor Schlegel, een duitse mathematicus.

Gibbs vertelt ons in deze brief dat hij door Maxwells *Treatise* in aanraking is gekomen met de quaternionen. Zijn interesse ging in eerste instantie uit naar de onderwerpen elektriciteit en magnetisme. Om de theorie in Maxwells *Treatise* echter volledig te begrijpen, voelde hij zich genoodzaakt de wiskundige methoden die Maxwell gebruikte te leren beheersen. Zo werd zijn interesse in de quaternionen gewekt.
Terwijl Gibbs de quaternionen bestudeerde, zag hij de waarde van enkele functies, zoals het scalar- en vectorgedeelte van het quaternionenproduct en de operator ∇. Het viel hem echter op dat de notie van een quaternion nauwelijks van toegevoegde waarde was. Daarnaast leek het quaternionenproduct hem overbodig. Andere kritiek van Gibbs op de inhoud van de quaternionenalgebra zal in hoofdstuk vijf nog uitgebreid aan de orde komen.
Vanwege zijn onvrede over de quaternionenalgebra, werkte Gibbs zelf een vectoralgebra uit. In deze algebra kwamen de functies voor die hij belangrijk vond zoals het scalarproduct, het vectorproduct en de operator ∇. Gibbs liet in zijn vectoralgebra het quaternion achterwege. Hij voegde ook enkele functies toe, zoals de lineaire vectorfuncties die in Maxwells *Treatise* prominent voorkwamen.

Verderop in de genoemde brief benadrukt Gibbs nog een keer dat hij zijn analyse ontwikkeld heeft uit de quaternionen door overbodige begrippen te elimineren. De kritiek die Maxwell voorzichtig uitte op de quaternionen van Tait[3] en die onder andere betrekking had op de steeds opdoemende mintekens, is niet meer van toepassing op de vectoralgebra van Gibbs. Gibbs vectoranalyse sloot juist nauw aan bij de ideeën die Maxwell naar voren bracht in zijn *Mathematical Classification.*

Met deze feiten kunnen we de geschiedenis van het ontstaan van de vectoranalyse van Gibbs kort samenvatten. De interesse van Gibbs in de fysische onderwerpen elektriciteit en magnetisme, leidde Gibbs naar de *Treatise* van Maxwell. Maxwells *Treatise* leidde Gibbs vervolgens naar de quaternionen. Toen Gibbs echter zag dat de quaternionen geen optimale wiskundige methode waren om Maxwells theorie mee te beschrijven, begon hij met het uitwerken van zijn eigen vectoralgebra.

De geschiedenis van Gibbs breidt de bijdrage uit, die Maxwells *Treatise* aan de ontwikkeling van de quaternionen gegeven heeft[4]. Maxwell gaf de quaternio-

[2]Zie [11, p.135].

nen niet alleen bekendheid, maar gaf ook Gibbs (en Heaviside, zoals we later zullen zien) het inzicht dat de quaternionenalgebra geen volmaakte vectoralgebra was. De *Treatise* van Maxwell lag dus ten grondslag aan de vectoranalyse van Gibbs en Heaviside, de vectoranalyse die de concurrent van de quaternionen werd.

Gibbs produceerde zijn analyse op pamfletten die hij verspreidde onder zijn studenten en collega wetenschappers. Naast het produceren van zijn vectoranalyse is lesgeven in zijn vectoranalyse de grootste bijdrage van Gibbs geweest aan de ontwikkeling van de moderne algebra.

4.2 Oliver Heaviside

Oliver Heaviside werkte in 1868 als medewerker in een telegrafiekantoor. Vanuit deze baan raakte hij geïnterresseerd in elektriciteit. Vanaf 1872 begon hij met het publiceren van een reeks artikelen over elektriciteit. Deze artikelen zijn gebundeld als de 'Electrical Papers' van Heaviside. Onder de boeken die Heaviside bestudeerde was onder andere Maxwells *Treatise*. Maxwells *Treatise* was voor Heaviside een introductie tot de quaternionen:

> "My own introduction to quaternionics took place in quite a different manner. Maxwell exhibited his main results in quaternionic form in his treatise. I went to Prof Tait's treatise to get information, and to learn how to work them. I had the same difficulties as the deceased youth, but by skipping them, was able to see that quaternionics could be employed consistently in vectorial work. But on proceeding to apply quaternionics to the development of electrical theory, I found it very inconvenient. Quaternionics was in its vectorial aspects antiphysical and unnatural, and did not harmonise with common scalar mathematics. So I dropped out the quaternion altogether, and kept to pure scalars and vectors, using a very simple vectorial algebra in my papers from 1883 onward."[11, p.136]

Uit dit citaat kunnen we opmaken dat Heaviside, net als Gibbs, zijn vectorsysteem vanuit de quaternionen ontwikkelde. Heaviside maakte kennis met de quaternionen tijdens het lezen van Maxwells *Treatise*. Heaviside maakte echter niet alleen kennis met de quaternionen, hij merkte ook meteen de gebreken van de quaternionen op, door de manier waarop Maxwell ze toepaste in zijn *Treatise*.

Heaviside ontwikkelde zijn systeem telkens een stapje verder aan de hand van opeenvolgende publicaties van zijn artikelen over elektriciteit. In de eerste artikelen gebruikte hij vectoren vooral kwalitatief, hij definieerde bijvoorbeeld nog niet het vectorproduct. In de artikelen die volgden beschreef hij telkens iets meer grootheden kwantitatief en zo vormde hij zijn algebra langzaam. De notatie die hij gebruikte zoals bijvoorbeeld de letters i, j en k voor de eenheidsvectoren, was vooral quaternionisch, maar zijn algebra bevatte nergens meer het concept van een quaternion. De algebra van Heaviside (en ook van Gibbs)

[3] Hier wordt verwezen naar de brief van Maxwell, in paragraaf 3.2.
[4] Naar deze rol werd verwezen in de conclusie van hoofdstuk drie.

bevatte alleen vectoren en scalairen.

Het bekendste boek dat Heaviside publiceerde draagt de titel *Electromagnetic Theory*[11]. Dit boek bevatte onder andere de eerder gepubliceerde artikelen over elektriciteit en de eerste volledige uitwerking van zijn vectoranalyse. Het eerste deel van dit boek verscheen in 1893, toen het debat over de vectorsystemen in volle gang was. Heaviside leverde met de publicatie van dit boek een grote bijdrage aan het debat. Hij schreef een aantal kritische pagina's over de quaternionisten en hun systeem. Zijn schrijftstijl was ironisch en scherp. Daarnaast kregen de argumenten die Heaviside opvoerde extra geloofwaardigheid door de erkenning die Heaviside in het begin van de jaren 90 al had ontvangen voor het fysische belang van zijn artikelen over elektriciteit.
Crowe zegt het volgende over het belang van Heaviside met betrekking tot de acceptatie van het Gibbs-Heaviside systeem:

> "It will be shown later that Heaviside's association of vector analysis with Maxwellian electrical theory was the most influential factor in leading to the widespread acceptance of vector analysis."[2, p.176]

Crowe verwijst hier naar het hoofdstuk uit zijn boek dat de acceptatie van het Gibbs-Heaviside systeem beschrijft na het debat.

4.3 Conclusie opkomst Gibbs-Heaviside systeem

De interesse in de fysische onderwerpen elektriciteit en magnetisme van zowel Gibbs als Heaviside, leidde Gibbs en Heaviside naar de *Treatise* van Maxwell. In Maxwells *Treatise* maakten zij vervolgens kennis met de quaternionen. Toen Gibbs en Heaviside echter zagen dat de quaternionen geen optimale wiskundige methode waren om Maxwells theorieën mee te beschrijven, begonnen zij ieder afzonderlijk met het uitwerken van hun eigen vectoralgebra. De vectoralgebra's die zij ontwikkelden waren volgens Gibbs en Heaviside beter toepasbaar in de fysica. De twee vectoralgebra's waren bijna identiek en worden beiden aangeduid als het Gibbs-Heaviside systeem.

De *Treatise* van Maxwell lag ten grondslag aan de vectoranalyse van Gibbs en Heaviside. In het belang van de natuurkunde is dus de vectoranalyse ontstaan die de concurrent van de quaternionen werd. In het algemeen is concurrentie niet per se slecht voor de ontwikkeling van een product. Wij weten echter dat onze moderne vectoralgebra uit het Gibbs-Heaviside systeem voortkomt. De grote bijdrage die de natuurkunde heeft geleverd aan de opkomst van het Gibbs-Heaviside systeem heeft dus afbreuk gedaan aan de quaternionen.

We weten echter nog niet of de fysica nog voor de quaternionen gepleit heeft in het debat tussen de quaternionisten en de aanhangers van het Gibbs-Heavisidesysteem. Daarnaast weten we nog niet *op welke manier* de fysica de quaternionen heeft ondersteund en/of tegengewerkt. Deze vragen zullen we beschouwen in het volgende hoofdstuk.

Hoofdstuk 5

Debat tussen de quaternionisten en de aanhangers van het Gibbs-Heaviside systeem

In voorgaande hoofdstukken hebben we beschouwd welke rol de fysica heeft gehad in de ontdekking en opkomst van de quaternionen, maar ook welke rol de fysica in de opkomst van andere vectoralgebra's heeft gespeeld. In dit hoofdstuk zullen we zien hoe de fysica wordt ingezet in de discussie over de vraag welke vectoralgebra het wetenschappelijke publiek in gebruik zou moeten nemen.

Dit hoofdstuk begint met de toelichting van vijf artikelen waarin Gibbs en Tait de onderlinge strijd aan gaan ter verdediging van hun algebra's. Het hoofdstuk begint met het voorwoord van de derde editie van Taits *Treatise on quaternions*, waarin hij de aanval op het Gibbs-Heaviside systeem opent. Hierop volgt een artikel van Gibbs, waarin hij zijn vectoranalyse verdedigt en de gebreken van de quaternionen aan de kaak stelt. Op dit artikel volgen nog drie artikelen, waarin respectievelijk Tait, Gibbs en wederom Tait reageren op de onderlinge aantijgingen. De correspondentie tussen Gibbs en Tait lijnt de verschillen tussen de beide algebra's scherp uit.
Na deze artikelen volgt een paragraaf waarin de bijdrage wordt beschreven die andere wetenschappers hebben geleverd aan het debat. Als laatste volgt een paragraaf waarin de bijdrage van Heaviside wordt toegelicht.
Het feit dat Heavisides bijdrage aan het debat minder belicht wordt, wil niet zeggen dat zijn inbreng minder belangrijk is geweest. In deze studie is het echter niet nodig om de invloed van de natuurkunde op het debat te illustreren aan de hand van zowel de uitgebreide artikelen van Gibbs als van Heaviside.

5.1 Taits voorwoord in de derde editie van *An Elementairy Treatise on Quaternions*

In 1890 brengt Tait de derde editie uit van zijn *Elementairy Treatise on Quaternions.* Zoals eerder genoemd kwam de eerste editie uit in 1867 en de tweede editie in 1873. De voorwoorden van deze twee eerste edities zijn hoopvol en positief. Ze beschrijven de te verwachten inhoud van het boek, brengen dank aan medewerkers en benadrukken de rooskleurige toekomst die de quaternionen binnen de wetenschap ongetwijfeld tegemoet gaan. Een speciale plaats wordt toegekend aan de toekomst van de quaternionen binnen de fysica. In zijn tweede editie breidt Tait zijn boek bijvoorbeeld uit met meerdere fysische toepassingen.

Een compleet andere toon neemt Tait aan in het voorwoord van zijn derde editie; teleurgesteld in plaats van hoopvol en kritische sneren naar collega's in plaats van bedankjes. Hij benadrukt de toekomst van quaternionen binnen de fysica nog steeds, maar zonder het onbevangen vertrouwen dat het alleen een kwestie van tijd is wanneer deze toekomst werkelijkheid wordt. In het voorwoord van de derde editie onderbouwt Tait strijdlustig dat zijn hoopvolle voorspellingen uit de tweede editie nog steeds kunnen uitkomen. Juist de felheid van zijn onderbouwing is een teken dat dit geen vanzelfsprekenheid meer is. Met de extreme uitbreiding van zijn *Treatise*, die het meest betrekking heeft op de toepassingen van quaternionen, hoopt hij een begin te laten zien van de mogelijkheden van de quaternionen en de lezer enthousiast te maken.

Het is goed om dit voorwoord en de reacties van collegas hierop nader te beschouwen, want de verandering in de toon van Tait duidt op een ontwikkeling in de jaren tussen 1873 en 1890 die niet in het voordeel van de quaternionen uitgepakt lijkt te zijn. Het is voor ons extra interessant, omdat de deelnemers aan de discussie over de verschillende vectoralgebra's de relatie tussen quaternionen en fysica herhaaldelijk aanhalen. Dit duidt erop dat de fysica gemoeid lijkt te zijn met deze ontwikkelingen.

Tait begint zijn voorwoord met uitleg over de toegevoegde bladzijden aan zijn *Treatise.* Hij noemt onder andere de extra aandacht die is uitgegaan naar de beschrijving van het elementaire gebruik van de operators $q(\ )q^{-1}$ en ∇. Vervolgens geeft Tait zijn gezichtspunt over de inhoud van zijn boek aan:

> "As will be seen by the reader of the former Preface (reprinted below) the point of view which I have, from the first, adopted presents Quaternions as *a Calculus uniquely adapted to Euclidian space*, and therefore specially useful in several of the most important branches of Physical Science. After giving the necessary geometrical and other preliminiaries, I have endeavoured to develope it entirely from this point of view; and, though one can scarcely avoid meeting with elegant and often valuable novelties to whatever branch of science he applies such a method, my chief contributions are still those conatined in the fifth and the two last Chapters."[25, p.v]

Het vijfde hoofdstuk waar Tait naar verwijst heeft de titel 'The solution of equations of the first degree' en de laatste twee hoofdstukken hebben als titels

'Kinematics' en 'Physical applications'.
Op het eerste gezicht lijkt Tait hier gestaag verder te gaan in de lijn van zijn vorige twee edities. Zijn gezichtspunt is in ieder geval nog niet veranderd, hij benadrukt deze alleen met een scheefgedrukte zinsnede en klemmende woorden als 'uniquely adapted' en 'specially useful'. Het gebruik van de woorden 'uniquely adapted' legt nadruk op het feit dat de quaternionen *uniek* zijn in hun eigenschap zich aan te passen aan de euclidische ruimte (en hierdoor speciaal toepasbaar zijn binnen de fysica). Hier komt voor het eerst naar voren dat Tait blijkbaar voelt dat zijn quaternionen geen alleenheersers meer zijn in het gebied van de vectoralgebra en dat zijn concurrenten ook toepasbaarheid in de fysica claimen. Door zijn quaternionen uniek te noemen geeft hij ze toch weer een aparte positie ten opzichte van de andere algebra's. Om te rechtvaardigen dat de quaternionen echt uniek zijn door hun toepassing in de fysica, wijst hij naar het vijfde en de laatste twee hoofdstukken, waarin toepassingen worden getoond. Eerstegraads vergelijkingen komen namelijk aan de lopende band voor binnen de fysica en de kinematica is een op zichzelf staand fysisch onderwerp. Het hoofdstuk met als titel fysische toepassingen is in zijn geheel gewijd aan het geven van praktische voorbeelden die het nut van quaternionen tonen.

Hoewel Tait in het begin van zijn voorwoord trots de unieke fysische eigenschappen van de quaternionen benadrukt, uit hij enkele pagina's verder zijn teleurstelling over de minimale voortgang die in de ontwikkeling van de quaternionen heeft plaatsgevonden. Het lijkt echter alsof geen haar op zijn hoofd zich afvraagt of dit te wijten valt aan de quaternionen zelf. Tait geeft twee andere redenen die volgens hem de ontwikkeling van de quaternionen tegengaan.

De eerste reden is dat veel wetenschappers die werken met de quaternionen meer bezig zijn geweest met het verbeteren van de notatie en de manier waarop de fundamentele principes gepresenteerd moeten worden dan met het uitbreiden van de toepassingen van de quaternionen. Deze wetenschappers zijn volgens Tait vooral actief in Frankrijk en de eerste 'dader', aldus de woordkeuze van Tait, is M.Houël, die in zijn *Théorie des Quantités Complexes* volgens Tait grote stukken ongevraagd heeft gekopieerd uit zijn *Treatise*. Vervolgens maakte Houël deze stukken weerzinwekkend om te lezen naar Tait's mening door zijn 'fancied improvements', denkbeeldige verbeteringen. Hoe ongecharmeerd Tait hiervan is blijkt uit het citaat van Shakespeare dat hij hierbij plaatst:

> "... with taper-light
> To seek the beauteous eye of heaven to garnish, Is wasteful and ridiculous excess."[25, p.vi]

Hieruit kunnen we het standpunt van Tait opmaken: Iets versieren wat op zichzelf al prachtig is, namelijk de quaternionen, is tijdverspilling en een belachelijke bezigheid. Opvallend is dat Tait zijn collegawetenschappers in Frankrijk niet serieus wil nemen door uit te leggen waarom het niet nodig is de notatie te verbeteren en wat er bovendien mis is met de nieuwe notatie van M.Houël. Het feit dat meerdere wetenschappers hier zoveel tijd insteken, geeft namelijk aan dat het door velen niet als een belachelijke bezigheid wordt gezien. Zou Tait dit over het hoofd gezien hebben in zijn overtuiging dat niets beter is dan het gebruik van de quaternionen of zou Tait toch gevoeld hebben dat zijn notatie niet optimaal was en heeft hij niet de moed gehad hun vernieuwingen inhoudelijk af te kraken?...

Vervolgens richt Tait zijn kritiek op de pamfletten van Gibbs. In de volgende paragraaf zullen we de reactie van Gibbs op het volgende citaat beschouwen:

> "Even Prof. Willard Gibbs must be ranked as one of the retarders of Quaternion progress, in virtue of his pamphlet on Vector Analysis; a sort of hermaphrodite monster, compounded of the notations of Hamilton and of Grassmann.[25, p.vi]"

Deze pamfletten zijn in het voorgaande hoofdstuk al besproken en waren door Gibbs vooral opgesteld voor eigen gebruik. Ook Tait heeft geweten dat Gibbs ze verspreidde onder studenten zodat zij de wiskundige technieken snapten die hij gebruikte in zijn natuurkundige onderzoeken en colleges. Gibbs was in deze tijd al een bekend en gewaardeerd natuurkundig onderzoeker. Wanneer juist Gibbs de quaternionen had gebruikt in zijn natuurkundige resultaten had dat zeker bijgedragen aan de ontwikkeling van de quaternionen. Voor Tait is het een zure appel geweest dat Gibbs een groot deel van de quaternionenalgebra gebruikte, maar hoofdelementen, zoals het quaternion, elimineerde en dat Gibbs daarnaast een andere notatie voor de elementen gebruikte. Tait heeft dit blijkbaar als een afwijzing van zijn quaternionenalgebra ervaren en vond dit onbegrijpelijk; hijzelf was toch immers wel in staat geweest vele natuurkundige toepassingen te vinden voor zijn quaternionen? Waarom moest Gibbs dan zo nodig zijn eigen algebra opstellen? De algebra van Gibbs staat Tait zo tegen dat hij het vergelijkt met een hermafrodiet monster, samengesteld uit de notaties van Grassman en Hamilton. Blijkbaar vind Tait deze twee notaties net zo ver uit elkaar staan als het mannelijke en het vrouwelijke geslacht. Hij zet de quaternionen met deze opmerking dus volledig apart van Grassmans algebra en hiermee indirect ook van Gibbs algebra.

Naar mijn mening had juist deze gebeurtenis Tait het inzicht moeten geven dat zijn quaternionensysteem, hoewel een goede algebra, misschien niet de beste algebra was om toe te passen in de natuurkunde. Dat wiskundigen probeerden de notatie te verbeteren kon hij nog wel negeren. Zij hebben immers minder oog voor toepassingen. Wanneer echter een gewaardeerd natuurkundig wetenschapper de notatie verbetert en hier bovendien niet mee te koop loopt, (de pamfletten van Gibbs waren geen uitgegeven boek) dus puur voor de 'handigheid', wijst dit er wel op dat de quaternionen misschien wel geëvolueerd moesten worden naar een algebra met een betere notatie. Wanneer Tait juist op dit moment meer aandacht had geschonken aan de overeenkomsten tussen de beide notaties, was er wellicht meer eer voor de quaternionen overgebleven...

De tweede reden voor de geremde ontwikkeling van de quaternionen geeft Tait aan met het volgende citaat:

> "Another cause of the slow head-way recently made by Quaternions is undoubtedly to be ascribed to failure in catching the "spirit" of the method: – especially as regards the utter absence of artifice, and the perfect naturalness of every step. To try to patch up a quaternion investigation by having recourse to quasi-Cartesian processes is fatal to progress".[25, p.vii]

Er waren dus meerdere wetenschappers die naast quaternionen ook nog Cartesische coördinaten hanteerden. Wanneer zij een quaternionvergelijking oplosten, schreven ze het antwoord of een deel van de berekening om naar Cartesische coördinaten. Maxwell geeft dit in zijn brief, aangehaald in paragraaf 3.2, ook toe. Een reden hiervoor zou de interpretatie van verkregen resultaten kunnen zijn, aangezien het Cartesische coördinatensysteem vertrouwd was en dus makkelijker te interpreteren. Tait heeft hier felle kritiek op en zegt dat een onderzoeker van quaternionen op deze manier zijn zelfrespect verliest. Om zijn standpunt te versterken haalt hij waarschuwende woorden van Hamilton aan, waarin Hamilton het belang benadrukt om oplossingen van vergelijkingen in quaternionen uit te drukken en niet in Cartesische coördinaten.
Met betrekking tot fysisch onderzoek heeft Tait hier wel een punt. Wanneer men quaternionen altijd weer terug wil brengen naar Cartesische coördinaten, gaat juist de eenvoud van het gebruik van quaternionen verloren. Het gemak van de quaternionen ligt in het bijbehorende product en de beknopte notatie. Wanneer men hiernaast gebruik maakt van Cartesische coördinaten, benut men niet de volle mogelijkheden van de quaternionen. Vervelend is echter wel dat dit zelfde argument geldt voor het uitschrijven van de vectoren uit Gibbs' vectoralgebra naar cartesische coördinaten. Het is dus wel zo dat quaternionen meer tot hun recht komen wanneer de cartesische technieken weggelaten worden, maar hetzelfde geldt voor de vectoren uit Gibbs analyse. Wanneer wetenschappers dus naar deze waarschuwing geluisterd hebben, wil dat niet zeggen dat dit in het voordeel van de quaternionen is uitgepakt.

Na zijn uitleg over de trage ontwikkelingen die de quaternionen tot nu toe doormaken, schrijft Tait dat hij de volledige uitwerking wil geven van alle theorieën en voorbeelden die hij schetst in de hoofdstukken die betrekking hebben tot de fysica, zodra de tijd hem gegeven wordt. Nog een laatste keer benadrukt hij expliciet de enorme bruikbaarheid van de quaternionen binnen de fysica. Hiervoor wijst hij op de volgens hem immense simplificaties binnen elementaire delen van de Hydrokinetica en de Electrodynamica na het introduceren van quaternionen. Vervolgens stelt hij dat deze resultaten in het niet vallen, wanneer de quaternionen zullen worden toegepast in de meer complexere delen van deze fascinerende onderwerpen. Hier voegt hij nog aan toe: "Complexity is no feature of quaternions themselves, and in presence of their attack (when properly directed) it vanishes from the subject also..."[25, p.vii].

De laatste zinnen die we bekijken zijn de zinnen waar Tait zijn voorwoord mee afsluit:

> "The special form of thanks which would have been most grateful to a man like Hamilton is to be shewn by practical developments of his magnificent Idea. The award of this form of thanks will, I hope, not be long delayed."[25, p.viii]

Tait geeft de lezers door in te spelen op hun sympathie voor Hamilton het laatste duwtje in de door hem gegeven richting: Probeer praktische toepassingen te vinden van quaternionen. Wanneer een lezer het nut hiervan nog niet helemaal inzag, zou hij ten minste uit respect voor zo'n grote wetenschapper aan deze taak moeten beginnen. Deze afsluiting karakteriseert de schrijfwijze van Tait; met veel emotie vecht hij voor zijn quaternionen. Het karakteriseert ook de waarde die de quaternionen voor Tait hebben; hij gaat tot het uiterste om wetenschappers over de streep te trekken.

Het moge duidelijk zijn dat Tait al zijn hoop op het behoud en de ontwikkeling van de quaternionen vestigt op wetenschappers die de algebra gebruiken voor fysisch onderzoek. De vraag of dit een verstandige keuze is geweest en of Tait niet beter ook andere mogelijkheden van quaternionen had kunnen aanhalen zullen we later proberen te beantwoorden. Hiertoe zullen we de discussie die volgde na dit voorwoord in kaart proberen te brengen en de fysische argumenten uit deze discussie bekijken.

5.2 Gibbs' antwoord op Tait: *On the Rôle of Quaternions in the Algebra of Vectors*

In antwoord op Tait's kritiek [25] ten aanzien van de twee pamfletten van Gibbs, schrijft Gibbs op 2 april 1891 een artikel met de titel *On the Rôle of Quaternions in the Algebra of Vectors*[4]. Ondanks het feit dat vooral de notatie van Gibbs bekritiseert wordt in het voorwoord van Taits *Treatise*, denkt Gibbs dat de kritiek ten diepste gericht is op het verschil tussen de meest fundamentele begrippen in de quaternionenalgebra en de meest fundamentele begrippen binnen zijn vectoranalyse. In zijn kleine artikel, gepubliceerd in het blad Nature, beargumenteert hij de overbodigheid van de notie van een quaternion binnen de vectoranalyse.

Hij vergelijkt eerst het door hemzelf gedefinieerde inproduct met het negatieve scalarproduct, dat voorkomt in de quaternionenalgebra. Vervolgens vergelijkt hij zijn eigen uitproduct met het vectorproduct. De eerste twee vertegenwoordigen het product van de lengte van twee vectoren α en β met de cosinus van de hoek tussen deze twee vectoren. Het uit- en vectorproduct beelden een vector uit, loodrecht op het vlak opgespannen door α en β, waarvan de lengte gelijk is aan het product van de lengtes van α en β met de sinus van de hoek tussen α en β.

Tegenover de twee beschreven producten, plaatst Gibbs het quaternionenproduct wat in zijn vectoralgebra niet voorkomt. Het in- en uitproduct zijn hieruit afgeleid binnen de quaternionenalgebra. Binnen de quaternionenalgebra neemt het quaternionenproduct dus een prominente plaats in. Per definitie is dit de optelling van het scalar- en vectorproduct[1]. In tegenstelling tot het in- en uitproduct representeert dit product volgens Gibbs geen meetkundige grootheid. Daarnaast vindt hij het niet geschikt voor een analytische transformatie. Gibbs legt dit begrip niet verder uit in zijn artikel. Binnen de algebra is deze term ook niet gedefinieerd. Het doet sterk denken aan een lineaire transformatie, juist één van de fundamentele begrippen binnen de algebra. Het quaternionenproduct $\alpha\beta$ is echter zelf ook een quaternion, waar in principe gewoon een lineaire transformatie op toegepast kan worden. In de bijbehorende alinea die Gibbs hierover schrijft, lijkt men het feit dat $\alpha\beta$ niet geschikt is voor een lineaire transformatie te kunnen vertalen met het feit dat $\alpha\beta$ niet makkelijk verder rekent. Dit argument laat Gibbs nog vaker voorkomen in zijn artikel, maar het jasje 'analytische transformatie' laat het vernieuwend en bovendien erg belangrijk lijken.

Het quaternionenproduct doet Gibbs na deze overdenkingen gekunsteld aan en draagt volgens hem geen fysische waarde. Hij vindt het dan ook niet terecht dit product als een fundamenteel begrip binnen de vectoranalyse te behandelen. Hetzelfde geldt naar zijn mening voor het quaternionen quotient en de notie van een quaternion in het algemeen.
Om dit laatste punt te bekrachtigen, vervolgt Gibbs zijn artikel met het volgende citaat:

> "How much more deeply rooted in the nature of things are the functions $S\alpha\beta$ and $V\alpha\beta$ than any which depend on the definition of a quaternion, will appear in a strong light if we try to extend our formulae to space of four or more dimenisons."[6, p.156-157]

Hierna betoogt Gibbs dat het begrip van een quaternion niet zomaar uitgebreid kan worden in een ruimte met meer dan drie dimensies, in tegenstelling tot vectoren, die wel gegeneraliseerd naar een 4- of meer-dimensionale ruimte kunnen worden. Het quaternion wordt in zo'n ruimte inhoudsloos, aangezien de relaties tussen i, j en k, niet meer kunnen blijven bestaan. Het begrip $S\alpha\beta$ is echter gelijk toepasbaar in deze ruimte en daarnaast stelt Gibbs dat $V\alpha\beta$ met een kleine aanpassing in de defenitie ook meteen toepasbaar is. Hierbij moet wel een kanttekening geplaatst worden. Het uitproduct valt namelijk helemaal niet makkelijk te generaliseren naar een ruimte met meer dan drie dimensies. Alleen in een 7-dimensionale ruimte hebben we een soortgelijk product dat dezelfde axioma's heeft als het uitproduct. In de meeste ruimten geeft dit product geen normale vector terug of er moeten axioma's veranderd of weggelaten worden[2]. Zo makkelijk kan Gibbs dit dus eigenlijk niet zeggen. Door toch te betogen dat zowel $S\alpha\beta$ en $V\alpha\beta$ makkelijk te generaliseren zijn, lijkt Gibbs hier wel subtiel de onafhankelijkheid van $S\alpha\beta$ en $V\alpha\beta$ ten opzichte van een quaternion aan te tonen. Dit is een belangrijk argument ten voordeel van zijn eigen vector analyse en het is dus niet zo raar dat Gibbs hier een beetje voor wil bluffen.

Het gebruik van de woorden 'more deeply rooted in the nature of things' laat de waarde zien die Gibbs hecht aan een algebra waarin de gebruikte begrippen als vanzelf een fysische lading krijgen. Door te benadrukken dat een quaternion niet gemakkelijk te generaliseren is naar een ruimte met meer dan drie dimensies wil Gibbs laten zien dat een quaternion deze fysische lading niet draagt. Men kan zich nu afvragen of de mogelijkheid om een begrip uit te breiden naar meer dimensies een noodzakelijke eigenschap is van begrippen met een fysische lading.

Gibbs lijkt dit ook te voelen en wil zijn argument versterken door te beschouwen hoeveel gebruik er van quaternionen wordt gemaakt om uitdrukkingen voor ruimtelijke relaties te vinden. Een ruimtelijke relatie specificeert hoe een object in de ruimte geplaatst is ten opzichte van een ander object. Uit deze defenitie zien we dat een ruimtelijke relatie dus een direct verband met de fysica heeft.

Gibbs stelt dat in de zoektocht naar deze relaties de quaternionen voornamelijk gebruikt worden om de functies $S\alpha\beta$ en $V\alpha\beta$ te vinden. Hiertoe wordt

[1] Zie Wiskundige toelichting, paragraaf 7.2.
[2] Zie [24].

eerst het quaternionenproduct $\alpha\beta$ geformuleerd en vervolgens respectievelijk het scalar- of het vectorgedeelte geselecteerd. In de vectoranalyse van Gibbs is de tussenstap van het quaternionproduct niet nodig. Gibbs benadrukt dat quaternionisten het blijkbaar noodzakelijk vinden om eerst het idee van een quaternion uit te werken, zo snel mogelijk de betreffende uitdrukking voor het product $\alpha\beta$ te vinden en vanuit dit quaternion verdere begrippen te ontwikkelen.
Het doet denken aan de rol van een partitiefunctie binnen de statistische fysica. In de statistische fysica kunnen bijna alle problemen worden opgelost door eerst de partitiefunctie van een systeem te definieren en vervolgens de gevraagde grootheid uit deze functie te extraheren. De partitiefunctie speelt een fundamentele rol in de statistische fysica, want in veel problemen is het vinden van de partitiefunctie een eis voor het vinden van de oplossing van het probleem.
In het geïntroduceerde voorbeeld, de zoektocht naar een uitdrukking voor ruimtelijke relaties, stelt Gibbs echter dat alleen de functies $S\alpha\beta$ en $V\alpha\beta$ belangrijk zijn. Een tussenstap door middel van het quaternionenproduct is overbodig vindt Gibbs. Zelf gebruikt hij deze tussenstap namelijk niet. Vervolgens zegt hij:

> "In a system of vector analysis, in which the principle of development is not thus predetermined, it seems to me contrary to good method that the more simple and elementary notions should be defined by means of those which are less so."[6, p.157]

Gibbs buit hier dus het voorbeeld van de ruimtelijke relaties uit door deze te generaliseren naar andere relaties, aangeduid door 'simply and elementary notions'. Een in de fysica geïnteresseerde lezer denkt hierbij gelijk aan andere simpele natuurkundige relaties. Voorbeelden hiervan zijn de snelheid van een object ten opzichte van een ander object of de kracht van een object, werkend op een ander object. Ongeacht de vraag of het gerechtvaardigd is dat Gibbs dit ene voorbeeld zo generaliseert, krijgt de lezer wel het gevoel dat de notie van een quaternion van geen belang is in een methode die leidt naar het uitdrukken van simpele en elementaire fysische relaties.

De fysica rond negentienhonderd heeft stormachtige ontwikkelingen doorgemaakt. Niet alleen zijn er nieuwe ontdekkingen gedaan, deze ontdekkingen hadden een vernieuwde blik op de fysica nodig om begrepen te worden. Hierbij kan gedacht worden aan de ontwikkelingen in de elektrodynamica, de ontdekking van radioactiviteit, maar ook de relativiteitstheorie, ontdekt door Einstein rond 1905. Wat een fysicus nodig had, leek dan ook een taal waarin de nieuwe ontwikkelingen zo simpel mogelijk uitgedrukt kunnen worden, aangezien de interpretatie van de ontdekkingen zelf al enig denken buiten de kaders vereiste. Een taal die zelf ook niet makkelijk te interpreteren is, lijkt het laatste waar een fysicus in deze tijd naar op zoek zal zijn geweest.
Wanneer we deze fysische ontwikkelingen uit de tijd van Gibbs in ons achterhoofd houden, krijgen de woorden 'in which the principle of development is not thus predetermined' een dubbele betekenis. Ze zijn niet alleen op de vectoranalyse van toepassing, maar ook op de fysica uit die tijd. Onderzoekers binnen de fysica worden herhaaldelijk voor onvoorziene ontwikkelingen gesteld. Een 'taal' die zich hieraan aan kan passen, lijkt één van de eerste behoeften voor deze onderzoekers.
Zonder dit expliciet te benoemen speelt Gibbs hier uitstekend in op de behoeften

uit de fysica. Dit doet hij door in al zijn argumenten de eenvoud en flexibiliteit van zijn eigen vectoranalyse te tonen en te wijzen op de moeilijkheid en starheid van quaternionen. Argumenten die op het eerste gezicht alleen van meetkundige of puur mathematische aard zijn, maar die wel de eenvoud van de vectoranalyse en complexiteit van quaternionen benadrukken zullen voor een fysicus dus zeker zwaar gewogen hebben in zijn keuze voor één van deze twee 'talen'.

Gibbs breidt dit genre van argumenten nog verder uit in zijn beschouwing over rotatie en de deloperator.
Hij vergelijkt eerst de rotatie van een vector door conjugatie met een quaternion met de rotatie van een vector door toepassing van een lineaire vector functie. Op het eerste gezicht is Gibbs niet negatief tegenover de notatie $q(\ )q^{-1}$. Toepassing van een rotatie op een vector wordt hiermee bewerkstelligd door een vector binnen de haakjes te plaatsen. Deze notatie is bondig en alle rotaties kunnen worden bereikt. Gibbs vindt het dan ook niet nodig hier kritiek op te uiten.
Gibbs zegt in het vervolg wel dat rotaties ook gepresenteerd kunnen worden door lineaire vector functies. Deze methode laat volgens hem geen belangrijke eigenschappen achterwege en gebruikt hij zelf in zijn vectoranalyse.
In tegenstelling tot zijn voorgaande vergelijkingen van begrippen uit de twee algebra's, stelt hij niet direct dat zijn notatie beter is. Hij merkt alleen het volgende op:

> "But since nothing is more simple than the definition of a linear vector function, while the definition of a quaternion is far from simple, and since in any case linear vector functions must be treated in a system of vector analysis, capacity for representing rotations does not seem to me sufficient to entitle the quaternion to a place among the fundamental and necessary notions of a vector analysis."[6, p.157]

Aangezien een algemene lineaire vectorfunctie zo belangrijk is dat het in elke vectoranalyse behandeld moet worden, kun je een rotatie toch beter met behulp van een lineaire vector functie uitdrukken. Niet omdat deze methode mooier, sneller of andere voordelen heeft, maar omdat een lineaire vector functie sowieso behandeld moet worden in een goede vectoranalyse. De notie van een quaternion is tot dusver echter niet van belang geweest en een quaternion is daarnaast ook nog eens een moeilijk begrip. Het is dus extra en overbodig werk om speciaal voor het uitdrukken van rotaties de quaternionen te introduceren.

Voor een fysicus is een rotatie net zo'n elementair begrip als een plaatsbepaling van een object. Denk bijvoorbeeld aan het belang van hoeksnelheden binnen de mechanica of electrodynamica. Wanneer een rotatie dus echt beter beschreven zou worden met behulp van een quaternion, zou een fysicus het er misschien wel voor over hebben om toch het quaternion te introduceren. Dit kost dan wat extra werk in het begin, maar levert later gemak op. Achter Gibbs redenatie voor de keuze van zijn lineaire functie mag dus een vraagteken worden gezet. Of een fysicus dit opgemerkt heeft nadat hij dit artikel voor het eerst heeft doorgelezen is echter niet zeker. Het voordeel van een quaternion wordt goed weggemoffeld en een lezer plaatst de beschouwing over de rotatie snel in het rijtje met stellingen waarin Gibbs wel goed onderbouwd heeft dat zijn notatie gebruiksvriendelijker was dan de notatie binnen de quaternionen.

Zijn beschouwing over de deloperator begint Gibbs met het volgende citaat:

> "The quantities written $S\nabla\omega$ and $V\nabla\omega$, where ω denotes a vector having values which vary in space, are of fundamental importance in physics. In quaternions these are derived from the quaternion $\nabla\omega$ by selecting respectively the scalar or the vector part. But the most simple and elementary definitions of $S\nabla\omega$ and $V\nabla\omega$ are quite independent of the conception of a quaternion, and the quaternion $\nabla\omega$ is scarcely used except in combination with the symbols S and V, expressed or implied."[6, p.158]

Gibbs benadrukt in dit citaat eerst het belang van de grootheden $S\nabla\omega$ en $V\nabla\omega$ in de fysica. Vervolgens bekritiseert hij weer de omweg van een quaternion om tot deze begrippen te komen. Deze omweg is ten eerste overbodig, aangezien de notie van een quaternion niet van belang is in deze begrippen. Ten tweede wordt het quaternion nauwelijks gebruikt. Het wordt alleen maar gebruikt in combinatie met de symbolen S en V.

Het voorbeeld van de deloperator is in dit artikel het laatste voorbeeld waarin het verschil wordt uitgelicht tussen begrippen die de notie van een quaternion vergen en vergelijkbare begrippen die deze notie niet gebruiken. Samen met de beschouwing over een rotatie wijst de beschouwing over de deloperater nogmaals op de overbodige complexiteit van het quaternion.

De volgende vraag kan tijdens het lezen van bovenstaand gedeelte uit dit artikel van Gibbs bij een kritische lezer bovenkomen: Is er echt geen enkele functie en/of grootheid waarin het gebruik van een quaternion verkozen moet worden in plaats van een notatie waarin dit begrip vermeden wordt? Gibbs wil niet alleen uit de gegeven voorbeelden concluderen dat het antwoord hierop een ontkenning is en zegt daarom het volgende:

> "There are a few formulae in which there is a trifling gain in compactness in the use of the quaternion, but the gain is very trifling so far as I have observed, and generally, it seems to me, at the expense of perspicuity."[6, p.158]

Aangezien Gibbs een aantal zeer fundamentele begrippen uitgediept heeft, is het logisch dat veel lezers vertrouwen op dit citaat van Gibbs en deze vraag hiermee voldoende beantwoord weten.
Na de toevoeging van deze kanttekening, heeft Gibbs voldoende vertrouwen om het tegenover elkaar plaatsen van vergelijkbare begrippen binnen zijn eigen algebra en de quaternionen met de volgende conclusie te besluiten:

> "These considerations are sufficient, I think, to show that the position of the quaternionist is not the only one from which the subject of vector analysis may be viewed, and a method which would be monstrous from one point of view, may be normal and inevitable from another."[6, p.158]

Vooral de laatste woorden 'inevitable from another', onvermijdelijk vanuit een ander gezichtspunt, zullen een fysicus hebben aangesproken. Deze woorden zijn in eerste instantie waarschijnlijk een weerwoord aan het adres van Tait geweest, die de vectoranalyse van Gibbs uitmaakte voor een hermafrodiet monster in zijn *Treatise*. Daarnaast heeft Gibbs in dit artikel duidelijk naar voren gebracht dat zijn vectoranalyse zelfs beter voorziet in de behoeften van een fysicus dan de quaternionen. Met de woordkeuze van dit weerwoord geeft Gibbs de fysicus het laatste zetje: De keuze voor de vectoranalyse van Gibbs is *onvermijdelijk*.

Aan het eind van zijn artikel gaat Gibbs pas in op het verschil in notatie tussen de twee algebra's. Dit is het onderwerp waar Tait eigenlijk alleen openlijk kritiek op had in zijn voorwoord. Gibbs geeft hier echter maar een bescheiden hoeveelheid aandacht aan.
Aan de hand van de begrippen $-S\alpha\beta$ en $V\alpha\beta$ beargumenteert hij dat de notatie binnen de quaternionen vaak voor veel verwarring zorgt. Met enkele voorbeelden probeert hij dit te illustreren. Zo komt een symmetrie eigenschap van de scalar kwantiteit $\sigma.\phi.\rho = \sigma.(a\lambda + \beta\mu + \gamma\nu).\rho$ (ongeacht wat dit product precies voorstelt) niet tot uiting in de notatie die de quaternionisten hier aan geven: $S\sigma\phi\rho = S\sigma(\alpha S\lambda + \beta S\mu + \gamma S\nu)\rho$.
Daarnaast beschouwt Gibbs het begrip $\sigma\phi$. Dit begrip representeert een vector. In de quaternionenalgebra wordt hetzelfde begrip gedefinieerd door $S\sigma\phi$. Gibbs vindt deze notatie nogal dubieus, omdat we de operatie S direct linken aan de selectie van een scalar en dus verwachten dat dit begrip een scalar representeert.

Gibbs stelt in deze en andere voorbeelden de verwarring in de notatie van de quaternionen aan de kaak. Hier tegenover plaatst hij dan telkens zijn eigen notatie die zich volgens hem wel makkelijk laat interpreteren. Ook hier spreekt Gibbs op het eerste gezicht niet direct een fysicus aan. Maar voor elke fysicus, die moeilijk te interpreteren resultaten wil overbrengen aan studenten en collega's, is dit toch een zwaarwegend argument in de keuze voor een passende wiskundige 'taal'.

Ondanks de vermeende intentie alleen de kritiek van Tait te pareren hebben we hier een duidelijk betoog doorgenomen met als doel, hoewel verkapt, om de vectoranalyse van Gibbs te verkiezen boven quaternionen. Gegeven de fysische aard van de gebruikte argumenten, zou een aanhef als 'beste fysicus' niet eens misstaan boven zijn artikel. Toch is het naar mijn mening slim geweest dat Gibbs de schijn opwekt alleen de kritiek van Tait te willen pareren. De argumenten die in voordeel zijn voor zijn vectoranalyse worden daardoor waarschijnlijk minder scherp getoetst, want een fysicus krijgt niet het idee te *moeten* kiezen voor de vectoranalyse van Gibbs. Dit is gunstig voor Gibbs, want sommige argumenten bleken niet waterdicht te zijn. De lezer krijgt meer het idee dat Gibbs onterecht is bekritiseerd en dat Gibbs dit heeft willen rechtzetten. Is de lezer echter een fysicus en staat hij 'toevallig' nog wel voor de keuze om één van de twee vectoralgebra's te gebruiken dan zullen de vele fysische argumenten van Gibbs hem toch onbewust leiden naar de vectoranalyse van Gibbs. Het artikel werd geproduceerd in 1891, de tijd waarin het concept van een vectoranalyse ontzettend in de belangstelling stond. Erg veel 'toeval' zal er dus niet in het spel geweest zijn, wanneer fysici hun keuzen maakten na het lezen van dit artikel.

5.3 Taits reactie op Gibbs: *The Rôle of Quaternions in the Algebra of Vectors*

Na de uitgebreide reactie van Gibbs op het voorwoord van Tait was de discussie niet gesloten. Sterker nog, deze twee artikelen zijn de aanleiding geweest tot een groter debat. De groep deelnemers aan het debat bleef niet beperkt tot Tait en Gibbs. We zullen hun bijdragen later bespreken. Na het voorwoord van Tait en de reactie van Gibbs schrijven Tait en Gibbs gezamenlijk nog drie brieven.

De belangrijkste argumenten ter verdediging van hun systemen zijn al naar voren gekomen in het voorwoord van Tait [25] en de eerste reactie van Gibbs [4]. Opvallend was dat de meeste argumenten fysisch van aard waren. In de komende drie paragrafen wil ik nieuwe argumenten die bovendien fysisch van aard zijn bespreken uit de laatste drie artikelen van Tait en Gibbs. Hiernaast wil ik ook de argumenten bespreken die herhaald worden. We zullen zien dat de herhaalde argumenten meestal fysische argumenten zijn.

Op 30 april 1891, 28 dagen na de publicatie van het artikel van Gibbs[4], publiceert Tait zijn antwoord op Gibbs. De titel komt bijna overeen met de titel van Gibbs artikel en luidt: *The Rôle of Quaternions in the Algebra of Vectors*[26]. Volgens Crowe [2, p.186] valt Tait in dit artikel vooral de dyade van Gibbs aan. Een dyade is een product van twee vectoren. De componenten van de grootheid die gedefinieerd wordt uit dit product hebben zowel een grootte als *twee* richtingen. De dyade komt sterk overeen met een tweederangs tensor[3]. De kritiek van Tait op dit product luidt als volgt:

> "PROF. GIBBS seems to forget that his pamphlet was specially announced as Arranged for the use of Students in Physics. When I wrote the remark which has called for this recent letter, I was discussing the reasons for the comparatively slow progress of Quaternion Analysis in recent times. And, as it is precisely to students of Physics that I think we must look for such progress, anything which is calculated to divert their attention from Quaternions, or to confuse them in their use of Quaternion symbols, must be regarded as tending to retard the progress of the method. The Vector-Analysis supported by Prof. Gibbs involves a serious departure from the usage of ordinary Algebra, in as much as $\alpha\beta$ is not regarded as a product, but merely as a "kind of product." This is specially likely to confuse an ordinary student, and is undoubtedly artificial in the highest degree:— while one of the chief recommendations of Quaternions is their naturalness, i.e. the utter absence of artifice in their fundamental rules."[26, p.608]

Het quaternionenproduct is vroeger, zo stelt Crowe[2, p.186], om dezelfde reden waarmee Tait nu kritiek uit op de vectoranalyse van Gibbs, bekritiseerd. De blik op de algebra was in die tijd nog niet breed genoeg om het quaternionenproduct te accepteren. Men had grote moeite met de non-commutativiteit van het quaternionenproduct. Pas later zag men in dat het verlies van commutativiteit geen ernstige gevolgen had voor de algebra en werd het geaccepteerd. Crowe vindt het daarom nu een beetje bekrompen van Tait om kritiek te hebben op

een verdere uitbreiding van de betekenis van een product.
Naar mijn mening is de kritiek van Tait op dit product echter niet zo verrassend als deze aan Crowe doet lijken. Het is niet zo raar dat Tait een element uit de vectoranalyse van Gibbs wil karakteriseren als 'undoubtedly artificial in the highest degree', ongeacht of dit element nu een product is of niet. Gibbs onderbouwde in het hierboven besproken artikel namelijk de overbodigheid van het quaternion en het quaternionenproduct. Hij stelde dat deze begrippen moeilijk fysisch te interpreteren zijn en daarnaast overbodig zijn in de afleiding van fundamentele principes. Dit waren negatieve eigenschappen voor een 'taal' die de fysica nodig heeft om fysisch onderzoek te beschrijven. En met deze argumentatie trok Gibbs zijn doelgroep, die ook de doelgroep van Tait is, namelijk de natuurkundestudenten, dichter naar zich toe. Tait pakt Gibbs hier dus een beetje terug door de dyade af te schilderen als 'artifical in the highest degree' en vooral te benadrukken dat dit erg verwarrend is voor een student. Vervolgens benadrukt hij juist de natuurlijkheid van de quaternionen en zo probeert hij zijn doelgroep weer terug te winnen.
De terugkeer van dit onderwerp geeft het belang aan dat de beide wetenschappers blijkbaar hechten aan het natuurlijke aanpassingsvermogen van hun algebra's aan de fysica, zoals besproken in paragraaf 5.2. De studenten in de fysica zijn voor beide wetenschappers de groep die zij met dit onderwerp kunnen overtuigen te kiezen voor hun vectoralgebra's.

Het tweede onderwerp uit dit artikel van Tait dat Crowe ook bespreekt, is de kritiek van Tait op een bewering van Gibbs over de ontoepasbaarheid van quaternionen in een ruimte met meer dan drie dimensies. In de beschouwing over het artikel van Gibbs in de voorgaande paragraaf hebben we deze bewering besproken en ons afgevraagd of het echt noodzakelijk is dat begrippen met een fysische lading te generaliseren zijn naar een ruimte met meer dan drie dimensies. Deze bewering heeft bij Tait ongeveer dezelfde reactie opgeroepen, hij is alleen nog stelliger in zijn antwoord:

> "It is singular that one of Prof. Gibbs' objections to Quaternions should be precisely what I have always considered (after perfect inartificiality) their chief merit:– viz. that they are 'uniquely adapted to Euclidian space, and therefore specially useful in some of the most important branches of physical science. 'What have students of physics, as such, to do with space of more than three dimensions?"[26, p.608]

Het feit dat de quaternionen alleen maar goed toepasbaar zijn in drie dimensies is volgens Tait dus helemaal geen minpunt. Studenten in de fysica hebben namelijk de vectoralgebra nodig die het best toepasbaar is in drie dimensies en hebben niets aan een eventuele toepasbaarheid van deze algebra in meer dan drie dimensies.

We zien dat Tait en Gibbs in mening verschillen over het aantal dimensies dat van belang is in de fysica. Beslaat de fysica vooral ruimten met maximaal drie dimensies of leeft ze ook in ruimten met meerdere dimensies? Een moderne natuurkundige weet dat de fysica vergelijkingen naar voren brengt in ruimten met meer dan drie dimensies. De fysica was echter nog niet ver ontwikkeld in gebieden zoals de relativiteitstheorie (4 dimensies), quantummechanica of statistische fysica (oneindig veel dimensies.) De vraag is nu echter in hoeverre een fysicus uit 1890 in zijn onderzoek meerdere dimensies nodig had.

Gibbs geeft in zijn artikel zelf geen enkel fysisch voorbeeld waarin een vectoranalyse van meer dan drie dimensies nodig is. Gibbs was een breed geschoolde fysicus. Het zou kunnen dat Gibbs zo'n voorbeeld niet bij de hand had, of dat een eventueel voorbeeld wat Gibbs had kunnen gebruiken niet overtuigend genoeg was om het te noemen. De vraag "What have students of physics, as such, to do with space of more than three dimensions?" geeft in ieder geval aan dat de fysica rond 1890 nog niet veel gebruik maakte van meerdere dimensies.

Het is wel opvallend dat Gibbs toch veel waarde hecht aan de mogelijkheid tot uitbreiding van een vectoranalyse naar meer dimensies, ondanks dat deze mogelijkheid voor de natuurkunde niet noodzakelijk leek. Gibbs verwijst ook niet naar eigen resultaten waarin het noodzakelijk is geweest zijn vectoranalyse naar meerdere dimensies uit te breiden. Dit getuigt van een open geest ten opzichte van de toekomst en zijn standpunt zou later gerechtvaardigd worden. Deze focus op flexibiliteit en aanpassingsvermogen aan onvoorziene omstandigheden zal na 1890 wel in het voordeel gespeeld hebben voor Gibbs door het natuurkundige onderzoek dat toen ontstond in *nieuwe* gebieden. In 1892 werkte Lorentz bijvoorbeeld al aan zijn theorie van de ether die de basis is geweest voor de postulaten van de relativiteitstheorie die Einstein publiceerde in 1905.

Tait sluit zijn brief af met een vergelijking in compactheid van de uitdrukkingen in de twee sytemen. Tait zegt dat de quaternionen hierin een kleine voordeel hebben. het quaternionenproduct is namelijk associatief en het product van Gibbs niet. (Bij Gibbs geldt bijvoorbeeld dat $i \times (j \times j) = 0 \neq (i \times j) \times j = -i$.) [2, p.187] Blijkbaar vindt Tait de rest van hun algebra's vergelijkbaar wat betreft compactheid.
Compactheid is van belang voor een heldere algebra en in de fysica is compactheid van belang voor de interpreteerbaarheid van fysische resultaten, zoals besproken in het artikel van Gibbs. Ook op compactheid, naast de dimensie kwestie, wordt door beide wetenschappers dus extra nadruk gelegd.

We zien dat in dit derde artikel, de reactie van Tait op Gibbs, niet veel nieuwe argumenten voorkomen. Er wordt wel gereageerd op eerder besproken onderwerpen. Deze herhaling duidt erop dat de schrijvers deze onderwerpen extra belangrijk vinden. Omdat we eerder al beargumenteerd hebben dat zowel Tait als Gibbs door middel van hun artikelen wetenschappers probeerden te overtuigen hun vectoralgebra over te nemen, zijn dit blijkbaar onderwerpen die volgens hen daartoe bijdragen.

5.4 Gibbs tweede reactie op Tait: *Quaternions and the Ausdehnungslehre*

Gibbs publiceert vier weken na Taits artikel zijn tweede artikel in dit debat met de titel *Quaternions and the ausdehnungslehre*[5]. Eigenlijk is dit een tweede reactie op de *Treatise* van Tait en niet op het tweede artikel van Tait. In dit geval gaat Gibbs echter niet in op de kritiek die Tait tegen Gibbs uitte, maar gaat hij in op de negatieve beweringen van Tait ten opzichte van Grassmans *Ausdehnungslehre*. Dit artikel lijkt niet zo relevant in het debat over de twee algebra's, maar Crowe verwoordt mooi waarom dit artikel juist wel relevant is:

> "Thus though Gibbs dealt primarily with priority questions, he was well aware that much more was at stake: by correcting Tait's excessive priority statements he added prestige to Grassmann, and in comparing Grassmann's ideas to Hamiltons (overtly in regard to historical questions) he put forth arguments for the superiority of Grassmann's methods. And to praise and to recommend Grassmann's system was of course to praise and to recommend his own system, for he discussed primarily those aspects of Grassmann's system that were als to be found in the Gibbs-Heaviside system." [2, p.187]

De argumenten uit dit artikel die prestige geven aan Grassmanns systeem zijn voor ons dus interessant, want dit zijn indirect argumenten in het voordeel van het Gibbs-Heaviside systeem. De 'priority statements', de delen uit het artikel die de vraag behandelen wie, Grassmann of Hamilton, een begrip binnen de vectoranalyse eerder uitgewerkt heeft, zal ik niet uitgebreid behandelen. Ik zal hieruit alleen delen behandelen die ook onderbouwen dat het systeem van Grassmann daadwerkelijk beter is. Dit is naar mijn mening het meest relevant in mijn beschouwing over de opkomst en de aftakeling van het quaternionensysteem.

In zijn vorige artikel[4] probeerde Gibbs aan te tonen dat de functies $S\alpha\beta$ en $V\alpha\beta$ heel goed gescheiden kunnen worden van het quaternionenproduct $\alpha\beta$. Hij beargumenteerde dit standpunt door te laten zien hoe je deze functies los van het quaternionenproduct kunt gebruiken en dat de berekening van het quaternionenproduct $\alpha\beta$ alleen maar een omweg is. In dit artikel wil Gibbs nog een stapje verder gaan in de onderbouwing van dit standpunt. Hij wil kijken in welke mate schrijvers, die in de praktijk het quaternionensysteem in artikelen gebruiken, gebruik maken van het quaternionenproduct.
Gibbs legt uit hoe hij dit wil toetsen. Hij wil geen voorbeelden gebruiken uit de boeken die als functie hebben de lezer bekend te maken met de inhoud en de toepassingen van de quaternionen. Deze boeken zijn volgens Gibbs geen betrouwbare bron, omdat de voorbeelden in deze boeken gekozen zijn ter illustratie van de quaternionen. Gibbs vindt elk artikel over meetkundige of fysische onderwerpen, waarin het de schrijver vrij staat om het quaternionensysteem te gebruiken of het quaternionensysteem niet te gebruiken, wel zinvol om te beschouwen. Gibbs kiest een opvallend boek om te analyseren. Namelijk de *Treatise* van zijn directe tegenstander Tait, de ultieme voorstander van de quaternionen. Hij gaat kijken in hoeverre Tait, die het quaternionenproduct en het begrip quaternion verdedigt, nou eigenlijk zelf van deze begrippen gebruikt maakt in zijn toepassingen.
Gibbs is erg duidelijk in zijn conclusie. Hij vindt nauwelijks gevallen waarbij het idee van een quaternion een essentieel element vormt in de betekenis van de natuurkundige en meetkundige relaties. In de meeste gevallen is het voordeel wat verkregen wordt door het gebruik van quaternionen zeer twijfelachtig of onbeduidend. In een paar gevallen zag Gibbs wel een wezenlijk voordeel dat werd

verkregen door het gebruik van quaternionen. Dat deze gevallen naar Gibbs mening echter uitzonderlijk zijn, drukt Gibbs mooi uit in het volgende citaat:

> "If a more extended and careful inquiry should show that they are ten times as numerous as I have found them, they would still be exceptional."[6, p.163]

In dit artikel onderbouwt Gibbs dus nog radicaler zijn bewering dat de functies $S\alpha\beta$ en $V\alpha\beta$ niet per se het begrip van het quaternionenproduct vergen. Hij stelt dat de grootste voorstander van het quaternionenproduct, Peter G. Tait, in zijn (fysische) toepassingen zelf nauwelijks de notie van het quaternionproduct gebruikt! Doordat Gibbs aangeeft dat Tait en de quaternionisten de noties waar zij het meest voor vechten amper gebruiken in hun toepassingen, komen de quaternionisten een stuk minder geloofwaardig over in hun verdediging. Gibbs slaat met deze argumentatie dus hard toe tegen de quaternionisten.

Aan de (fysische) toepassingen van het quaternionensysteem en het Gibbs-Heaviside systeem hechten respectievelijk de quaternionisten en Gibbs veel waarde. We hebben gezien dat dit onderwerp steeds terugkeert in de artikelen en ze zal nog vaker terugkeren in latere artikelen.

In zijn artikel gaat Gibbs verder nog in op de puntalgebra van Grassmann en zijn uitgebreide scala aan multiplicaties. Hij benadrukt de kracht van deze delen uit Grassmanns leer en vooral ook het feit dat deze onderwerpen binnen de quaternionenleer ontbreken. Gibbs zegt bijvoorbeeld over de puntalgebra het volgende: "To the physicist an algebra of points is by no means so indispensable an instrument as an algebra of vectors"[6, p.165]. Een echte onderbouwing van dit standpunt laat Gibbs achterwege. Hij laat wel de meetkundige voordelen zien. Aangezien dit onderwerp verder niet meer aangesneden wordt in het debat, ook niet meer door Gibbs, ben ik van mening dat dit de lezer niet sterk beïnvloed zal hebben in zijn keuze voor één van de twee vectoranalyses. Ik zal hier dan ook niet verder op in gaan.

5.5 Taits reactie op *Quaternions and the Ausdehungslehre*

Tait reageerde één week later op het artikel van Gibbs in een artikel met dezelfde titel[26]. Men kan wel zien dat hij voor de inhoud van dit artikel ook niet langer dan een week nodig heeft gehad, zegt Crowe:

> "The quaternion system was at that time far better known, and Tait must have felt little motivation for giving a detailed, tactful, and comprehensive rejoinder. Tait had long experience in defending quaternions, but never on such grounds as these"[2, p.189]

Of Tait de noodzaak niet gezien heeft van een volledig antwoord of de moed niet heeft gehad, is voor mij niet zo duidelijk. Feit blijft dat Gibbs in zijn brieven het quaternionensysteem hevig heeft laten schudden en ik geloof dat Tait dit zeker gevoeld moet hebben.

5.6 Bijdragen aan het debat van andere wetenschappers

Met Taits brief kwam een einde aan de discussie tussen Tait en Gibbs in 1891. Het debat was echter, zoals in de inleiding al besproken, nog lang niet over. Vele andere wetenschappers mengden zich vanaf dit moment in het debat. Onder hen waren zowel mathematici als fysici. De meeste deelnemers hadden daarnaast een band met de mathematische fysica.
Michael J.Crowe bespreekt in zijn *History of Vector Analysis* de hele geschiedenis die voorafgaat aan de moderne vectoralgebra. Het debat neemt in zijn boek een prominente plaats in en hij behandelt bijna alle brieven die geschreven zijn. De belangrijkste wetenschappers die Crowe noemt met betrekking tot het debat zijn Peter.G. Tait, J.Williard Gibbs, Cargil Gilston Knott, Alexander Macfarlane, Alexander McAuley, Arthur Cayley en natuurlijk Oliver Heaviside. Van de laatste vijf wetenschappers zal ik in deze en de volgende paragraaf de belangrijkste bijdragen noemen. Ik baseer me voornamelijk op de beschrijving die Crowe van bovenstaande wetenschappers geeft.

5.6.1 Alexander McAulay, een enthousiaste quaternionist

Een van de eerste wetenschappers die zich mengde in het debat was Alexander McAulay. Hij schreef een boek met de titel *Quaternions as a practical Instrument of Physical Research*[20]. In 1892, het jaar van publicatie, was hij tutor en leraar in de wiskunde en fysica op het Ormond College in Melbourne. De belangrijkste bijdrage voor het debat in dit artikel was zijn uitleg voor de langzame ontwikkeling van de quaternionen. Fysici stopten hun studie van quaternionen voordat zij de kracht van de methoden leerden kennen, volgens McAulay. McAuley wees naar Maxwell als schuldige:

> "Maxwell, I fear, is responsible to a large extent for the discredit into which quaternions have fallen among physiscists.[20, p.478]"

McAulay stelde dat de fysica een snelle ontwikkeling zou doormaken als quaternionen serieus bestudeerd zouden worden. Hij sprak in dit artikel niet over de eventuele mogelijkheid om hiervoor het Gibbs-Heaviside systeem te gebruiken. Wel geeft hij een aantal toepassingen van quaternionen weer, waarmee hij volgens Crowe zijn punt probeerde te illustreren.

Naarmate het debat verder vorderde publiceerde McAulay meerdere artikelen. Het artikel dat volgde op het bovengenoemde artikel had de titel *Quaternions*[19]. In *Quaternions* benadrukte hij het belang om vectormethoden bekender te maken. In dit artikel richtte hij zich direct op Gibbs en Heaviside. Gibbs en Heaviside moesten op dit moment niet verder gaan met het verdedigen van hun vectoranalyse. De handen moesten juist ineengeslagen worden om ontwikkelingen te bewerkstelligen. Gerechtigheid zou later komen. Deze poging van McAulay om het debat te sussen zou echter niet helpen.

Een opmerkelijke bijdrage van Alexander McAulay was zijn artikel *On the Mathematical Theory of Electromagnetism*[21]. In dit artikel presenteert McAulay bijna precies dezelfde resultaten als Heaviside presenteerde in het artikel *On* *the Forces, Stresses, and Fluxes of Energy in the Electromagnetic Field*[10]. Dit artikel van Heaviside heeft veel invloed gehad op de acceptatie van het Gibbs-Heaviside systeem, omdat het vol stond met belangrijke fysische resultaten. Het vergelijkende artikel van McAulay maakte excessief gebruik van quaternionen en was bijna twee maal zo groot als Heavisides artikel. McAulay liet met dit artikel in ieder geval zien dat de fysische resultaten ook in de quaternionenalgebra uitgedrukt konden worden. McAulay's artikel heeft de impact van Heavisides artikel een beetje uitgebalanceerd, hoewel de meeste eer toch naar Heaviside ging, omdat hij ook de ontdekker was van de beschreven fenomenen in de artikelen.

In 1893 publiceerde McAulay nog een klein boek met de titel *Utility of Quaternions in Physics*[22], waarvan vooral het voorwoord een rol in het debat speelde. De inhoud van het boek richtte zich op een aantal zeer technische toepassingen van quaternionen in de theorie van elastische vaste stoffen, elektrische theorie, hydrodynamica en de vortexatoom theorie. In zijn voorwoord richtte McAulay zich vooral op de tekortkomingen van de universiteit van Cambridge met betrekking tot de quaternionen. Er was volgens hem niet genoeg aandacht in de colleges voor dit onderwerp en studenten waren zelf ook niet gemotiveerd om quaternionen te onderzoeken gezien de geringe hoeveelheid kennis die van quaternionen werd vereist in het tripos. Het tripos was in die tijd het afsluitende examen van de studiefase die we nu kunnen vergelijken met de bachelorfase. Al zijn argumenten ten voordele van de quaternionen en zijn kritiek ten opzichte van de tegenstanders van quaternionen was omgeven door een flinke dosis humor en cynisme. Dit leverde veel controversiteit op en heeft misschien wel zijn invloed beperkt. Zelfs Tait, die aan de ene kent McAulay beschreef als 'a man of genuine power and originality'[26] wees meerdere malen op het overenthousiasme van McAulay. Crowe verwoordt dit mooi:

> "Tait passionately attacked McAulay's tendency to write passionately."[2, p.197]

Toch moeten zijn fysische en technische toepassingen van de quaternionen indruk gemaakt hebben op het publiek, want zelfs zijn tegenstanders praatten er onderling over. Zo schrijft Heaviside over McAulay in 1894 in een brief aan Gibbs:

> "He seems to be a very clever fellow, and he knows it and shows that he knows it a little too much sometimes."[2, p.197]

5.6.2 Alexander Macfarlane, een combinateur van het beste

Een van de actiefste deelnemers aan het debat was de fysicus Alexander Macfarlane. Zijn eerste bijdrage aan het debat was een artikel met de titel *Principles of Algebra of Physics*[14]. Macfarlane was een student van Tait geweest en ten tijde van publicatie gaf hij les aan de universiteit van Texas. Hij was ook secretaris van de fysica-afdeling van de 'American Association for the Advancement of Science'. In zijn artikel bevestigde hij, net als Tait, dat het quaternionensysteem op de goede weg was. Hij gaf echter ook fikse kritiek op het quaternionensysteem. MacFarlane had vooral kritiek op de 'dubbele mening' die de symbolen i, j en k volgens hem hadden. Het product ii kon geïnterpreteerd worden als een rotatie van 180 graden, wanneer dit product als operator toegepast werd op een vector. De operator ii stuurde een vector a naar $-a$. Tegelijkertijd kon i ook zelf beschouwd worden als een vector. In dit geval vond Macfarlane het niet handig dat het product ii negatief was. Macfarlane zag liever een positief product $(ai)(bi) = +ab$, zodat het product in harmonie was met een grootheid als de kinetische energie die altijd positief gedefinieerd is, namelijk $\frac{1}{2}mv^2$.

Alexander Macfarlane verwoordde zijn idealen zelf op de volgende manier:

> "What is sought for is an algebra which will apply directly to physical quantities, will include and unify the several branches of analysis, and when specialized will become ordinary algebra."[14, p.65]

Hiertoe construeerde Macfarlane zelf een nieuw vectorysteem dat meer overeenkomsten kreeg met het Gibbs-Heaviside systeem. Macfarlane introduceerde bijvoorbeeld in zijn systeem één volledig product tussen twee vectoren, wat vergelijkbaar was met het quaternionenproduct. Het scalargedeelte van zijn product was echter positief, wat vergelijkbaar is met het scalarproduct uit het Gibbs-Heaviside systeem. Het systeem van Macfarlane werd wel bekend, maar nooit populair of veel gebruikt. Het belangrijkste gevolg van de publicatie van zijn systeem was de bijdrage die Macfarlane hiermee leverde aan het debat.

Macfarlane nam zijn positie in het Gibbs-Tait debat tussen beide partijen in, het gebied waar hij ook zijn eigen vectoranalyse positioneerde. Hij was vaak niet uitermate positief of negatief over aan de ene kant de quaternionisten en aan de andere kant de aanhangers van het Gibbs-Heaviside systeem. Macfarlane was bijvoorbeeld te spreken over de wijze waarop MacAulay de quaternionen verdedigde, maar plaatste ook een kritische en naar mijn mening terechte opmerking met betrekking tot de fysische resultaten van McAulay:"(They are a) translation into quaternion notation of known results."[15, p.388]

In latere artikelen probeerde Macfarlane zijn eigen vectorsysteem aan te prijzen. Hij had vaak kritiek op de quaternionen en legde dan uit welke gebreken in zijn systeem werden opgelost, zoals bijvoorbeeld het positieve product en de positief gedefinieerde[4] ∇^2. Omdat zijn systeem niet zo populair werd is het vooral de vraag in hoeverre deze artikelen de quaternionisten of de Gibbs-Heaviside aanhangers hebben geholpen. Crowe is hier duidelijk over:

> "The answer is clear; it indirectly but indisputably helped the latter (Gibbs-Heaviside), for the majority of Macfarlanes conclusions were in harmony with the Gibbs-Heaviside vector system."[2, p.207]

5.6.3 Cargill Gilston Knott, een wijze quaternionist

Een van de volgelingen van Tait, waar Tait vaak naar verwees, was Cargill Gilston Knott. Knott heeft aan het eind van Taits leven een biografie voor Tait geschreven. Knott was vanaf 1879 tot 1883 de assistent van Tait en daarna Professor in de fysica op de 'Imperial University' van Japan. Vanaf 1892 was Knott leraar in de toegepaste wiskunde aan de universiteit van Edinburgh. Afgezien van de biografie heeft Knott een van de belangrijkste artikelen gedurende het debat geschreven met de titel *Recent Innovations in Vector Theory*[12]. Het hele artikel werd voor het eerst gepubliceerd in de 'Proceedings of the royal society of Edinburgh' in 1892, maar daarna ook nog twee keer in 'Nature' in 1893. Dit geeft de invloed aan die dit artikel gehad heeft. Crowe beschrijft het belang van het artikel als volgt:

> "Knott's paper is important in that it was the first detailed criticism of the Gibbs-Heavisde system written by a quaternionist. It seems highly probable that it made impressive reading for the interested reader."[2, p.202]

In zijn artikel bekritiseerde Knott het werk van MacFarlane, Heaviside en Gibbs. Zoals alle quaternionisten was Knott overtuigd van het belang van het quaternionenproduct. Daarnaast stelde hij dat de deling van twee vectoren een fundamentele operatie was voor een vectoralgebra en dat deze deling niet gedefinieerd kon worden zonder quaternionen. Daarom vond Knott de quaternionen een fundamenteel onder van een vectoralgebra.[5]

Net als Tait vond Knott het onzinnig dat Gibbs benadrukte dat zijn vectorsysteem uitgebreid kon worden naar meerdere dimensies. De quaternionen hadden deze eigenschap niet. Om de belachelijkheid van Gibbs punt aan te tonen, maakte Knott de volgende vergelijking:

> "(It is like trying) to solve the Irish question by a discussion of the social life in Mars."[12, p.217]

Het was belangrijk dat Knott in zijn artikel aantoondde dat behoud van associativiteit van een vectorproduct direct tot gevolg had dat het kwadraat van i (en elke andere eenheidsvector) gelijk moest zijn aan -1. Hiermee toonde Knott ook aan dat $\nabla^2 u$ gelijk moest zijn aan $-\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)$ in plaats

---

[3]Zie [27, Appendix 4]. De dyade kan ook als volgt worden geïllustreerd: Vector α is een lineaire vectorfunctie van vector β als de volgende relaties gelden:

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \sigma_{xx}\beta_x + \sigma_{xy}\beta_y + \sigma_{xz}\beta_z\\ \alpha_y &= \sigma_{yx}\beta_x + \sigma_{yy}\beta_y + \sigma_{yz}\beta_z\\ \alpha_z &= \sigma_{zx}\beta_x + \sigma_{zy}\beta_y + \sigma_{zz}\beta_z\end{aligned}$$

In compacte vorm kan men ook schrijven

$$\alpha = \sigma \cdot \beta.$$

Hierbij geldt

$$\begin{aligned}\sigma = \quad & \sigma_{xx}\hat{x}\hat{x} + \sigma_{xy}\hat{x}\hat{y} + \sigma_{xz}\hat{x}\hat{z}\\ & \sigma_{yx}\hat{y}\hat{x} + \sigma_{yy}\hat{y}\hat{y} + \sigma_{yz}\hat{y}\hat{z}\\ & \sigma_{zx}\hat{z}\hat{x} + \sigma_{zy}\hat{z}\hat{y} + \sigma_{zz}\hat{z}\hat{z}\end{aligned}$$

Nu is σ uitgedrukt in dyades.

[4]Zie Wiskundige toelichting, paragraaf 7.3.3.

van $\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right)$. Op dit negatieve teken was veel kritiek geweest, maar associativiteit was juist een eigenschap waarmee het quaternionenproduct zich positief onderscheidde van het Gibbs-Heaviside systeem.

Knott was net als de andere quaternionisten onvermurwbaar in de stelling dat een algebra slechts één product kan bevatten. Hoewel Knott alle argumenten in zijn artikel goed had onderbouwd, stelde Knott gewoon dat over deze kwestie geen discussie mogelijk was.

De lineaire vectorfunctie[6] kende Knott volledig toe aan Hamilton en Tait:

> "In the course of the development of the theory of the dyadic, Gibbs, with his usual proneness to lexicon products, invents a few names (or new meanings to old ones), such as Idemfactor, Right Tensor, Tonic, Cyclotonic, Sheare, and so on. These are all special forms of the linear and vector function; and, exceptin possibly the names, Professor Gibbs does not seem to have contributed anything of value to Hamilton's beautiful theory. In no case, so far as I have been able to see, do his methods compare, for conciseness and clearness, at all favourably with Hamilton's and Tait's."[12, p.229]

De lineaire vector functie is een belangrijke functie in de fysica, omdat hij veel voorkomt in lineaire vergelijkingen. Veel relaties tussen grootheden in de fysica zijn te beschrijven met een lineaire vergelijking. De nadruk die Knott legt op de originaliteit van Hamilton met betrekking tot deze functie is dus van belang. Ook het aanstippen van de verwarring die Gibbs zaait met zijn verschillende namen is een slim argument. In het debat wordt namelijk door beide partijen veel waarde gehecht aan de duidelijkheid van een vectoranalyse.

Opvallend is dat Crowe aan het eind van zijn beschouwing over dit artikel van Knott de volgende karakterisatie geeft van Knotts schrijfstijl:

> "Though Knott had read Gibb's booklet with care and written with a certain Stoic control, nonethelss the bitterness that had charactereized the earlier papers by Tait and McAulay was not absent."[2, p.203]

Ook Knott had volgens Crowe dus geen open blik ten opzichte van Gibbs en Heaviside en kon, ondanks de vorderingen die zij in de natuurkunde hadden bereikt, hun vectorsysteem maar moeilijk waarderen door bittere gevoelens. Dezelfde bitterheid signaleerden we al eerder in de artikelen van Tait.

5.6.4 Arthur Cayley, een conservatieve deelnemer

Arthur Cayley was de enige deelnemer aan het debat die twijfelde of er wel een vectorsysteem boven het Cartesische coördinatensysteem verkozen moest worden. Tait, die Cayley eerder nog bedankte in het voorwoord van zijn Treatise

[5] Zie wiskundige toelichting, paragraaf 7.1.1.
[6] Zie wiskundige toelichting, paragraaf 7.3.1.

voor de ontvangen hulp, reageerde op dit standpunt van Cayley in twee artikelen. Deze artikelen en de artikelen van Cayley zal ik verder niet bespreken, omdat de meeste wetenschappers het nut van een vectorsysteem wel inzagen. De artikelen van Cayley zijn dus wel relevant in het debat, maar hebben niet veel bijgedragen aan de discussie tussen de quaternionsten en de vectoranalysten. De argumenten die Tait in deze artikelen ten voordele van zijn quaternionen naar voren bracht, waren binnen dit specifieke deel van het debat ook ten voordele van het Gibbs-Heaviside systeem.

5.7 In het bijzonder: Heaviside

Als laatste wil ik de bijdragen van Oliver Heaviside aan het debat bespreken. Zijn bijdragen zijn natuurlijk relevant, want wie zou de voordelen van het Gibbs-Heaviside systeem beter kunnen verwoorden dan een van de uitvinders zelf. De manier waarop Heaviside schreef bleef de mensen bij. Zijn schrijfstijl was luchtig en cynisch, maar tegelijk ook scherp en kritisch. Heaviside bracht zijn argumenten ter verdediging van zijn vectoralgebra vooral naar voren in zijn beschrijving over de totstandkoming van zijn vectoralgebra. Zijn argumenten waren pragmatisch, ze beantwoordden vragen over de noodzaak van het ontstaan van zijn algebra. De meeste argumenten van Heaviside zijn dan ook te vinden in zijn *electrical papers* en in zijn *Electromagnetic Theory*[11]. Omdat zijn meest relevante artikelen over elektriciteit herdrukt zijn in zijn boek *Electromagnetic Theory* en dit boek ten tijde van het debat (1893) werd gepubliceerd, zullen de hieronder uitgewerkte argumenten vaak terugverwijzen naar het boek *Electromagnetic Theory*. Het is van belang in het achterhoofd te houden dat dit boek niet alleen de eerste volledig uitgewerkte vectoranalyse van Heaviside bevatte, maar ook fysisch van grote waarde was. Heaviside borduurde voort op Maxwells ideeën over zowel de fysica als de toepassing van de wiskunde in de fysica. Hij vulde Maxwell hierin met succes aan en dit werd erkend door het wetenschappelijk publiek.

Heaviside zet in het voorwoord van zijn boek *Electromagnetic Theory* kort de inhoud van de hoofdstukken uiteen. Over hoofdstuk drie, waarin hij uitgebreid (173 pagina's) zijn vectoranalyse presenteert, zegt hij het volgende:

> "The third chapter, pp. 132 to 305, is devoted to vector algebra and analysis, in the form used by me in my former papers. As I have at the beginning and end of this chapter stated my views concerning the unsuitability of quaternions for physical requirements, and my preference for a vector algebra which is based upon the vector and is dominated by vectorial ideas instead of quaternionic, it is needless to say more on the point here. But I must add that it has been gratifying to discover among mathematical physicists a considerable and rapidly growing appreciation of vector algebra on these lines; and moreover, that students who had found quaternions quite hopeless could understand my vectors very well. Regarded as a treatise on vectorial algebra, this chapter has manifest shortcomings. It is only the first rudiments of the subject. Nevertheless, as the reader may see from the applications made, it is fully sufficient for ordinary

use in the mathematical sciences where the Cartesian mathematics is usually employed, and we need not trouble about more advanced developments before the elements are taken up. Now, there are no treatises on vector algebra in existence yet, suitable for mathematical physics, and in harmony with the Cartesian mathematics (a matter to which I attach the greatest importance). I believe, therefore, that this chapter may be useful as a stopgap."[11, p.IV, preface]

Zoals Heaviside schrijft, acht hij zijn vectoranalyse goed toepasbaar in de fysica, iets waar de quaternionen volgens hem in faalde. Hij stelt de lezer gerust, de overgang is niet moeilijk, de vectoranalyse kan volledig toegepast worden waar vroeger de Cartesische analyse werd gebruikt. Heaviside vindt het belangrijk dat zijn vectoralgebra in harmonie is met de Cartesische coördinaten. In tegenstelling tot quaternionen is zijn vectoranalyse daarnaast juist makkelijk te begrijpen. Volgens Crowe is de lofzang van Heaviside over zijn eigen vectoranalyse terecht:

"Throughout the remainder of the book and in the two later volumes vector methods were used extensively and fruitfully to help Heaviside to many of his important results."[2, p.173]

Zijn vectoranalyse heeft Heaviside dus geholpen belangrijke fysische resultaten te boeken. Deze resultaten zijn het beste bewijs dat de vectoranalyse van Heaviside vrucht droeg.

De inleiding van hoofdstuk drie uit Heavisides *Electromagnetic Theory* bestaat uit een aantal paragrafen. In het begin van zijn inleiding benadrukt Heaviside eerst dat scalairen en vectoren fysische grootheden representeren. Vervolgens legt hij het verschil uit tussen de Cartesische analyse, die gericht is op scalairen en de vector analyse, die gericht is op vectoren. Hij benadrukt in deze paragraaf verder het belang van een vectoranalyse. Zijn hoofdargument is simpel, maar lijkt krachtig: Vectoranalyse is belangrijk, want de fysische grootheden *zijn* vectoren. Zijn vectoranalyse is dus volledig gericht op de fysica en zodoende pragmatisch opgesteld. Wanneer men telkens de vectoren uitschrijft in drie componenten, dus in Cartesische coördinaten, verliest men het fysisch beeld van de grootheid die beschreven wordt en tevens kosten alle berekeningen veel meer moeite.

Verderop in zijn inleiding stelt Heaviside dat men vanuit de Cartesische analyse eigenlijk naar de axioma's van de vectoranalyse geleid wordt, wanneer men zorgvuldig de relaties in de cartesische analyse overzet naar analoge relaties tussen vectoren. Het feit dat de quaternionen deze eigenschap niet hebben, toont Heaviside indirect aan in een aantal opeenvolgende paragrafen. Twee paragrafen uit zijn inleiding zijn voor ons extra relevant met betrekking tot het debat. De tweede paragraaf heeft als titel 'Elementary Vector Analysis without quaternions' en kan eigenlijk beschouwd worden als deel twee van de eerste paragraaf die de titel 'Abstrusity of Quaternions and Comparative Simplicity gained by ignoring them.' draagt. Deze titel laat niets tot de verbeelding over met betrekking tot de inhoud van deze pargraaf. De stelligheid van de titel komt ook terug in de inhoud van de paragraaf. Heaviside kraakt de quaternionen echt af. Zijn kritiek uit zich op de twee punten, genoemd in de titel van de paragraaf.

Ten eerste zijn de quaternionen volgens Heaviside 'awfully difficult' en ontnemen daardoor wetenschappers de moed om een vectoranalyse toe te passen in de fysica. Deze 'ontneming van moed' is een nieuw argument in het debat en zal de lezer geraakt hebben, omdat Heaviside zichzelf als voorbeeld plaatst. Hij noemt zichzelf een slachtoffer van de quaternionen. Gelukkig heeft Heaviside zichzelf door deze fase heen geslagen en kon hij met zijn eigen vectoranalyse toch vectoren gebruiken ter beschrijving van fysische grootheden. Het volgende citaat is ter illustratie van dit eerste argument:

> "But that was before I had thrown off the quaternionic old-man-of-the-sea who fastened himself on my shoulders when reading the only accessible treatise on the subjects—Prof. Tait's Quaternions."[11, p.134]

Ten tweede is de opbouw van een quaternion uit een scalair en een vector een punt van kritiek. Een combinatie van een vector met een scalair heeft geen fysische betekenis, wat impliceert dat het quaternion dus geen fysische betekenis heeft. In het debat is al vaker gediscussieerd over de fysische betekenis van het quaternion, maar Heaviside brengt deze kritiek op een andere manier. Hij benadrukt eerst de betekenis van vectoren en scalairen afzonderlijk en stelt dat zij in de fysica verschillende soorten grootheden representeren. Hierdoor lijkt de combinatie van een scalar en een vector onzinnig.

Heaviside wijdt nog een andere paragraaf uit zijn inleiding aan de discussie tussen Tait en Gibbs, de discussie die eerder in dit hoofdstuk besproken is. Hij neemt zijn positie in achter Gibbs en is van mening dat Gibbs zich uitstekend verdedigt tegen Tait. Toch voelt Heaviside de drang om de onterechtheid van Taits beschuldigingen ten opzichte van Gibbs pamflet nog extra te noemen. Heaviside verwees door de paragrafen heen al veel naar Gibbs en de argumenten die Gibbs gebruikte ten voordele van het Gibbs-Heaviside systeem. Voor Heaviside is het dus extra belangrijk zich uitdrukkelijk achter Gibbs te scharen, aangezien Heavisides analyse bijna volledig overeenkomt met Gibbs' analyse.

Wat opvalt is dat Heaviside hoofdstuk drie over de vectoranalyse niet heeft afgesloten met zijn op een na laatste paragraaf 'Summary of Method of Vector Analysis'. Heaviside sluit zijn hoofdstuk namelijk af met de paragraaf 'Unsuitability of Quaternions for Physical Needs. Axiom :— Once a Vector, always a Vector.' De bijvoeging 'Once a Vector, always a Vector' verwijst natuurlijk naar het hoofdargument ten voordele van zijn vectoranalyse; De fysische grootheden *zijn* vectoren, geen quaternionen.
Heaviside gaat in deze laatste paragraaf op een zeer humoristische wijze te werk. Een voorbeeld hiervan is de manier waarop Heaviside duidelijk maakt dat de quaternionenanalyse bovenal toepasbaar is op quaternionen in plaats van vectoren, die in de natuurkunde voorkomen:

> "It is also known that physicists, with great obstinacy, have been careful (generally speaking) to have nothing to do with Quaternions; and, what is equally remarkable, writers who take up the subject of Vectors are (generally speaking) possessed of the idea that Quaternions is not exactly what they want, and so they go tinkering at it, trying to make it a little more intelligible, very much to the disgust

of Prof. Tait, who would preserve the quaternionic stream pure and undefiled. Now, is Prof. Tait right, or are the defilers right? Opinions may differ.
My own is that the answer all depends upon the point of view. If we put aside practical application to Physics, and look upon Quaternions entirely from the quaternionic point of view, then Prof. Tait is right, thoroughly right, and Quaternions furnishes a uniquely simple and natural way of treating quaternions. Observe the emphasis."[11, p.301]

Dit citaat karakteriseert de manier waarop Heaviside Tait wil neerzetten tegenover de lezer, namelijk als de gepassioneerde verdediger van de quaternionen die echter geen ruimte laat voor verandering en dus voor verbetering. Dit is tevens een verwijzing naar de (volgens Heaviside onterechte) beschuldiging die Tait uitte richting de Franse mathematici die naar Taits mening te veel bezig waren met het verbeteren van de notatie van de quaternionen in plaats van met de ontwikkeling van de quaternionen.

Een laatste argument dat Gibbs al eens noemde en Heaviside nog een keer benadrukt in zijn laatste paragraaf, is de afwijzing van de quaternionen door neutrale fysici (zoals Maxwell), maar indirect ook door de quaternionisten zelf:

"If the usual investigations of physical mathematics involved quaternions, then the physicist would no doubt have to use them. But they do not. If you translate physical investigations into vectorial language, you do not get quaternions ; you get vector algebra instead. Even Prof. Tait's treatise teaches the same lesson, for in his physical applications the quaternion is hardly ever concerned. It is vector algebra, although expressed in the quaternionic notation."[11, p.303]

Ook Heaviside stelt dus dat de quaternionisten hun eigen vectoranalyse nauwelijks toepassen. Dit is een belangrijk argument, want het doet af aan de geloofwaardigheid van de quaternionisten.

5.8 Conclusie debat

De artikelen van Tait en Gibbs en de bijdragen van andere wetenschappers aan het debat laten ons zien hoe de quaternionisten en de voorstanders van het Gibbs-Heaviside systeem hun algebra's verdedigden. De invloed van de fysica op dit debat was niet gering. Beide partijen benadrukten hoofdzakelijk het belang van hun algebra binnen de fysica. Bijna al hun argumenten richtten zich op de toepassing van hun systeem in de fysica.
We vatten nu kort samen op welke manier de fysica de beide partijen hielp in de verdediging van hun systeem. Hiertoe kijken we eerst naar de onderlinge discussie tussen Tait en Gibbs.

In het eerste artikel van Tait, waarin blijkt dat Tait de concurrentie van Gibbs begint te voelen, verdedigt hij zijn systeem door te stellen dat zijn systeem *uniek* is wat betreft zijn toepassing in de natuurkunde. Hij onderbouwt

dit standpunt door te stellen dat de quaternionen zich op een *unieke* manier aan de Euclidische ruimte aanpassen, de ruimte waarin de fysica zich volgents Tait toont.
Daarnaast stelt Tait dat alle moeilijkheden verdwijnen uit een natuurkundige theorie wanneer de quaternionen worden toegepast. Hij wijst ter illustratie op de volgens hem immense simplificaties die optraden in bestaande fysische theorieën zoals de Hydrokinetica en de Electrodynamica, nadat hij quaternionen had toegepast.
Als laatste zoekt Tait zijn heil bij de lezer. Hij vraagt de lezer om op zoek te gaan naar nieuwe natuurkundige toepassingen. Tait is er blijkbaar van overtuigd dat de quaternionen de belangrijkste algebra zullen blijven als hun toepassing in de fysica nog beter aangetoond kan worden.[7]

In de reactie van Gibbs op het voorwoord van Tait, onderbouwt Gibbs hetzelfde standpunt als Tait. Namelijk dat zijn vectoralgebra het best toepasbaar is in de fysica. Hij benadrukt eerst de toepassing van zijn scalar- en vectorproduct in de natuurkunde. Deze functies komen ook voor in de quaternionenalgebra. Gibbs stelt daarna ecther dat het quaternion zelf en het quaternionenproduct overbodig zijn. Ze hebben namelijk geen meetkundige betekenis en Gibbs laat zien dat ze niet van belang zijn in fundamentele natuurkundige relaties, zoals bijvoorbeeld ruimtelijke relaties. Zijn systeem vind hij hierdoor een stuk eenvoudiger om toe te passen in de natuurkunde.

Gibbs gebruikt nog een voorbeeld om te laten zien dat de quaternionen niet per se een slechte algebra vormen, maar dat zijn vectoralgebra gewoonweg eenvoudiger is. Hij wijst op de presentatie van een rotatie in beide algebra's. Een rotatie is een belangrijke fysische operator. De quaternionisten presenteren de rotatie door middel van conjugatie met een quaternion. Gibbs presenteert de rotatie door middel van een lineaire vectorfunctie. Gibbs geeft toe dat conjugatie met een quaternion een mooie en zelfs beknopte manier is om een rotatie uit te drukken. Een lineaire vector functie moet volgens Gibbs echter *altijd* behandeld worden in een algebra. De vectoralgebra van Gibbs heeft dus als voordeel dat zowel de rotatie als andere lineaire functies uitgedrukt kunnen worden door middel van een lineaire vectorfunctie. De quaternionen zijn in het nadeel, want zij gebruiken zowel conjugatie met een quaternion als lineaire vectorfuncties. De algebra van Gibbs is dus compacter.

Wanneer men een algebra wil toepassen als natuurkundige 'taal', is het voordelig wanneer de algebra zo simpel mogelijk is en geen extra interpretatie vergt, aangezien een nieuwe natuurkundige theorie vaak zelf al moeilijk te bevatten is. Gibbs vindt zijn algebra in deze zin optimaal aangepast aan de natuurkunde, want zijn algebra vergt geen extra interpretatie. Hiermee zegt Gibbs niet dat men de quaternionen *niet* kan toepassen in de natuurkunde. Hij stelt alleen dat zijn eigen vectoralgebra *makkelijker* toe te passen is.
Om te laten zien dat de 'taal' van Gibbs eenvoudiger is wijst Gibbs later ook nog op de verwarring die ontstaat door de *notatie* die de quaternionen gebruiken. Zelf gebruikt Gibbs een eenvoudigere notatie, zo stelt hij.

Naast een aantal overbodige begrippen laat Gibbs ook echte gebreken van de quaternionen zien. Zo stelt hij dat de quaternionen niet of nauwelijks toepasbaar zijn in ruimten met meer dan drie dimensies. Hij stelt dat zijn eigen vectoralgebra juist makkelijk uit te breiden is naar een ruimte met meer dimensies.

Tait reageert op dit laatste standpunt van Gibbs in zijn tweede artikel. Hij zegt ironisch dat een fysicus niks te zoeken heeft in een ruimte met meer dan drie dimensies en benadrukt vervolgens weer (zonder extra argumenten) dat zijn quaternionen wel goed toepasbaar zijn in de drie-dimensionale Euclidische ruimte, de ruimte waar een fysicus zijn onderzoek in doet.

Gibbs heeft Tait ook gewezen op het feit dat de quaternionen overbodige begrippen bevatten. Dit gaat ten koste van de 'helderheid' van de taal. Tait gaat op dit punt in de tegenaanval door te wijzen op de dyade van Gibbs. Niets is zo verwarend voor een fysicastudent als het, door Tait gekarakteriseerde, 'ongedefinieerde soort van' product dat Gibbs gebruikt.
Tait probeert ook op een andere manier de helderheid van zijn 'taal' aan te tonen. Hij vergelijkt zijn algebra met de algebra van Gibbs en zegt, in tegenstelling tot Gibbs, dat de quaternionen juist compacter zijn. Tait gaat hierbij niet in op de notatie, maar op het feit dat het quaternionenproduct associatief is.

In zijn tweede artikel benadrukt Gibbs nog een keer dat de quaternionen en het quaternionenproduct overbodig zijn in de natuurkunde. Hij toont dit standpunt nu met een praktisch voorbeeld aan. De quaternionisten gebruiken namelijk zelf niet of nauwelijks het quaternion en het quaternionenproduct, wanneer zij de quaternionenalgebra toepassen in de fysica. Hij illustreert dit voorbeeld aan de hand van de toepassingen in de *Treatise* van Tait. Dit is een sterk argument van Gibbs, het haalt de geloofwaardigheid van de quaternionisten omlaag.

We kunnen naar mijn mening de genoemde argumenten in het debat tussen Tait en Gibbs in drie thema's onder verdelen. Het eerste thema is de 'helderheid' van een algebra. Een heldere algebra is makkelijk te interpreteren. Binnen dit thema wordt bijvoorbeeld verwezen naar de compactheid van een algebra. Compactheid kan bereikt worden door een beknopte notatie, maar ook door overbodige definities en begrippen te vermijden. Gibbs wijst in dit verband naar begrippen zoals het quaternion, het quaternionenproduct en de lineaire vector functie.
Het tweede thema wat terugkeert is het 'bereik' van een algebra. Dit thema geeft aan op welke onderwerpen de algebra toegepast kan worden en welke onderwerpen buiten het bereik van de algebra liggen. Hier valt de discussie onder over het aantal dimensies waarop een algebra toegepast kan worden.
Het derde thema is de werking in de 'praktijk' van een algebra. Binnen dit thema wordt gekeken door wie en op welke manier een algebra wordt gebruikt (in de fysica). Een algebra wordt in de praktijk in de fysica gebruikt als er bijvoorbeeld een fysische theorie mee wordt beschreven. Een algebra kan ook ondersteunend zijn geweest aan de ontdekking van een *nieuwe* fysische theorie.

We vatten nu kort samen aan welke thema's de andere wetenschappers de belangrijkste bijdragen hebben geleverd.

McAulay ondersteunde de quaternionen door de werking van de quaternionen in de praktijk te laten zien. McAulay herschreef de belangrijke resultaten uit Heavisides *On the Forces, Stresses, and Fluxes of Engergy in the Electromagnetic Field* in een artikel waarin hij alleen gebruik maakte van quaternionen. Dit artikel maakte indruk bij het wetenschappelijk publiek. Daarnaast schreef MacAulay ook artikelen zoals het artikel *Utitlity of Quaternions in Physics.* Hij liet in deze artikelen toepassingen van quaternionen in verschillende gebieden van de fysica zien.

Macfarlane hechtte waarde aan de helderheid van een algebra. In eerste instantie was Macfarlane een quaternionist, maar hij vond sommige eigenschappen van de quaternionenalgebra verwarrend. Bijvoorbeeld de dubbele betekenis van de symbolen i, j en k. Daarom produceerde hij een eigen systeem, waarin deze verwarring niet meer optrad. Dit systeem leek meer op het Gibbs-Heaviside systeem. Macfarlane droeg met zijn systeem bij aan het standpunt van Gibbs dat het Gibbs-Heaviside systeem in veel gevallen helderder was dan de quaternionenalgebra.

Knott verdedigde de helderheid van het quaternionensysteem. Hij wees op de noodzaak van begrippen die in eerste instantie verwarrend leken. Het gaat hier om begrippen zoals het negatieve product van twee eenheidsvectoren. Dit product was noodzakelijk negatief, wanneer men de associativiteit van een product wilde behouden. Associativiteit bevorderde volgende Knott juist de helderheid van een algebra.
Ook de definitie van een deling binnen de algebra, bevorderde de helderheid van een algebra. Men was een deling namelijk gewend in de theorie van de complexe getallen. We vinden een deling wel terug in de quaternionenalgebra maar niet in het Gibbs-Heaviside systeem.
Knott wijdde ook nog aandacht aan het 'bereik' van de quaternionenalgebra. Hij stelde net als Tait dat het bereik van een algebra niet groter hoefde te zijn dan de drie-dimensionale ruimte.

Heaviside richtte zich op het verschil in helderheid van de algebra's en op de werking in de praktijk van de algebra's.
Hij vond de quaternionen eenvoudigweg te moeilijk. Hij vertelde dat hij zelf ook geworsteld had met de quaternionen en dat vele fysicastudenten de hoop al hadden opgegeven. Hier tegenover stelde hij dat zijn eigen algebra juist eenvoudig te begrijpen was. De quaternionen waren te moeilijk, omdat ze overbodige begrippen bevatten. Begrippen zoals het quaternion en het quaternionenproduct die niet eens een betekenis hadden, maar wel een hoofdrol innamen in de theorie. In zijn vectoralgebra was de hoofdrol weggelegd voor de vectoren. Van de vectoren was de betekenis juist duidelijk; fysische grootheden *zijn* vectoren.
Heaviside illustreerde het nut van het Gibbs-Heaviside systeem in de praktijk aan de hand van zijn eigen resultaten. Deze bijdrage was erg groot. Heavisides fysische resultaten waren vernieuwend en helder. Bovendien borduurden ze voort op de belangrijke fysische resultaten van Maxwell.
Heaviside benadrukte de moeilijkheid om de quaternionen in de praktijk toe te passen met hetzelfde voorbeeld dat Gibbs eerder al gebruikte; De quaternionisten gebruikten zelf amper quaternionen in hun fysische toepassingen.

We hebben de gegeven argumenten binnen de drie thema's in bovenstaande tekst vergeleken. Ik zal nu echter kort proberen te beschouwen welk vectorsysteem in het voordeel is geweest wat betreft bovenstaande thema's. Het eerste thema was de helderheid van een algebra. Het is een feit dat het Gibbs-Heaviside minder begrippen bevat die geen betekenis in de fysica hebben. Naar mijn idee is de notatiekwestie van minder groot belang. Daarnaast heeft het quaternionensysteem een aantal verwarrende dingen, zoals het negatieve eenheidsvectorproduct en het negatieve teken in de uitdrukking voor ∇. Het Gibbs-Heaviside systeem heeft welliswaar geen associatief product, maar dit zorgde alleen voor verwarring omdat men dit niet gewend was. Het Gibbs-Heaviside systeem is naar mijn mening dus helderder.
Het tweede thema was het bereik van een algebra. Naar mijn mening heeft het Gibbs-Heaviside systeem hierin een klein voordeel, aangezien het iets makkelijker te generaliseren is naar meerdere dimensies. Pas jaren na het debat heeft de natuurkunde pas een groter bereik nodig gehad. Daarom ben ik van mening dat de rol van dit thema minder groot was.
Het laatste thema was de werking in de praktijk van een algebra. Binnen dit thema is het Gibbs-Heaviside systeem de quaternionisten de baas geweest. De quaternionisten staken oude resultaten in een nieuw jasje met behulp van de quaternionen. Gibbs en Heaviside hebben echter *nieuwe* resultaten geboekt. Daarnaast gebruikten Gibbs en Heaviside hun volledige theorie in de beschrijving van deze resultaten. Zij toonden aan dat de quaternionisten zelf nauwelijks de quaternionen en het quaternionenproduct gebruikten in de beschrijving van hun resultaten.

We weten inmiddels dat ons moderne vectorsysteem uit het Gibbs-Heaviside systeem volgde. In hoofdstuk 7 'The Emergence of the modern system of vector analysis'[2, p.225-243] legt Crowe uit dat vooral de werking van de Heavisides algebra in de praktijk de doorslag voor deze ontwikkeling heeft gegeven. Ik ben daarnaast van mening dat de helderheid van het Gibbs-Heaviside systeem heeft bijgedragen aan de goede ontvangst van Heavisides theorieën.

Aangezien de argumenten in het debat vooral fysisch van aard waren, het Gibbs-Heaviside in dit debat de beste argumenten had en we weten dat het Gibbs-Heaviside vooral is geaccepteerd om zijn toepassingen in de fysica, kunnen we concluderen dat de fysica zich in het debat sterker achter het Gibbs-Heaviside systeem schaarde dan achter de quaternionen. De fysica heeft dus een grote rol gespeeld in de stagnatie van de ontwikkeling van de quaternionen.

Ik ben ten slotte van mening dat de focus op de natuurkunde in het debat het Gibbs-Heaviside systeem ten diepste heeft geholpen, omdat dit systeem is *ontstaan* uit de behoefte aan een instrument voor de fysica. Dit in tegenstelling tot de quaternionen die zijn ontstaan uit een andere behoefte en die pas later zijn *ontwikkeld tot* een instrument in de fysica.

[7] Het lijkt hier of Tait zijn quaternionen plaatst boven het welzijn van de fysica. Het citaat aan het einde van paragraaf 5.6.3 wijst ook op het feit dat Tait zijn quaternionen niet veranderen wil.

Hoofdstuk 6

Conclusie

We zijn aan het einde gekomen van deze beschouwing over de rol van de natuurkunde in de opkomst, ontwikkeling en stagnatie in de ontwikkeling van de quaternionen. De rol van de natuurkunde in deze drie fasen uit de geschiedenis van de quaternionen is al uiteengezet in de conclusies van hoofdstuk 2, 3, 4 en 5.

Zoals we zagen in hoofdstuk 2 speelde de natuurkunde geen rol in de ontdekking van de quaternionen. Hamilton haalde zijn motivatie voor het vinden van de quaternionen niet uit de natuurkunde. Hij kreeg ook geen extra inzicht door de natuurkunde.
Nadat Hamilton zijn quaternionen had ontdekt zag hij wel vrij snel dat de quaternionen toepasbaar waren in de fysica. Een belangrijk moment is de presentatie van zijn quaternionen aan het wetenschappelijk publiek. Tegelijkertijd met de bekendmaking van de quaternionen, illustreerde Hamilton een fysische toepassing voor de natuurkunde en hij beloofde er nog meer. Vanaf het eerste moment dat het publiek kennis maakte met de quaternionen, kreeg het publiek ook te horen over de eventuele toepassingen. Hamilton stimuleerde daarnaast de lezers van zijn boeken om fysische toepassingen te vinden.
Op dit moment waren in de praktijk echter nog niet veel toepassingen gevonden en waren de quaternionen nog een op zichzelf staande algebra.

In hoofdstuk 3 zien we dat Tait de focus van de quaternionen gaat verleggen naar de toepassingen binnen de natuurkunde. Tait past de quaternionen aan als instrument voor de fysica. Daarnaast illustreert hij het gebruik van de quaternionen in fysische toepassingen. De ontwikkeling van de quaternionen wordt niet alleen gestimuleerd *door* de fysica, de quaternionen ontwikkelen zich ook *in de richting van* de fysica.
Via Tait komt Maxwell in aanraking met de quaternionen. Het gebruik van de quaternionen in zijn *Treatise on Electricity and Magnetism* geeft de quaternionen bekendheid. De lezers van zijn boek zijn in eerste instantie geïnteresseerd in de fysische inhoud. De quaternionen komen dus in beeld bij (mathematische) fysici.

In hoofdstuk 4 zien we dat twee van deze mathematische fysici, Gibbs en Heaviside, zich bewust worden van de beperkingen van de quaternionen als instrument in de fysica. Ze worden zich hiervan bewust door de manier waarop

Maxwell de quaternionen gebruikt. Vanuit hun onvrede over deze beperkingen ontwikkelen zij beide een nieuwe vectoralgebra die onderling sterk overeenkomen en gezamenlijk wordt aangeduid als het Gibbs-Heaviside systeem. Deze vectoralgebra wordt dus volledig ontwikkeld uit de behoefte aan een instrument voor de natuurkunde.

In hoofdstuk 5 zien we dat de ontwikkeling van het Gibbs-Heaviside systeem de ontwikkeling van de quaternionen tegenwerkt. Er ontstaat een hevig debat waarin beide partijen harde argumenten niet schuwen. De belangrijkste argumenten zijn bijna allemaal fysisch van aard. Het Gibbs-Heaviside systeem heeft betere papieren wat betreft de toepassing in de natuurkunde en lijkt in het debat, dat volledig gericht is op deze toepassingen, dus in het voordeel te zijn. Daarnaast weten we dat de artikelen van Heaviside zijn vectoranalyse zoveel bekendheid hebben gegeven, dat de moderne vectoralgebra langzaam uit zijn vectoranalyse ontstaan is. Hoe deze ontwikkeling plaats vindt, kunt u lezen in hoofdstuk 7[2, p.225-243] uit het boek van Crowe.

In de ontdekking van de quaternionen speelde de fysica dus geen grote rol. Vanwege de natuurkunde werden de quaternionen wel ontwikkeld door Tait. Vanwege deze ontwikkeling kregen de quaternionen al meer bekendheid. Tait ontwikkelde de quaternionen na Hamilton verder in de richting van de natuurkunde. Deze richtingsverandering in de natuurkunde gaf de quaternionen meer bekendheid en hierdoor ging Maxwell de quaternionen in zijn *Treatise* gebruiken. De quaternionen bleken, hoewel goed, echter niet de beste algebra te zijn om toe te passen in de natuurkunde. Een ander vectorsysteem ontstond. Dit vectorsysteem ontstond uit de inspiratie van Taits quaternionen die geput was uit Maxwells *Treatise*. Het ontstond dus indirect doordat Tait de focus op de natuurkundige toepassingen had gelegd. Dit vectorsysteem, het Gibbs-Heaviside systeem, was nog beter in zijn toepassingen in de natuurkunde. Uiteindelijk kreeg het Gibbs-Heaviside systeem de overhand en zou uit dit systeem de moderne vectoralgebra volgen.

Naar aanleiding van bovenstaande beschouwing kan nog een laatste vraag gesteld worden. Was het wel verstandig van Tait om de focus op de natuurkunde te leggen? Hierdoor ontstond een systeem dat men uiteindelijk beter in de natuurkunde kon toepassen. Omdat de focus volledig op de fysica gelegd was, moest het quaternionensysteem inleveren aan waarde. Aan de andere kant hadden de quaternionen zich als algebra misschien wel nooit zo ver ontwikkeld als de focus niet op de natuurkunde was gelegd. Vanwege de fysica hebben de quaternionen immers bekendheid gekregen en de fysica heeft Tait de inspiratie gegeven om een een volledig uitgewerkte inleiding in de quaternionen (begrijpelijker dan de inleiding van Hamilton) te schrijven.

Als puur mathematische theorie in de drie-dimensionale ruimte vind ik de quaternionen echter mooier dan het Gibbs-Heaviside systeem, ze hebben een grotere structuur, door de gedefinieerde deling en ze zijn ingenieus bedacht. De schoonheid van de wiskunde die zich toont in de quaternionen had een andere focus kunnen zijn. Wetenschappers willen echter vaak overtuigd worden van het nut van een object, anders dan de schoonheid van een object.

Gelukkig zijn de toepassingen van de quaternionen volledig uitgewerkt en opgetekend in meerdere boeken. Hoewel niet meer zo bekend, zullen ze zeker blijven bestaan. We komen ze af en toe nog tegen in specifieke delen van de wiskunde en kunnen dan genieten van, zoals Tait het eens zo mooi verwoordde, een glimp van

> 'The beautious eye of heaven'.

Hoofdstuk 7

Wiskundige toelichting op de quaternionen

De wiskundige toelichting is gericht op de lezer die weinig tot niets van quaternionen af weet en van plan is, of bezig is, deze scriptie over quaternionen te lezen. Deze toelichting is vooral ter ondersteuning van de begrippen die genoemd worden in de tekst. Wanneer u zich echter meer in de quaternionen wilt verdiepen beveel ik u aan de originele inleiding van Tait te lezen of een van de vele andere boeken en artikelen over quaternionen[1] te lezen.

Deze toelichting begint met de axioma's van de quaternionenalgebra en bespreekt vervolgens enkele begrippen die in de tekst worden besproken. Bij het bespreken van de begrippen zal vaak verwezen worden naar analoge begrippen in de moderne algebra. De wiskundige notatie die gebruikt wordt in de toelichting, is zoveel mogelijk gelijk aan de notatie van Hamilton en Tait. Om de toelichting echter leesbaar te houden, maak ik af en toe gebruik van de notatie uit de moderne algebra. Wanneer ik afwijk van de notatie van Tait en Hamilton zal dit worden aangegeven.

7.1 Grondbeginselen

Een quaternion q heeft de vorm

$$q = \omega + \xi i + \eta j + \zeta k.$$

Hierbij zijn ω, ξ, η en ζ reëele getallen. De verzameling van de quaternionen is gelijk aan $\mathbb{R}^4$. In de moderne wiskunde vormen de quaternionen een vierdimensionale associatieve genormeerde delingsalgebra over de reëele getallen. We zullen verderop in deze toelichting juist de waarde van quaternionen in $\mathbb{R}^3$ ontdekken. Het is goed om in het achterhoofd te onthouden dat de quaternionen indirect alle algebra van de elementen uit $\mathbb{R}^3$ bevatten, *en meer*.

[1]Zie Bibliografie.

Op de quaternionen is een componentsgewijze optelling gedefinieerd. Deze optelling is vergelijkbaar met de optelling van de complexe getallen:

$$\begin{aligned} q + q' &= (\omega + \xi i + \eta j + \zeta k) + (\omega' + \xi' i + \eta' j + \zeta' k) \\ &= (\omega + \omega') + (\xi + \xi')i + (\eta + \eta')j + (\zeta + \zeta')k \end{aligned}$$

Het addiditieve identiteitselement van de quaternionen is 0.

Tegenwoordig zouden we aan de quaternionen de basis $(1, i, j, k)$ toekennen. Hamilton spreekt in zijn *Lectures* en *Elements* nog niet van een basis. De beroemde regel, die Hamilton op de Brougham brug in Dublin schreef, en eigenlijk de relaties tussen de elementen uit de basis defenieert, volgt hieronder. Deze regel onderscheidt de quaternionen van andere vier-dimensionale algebra's:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

De bovenstaande regel kan ook omgeschreven worden tot de volgende regels:

$$\begin{aligned} ij &= k = -ji \\ jk &= i = -kj \\ ki &= j = -ik \end{aligned}$$

Vermenigvuldiging van twee quaternionen $q = \omega + \xi i + \eta j + \zeta k$ en $q' = \omega + \xi' i + \eta' j + \zeta' k$ is als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned} qq' &= (\omega + \xi i + \eta j + \zeta k)(\omega + \xi' i + \eta' j + \zeta' k) \\ &= (\omega\omega' - \xi\xi' - \eta\eta' - \zeta\zeta') \\ &\quad (\omega\xi' + \xi\omega' + \eta\zeta' - \zeta\eta')i \\ &\quad (\omega\eta' + \eta\omega' + \zeta\xi' - \xi\zeta')j \\ &\quad (\omega\zeta' + \zeta\omega' + \xi\eta' - \eta\xi')k \end{aligned}$$

Aan deze vermenigvuldiging wordt in de tekst vaak gerefereerd als 'het product' of 'het quaternionenproduct'.

We zien dat twee quaternionen onder vermenigvuldiging naar een quaternion worden gestuurd. Dit is een eis voor het vormen van een algebra. Verder kan men aantonen dat qq' niet noodzakelijk gelijk is aan $q'q$. Als voorbeeld kan men een van de onderlinge relaties tussen i, j en k beschouwen, zoals $ij = k = -ij$. Het quaternionenproduct is dus in het algemeen niet commutatief. Hoewel wij nu gewend zijn aan een non-commutatief product, was dit een controversiële eigenschap van het product in Hamiltons tijd. Het quaternionenproduct is wel associatief en distributief.

Op dezelfde manier als bij de complexe getallen definieerde Hamilton de geconjugeerde[2] Kq van een quaternion $q = \omega + \xi i + \eta j + \zeta k$ als volgt:

$$Kq = \omega - \xi i - \eta j - \zeta k$$

De norm van q wordt gegeven door

$$\sqrt{\omega^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

De norm werd door Hamilton en Tait gebruikt in de uitdrukking van multiplicatieve inverse van een quaternion. Hoewel zij geen beknopte notatie voor de norm definieerden, duid ik de norm van een quaternion q in het vervolg aan met $N(q)$.

In de moderne vectoralgebra kunnen we geen inverse van een vector definieren. Dit komt overeen met het feit dat er geen deling gedefinieerd kan worden. De moderne vectoralgebra heeft namelijk geen eenheidselement. Een deling werd door Hamilton echter als noodzakelijk beschouwd in een algebra en op de quaternionenalgebra heeft Hamilton dus ook een deling gedefinieerd. Een quaternion heeft dus een multiplicatieve inverse. Het multiplicatieve identiteitselement is 1. De inverse van een quaternion q wordt als volgt gedefinieerd:

$$q^{-1} = \frac{Kq}{N(q)}$$

Men kan zelf nagaan dat $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$.

7.2 Het quaternion: scalar en vector

Hamilton verdeelde het quaternion $q = \omega + \xi i + \eta j + \zeta k$ in twee stukken, ω en ρ. Het eerste gedeelte is de scalar ω. Het tweede gedeelte noemde Hamilton de *vector* ρ. Deze vector bestaat uit $\xi i + \eta j + \zeta k$. Een quaternion is dus opgebouwd uit een scalar en een vector. Aan deze vector kan een meetkundige interpretatie worden gegeven, wanneer men i, j en k beschouwt als eenheidsvectoren in $\mathbb{R}^3$. Een quaternion met de eigenschap $\omega = 0$ noemde Hamilton een zuiver quaternion. Dit zuivere quaternion komt overeen met de drie-dimensionale vector die we tegenwoordig gebruiken in $\mathbb{R}^3$. [9, p.XXXVII]

Om respectievelijk het scalargedeelte of het vectorgedeelte van een quaternion te selecteren introduceerde Hamilton twee functies S en V. Beschouw hiertoe een quaternion $q = \omega + \xi i + \eta j + \zeta k = \omega + \rho$. Dan geldt

$$\begin{aligned} Sq &= \omega \\ \text{en} \quad Vq &= \rho = \xi i + \eta j + \zeta k. \end{aligned}$$

Hamilton en Tait besteedden veel aandacht aan de vermenigvuldiging van zuivere quaternionen, de vectoren, vanwege hun betekenis in de fysica. Ze kenden aan deze vectoren dezelfde meetkundige betekenis toe als wij heden ten dage aan drie-dimensionale vectoren in $\mathbb{R}^3$ toekennen.

Met de hierboven gedefinieerde multiplicatie op quaternionen kunnen we ook het product van twee vectoren uitschrijven. Stel $\alpha = xi + yj + zk$ en $\beta = x'i + y'j + z'k$ dan hoort bij α en β het volgende quaternionenproduct[3]:

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= (xi + yj + zk)(x'i + y'j + z'k) \\ &= -(xx' + yy' + zz') \\ &\quad +(yz' - zy')i \\ &\quad +(zx' - xz')j \\ &\quad +(xy' - yx')k \end{aligned}$$

[2]Tegenwoordig duiden we de geconjugeerde aan met q*.

Met de operatoren S en V kunnen we nu het scalargedeelte en het vectorgedeelte van het quaternionenproduct selecteren:

$$\begin{array}{rll} & S\alpha\beta & = -(xx' + yy' + zz') \\ \text{en} & V\alpha\beta & = (yz' - zy')i + (zx' - xz')j + (xy' - yx')k \end{array}$$

Deze uitkomsten tonen opvallend veel overeenkomsten met de uitkomsten van het huidige inproduct en uitproduct tussen de vectoren $\alpha = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ en $\beta = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}$:[4]

$$\begin{array}{lrcl} \text{Het inproduct} & \alpha \cdot \beta & = & (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) \cdot (x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}) \\ & & = & xx' + yy' + zz' \\ \text{Het uitproduct} & \alpha \times \beta & = & (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) \times (x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}) \\ & & = & (yz' - zy')\hat{x} \\ & & & +(zx' - xz')\hat{y} \\ & & & +(xy' - yx')\hat{z} \end{array}$$

Aangezien de eenheidsvectoren i, j en k te vergelijken zijn met $\hat{x}, \hat{y}$ en $\hat{z}$, heeft $-S\alpha\beta$ dezelfde betekenis als het inproduct $\alpha \cdot \beta$ en heeft $V\alpha\beta$ dezelfde betekenis als het uitproduct $\alpha \times \beta$.

De onderstaande tabel is ter illustratie van de hoeveelheid analogieën tussen multiplicatie in de quaternionenalgebra en de huidige vectoralgebra in $\mathbb{R}^3$. Een soortgelijke tabel is te vinden in Crows *History of Vector Analysis*[2, p.156]:

Multiplicatie tussen pure quaternionen	Toelichting	Moderne multiplicatie tussen vectoren
$\alpha\beta = -(xx' + yy' + zz') + (yz' - zy')i + (zx' - xz')j + (xy' - yx')k$	De quaternionenalgebra kent slechts één product.	(1) $\alpha \cdot \beta = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ (2) $\alpha \times \beta = (yz' - zy')\hat{x} + (zx' - xz')\hat{y} + (xy' - yx')\hat{z}$
$S\alpha\beta = S\beta\alpha$	Het scalargedeelte en het inproduct zijn associatief	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
$V\alpha\beta = -V\alpha\beta$	Het vectorgedeelte en uitproduct veranderen bij het omwisselen van vectoren van teken	$\alpha \times \beta = -\beta \times \alpha$
$V\alpha V\beta\gamma = \gamma S\alpha\beta - \beta S\gamma\alpha$	Vectorgedeelte en uitproduct van drie vectoren	$\alpha \times [\beta \times \gamma] = (\alpha \cdot \gamma)\beta - (\alpha \cdot \beta)\gamma$
$VV\alpha\beta V\gamma\delta = -\beta S\alpha V\gamma\delta + \alpha S\beta V\gamma\delta$	Vectorgedeelte en uitproduct van vier vectoren	$[\alpha \times \beta] \times [\gamma \times \delta] = (\alpha \cdot \gamma \times \delta)\beta - (\beta \cdot \gamma \times \delta)\alpha$

[3] Tait gebruikt voor zuivere quaternionen de letters x, y en z in plaats van de griekse letters ξ, η en ζ. Waarschijnlijk om een duidelijk onderscheid tussen zuivere en gewone quaternionen te maken.

[4] De eenheidsvectoren $\hat{x}, \hat{y}$ en $\hat{z}$ zal ik in het vervolg gebruiken om de eenheidsvectoren in $\mathbb{R}^3$ van de moderne algebra uit te drukken.

7.3 Begrippen uit de tekst

7.3.1 Lineaire vector functie

Een punt van discussie uit het debat[5] was de lineaire vectorfunctie. Tegenwoordig gebruiken we vaker de term lineaire operator, de betekenis van deze twee termen is dezelfde. Een lineaire vectorfunctie f voldoet aan de volgende vergelijking:

Stel dat v, w vectoren (zuivere quaternionen) zijn, is daarnaast f een lineaire vectorfunctie dan geldt:

$$f(v+w) = f(v) + f(w)$$

Hamilton definieerde de lineaire quaternionfunctie als een functie f die voldoet aan:

$$fq = f(Sq + Vq) = fSq + fVq = Sq.f1 + fVq.$$

De beperking van de lineaire quaternionfunctie op zuivere quaternionen is identiek aan de lineaire vectorfunctie die wij heden ten dage gebruiken. In de quaternionenalgebra geldt voor de zuivere quaternionen v en w dus ook:

$$f(v+w) = fv + fw$$

De algemene vorm van een lineaire vector functie leidde Hamilton als volgt af in zijn *Elements*:

Neem drie diplanaire[6] vectoren α, α' en α''. Elke lijn in de drie dimensionale ruimte is dan te beschrijven als een combinatie van de drie vectoren α, α' en α''.

Leid uit deze drie vectoren de vectoren β_0, β_0' en β_0'' af, met behulp van de volgende vergelijkingen:

$$\beta_0 S\alpha\alpha'\alpha'' = V\alpha'\alpha'' \ , \ \beta_0' S\alpha\alpha'\alpha'' = V\alpha''\alpha \ , \ \beta_0'' S\alpha\alpha'\alpha'' = V\alpha\alpha'$$

$S\alpha\alpha'\alpha''$ is het volume van het parallellepipedum met als randen de vectoren α, α' en α''[7]. $V\alpha'\alpha''$ is een vector loodrecht op α' en α''.β_0 is dus een vector, loodrecht op de vectoren α' en α'' met als grootte

$$|\beta_0| = |V\alpha'\alpha''| \frac{|V\alpha'\alpha''|}{|S\alpha\alpha'\alpha''|} = \frac{\text{Het oppervlakte van het vlak opgespannen door} \alpha' \text{ en } \alpha''}{\text{Het volume van het parallellepipedum opgespannen door} \alpha, \alpha' \text{ en } \alpha''}$$

Op dezelfde manier kunnen we β_0' en β_0'' in kaart brengen.

De drie vectoren β_0, β_0' en β_0'' zijn dus weer drie diplanaire vectoren, maar nu geschaald ten opzichte van het parallellepipedum dat opgespannen werd door α, α' en α''.

Na de defenitie van β_0, β_0' en β_0'' stelt Hamilton dat elke vector ρ nu als volgt uitgedrukt kan worden:

$$\rho = \beta_0 S\alpha\rho + \beta_0' S\alpha'\rho + \beta_0'' S\alpha''\rho$$

Omdat β_0, β_0' en β_0'' lineair onafhankelijk zijn kan elke vector ρ uitgedrukt worden in de vorm $\rho = \beta_0 a + \beta_0' b + \beta_0 c$. In Hamiltons vergelijking zijn a, b en c respectievelijk gelijk aan $S\alpha\rho, S\alpha'\rho$ en $S\alpha''\rho$[8].

Pas de lineaire vector functie ϕ vervolgens toe op de lineair onafhankelijke en geschaalde vectoren β_0, β_0' en β_0''. Hieruit volgen de vectoren β, β' en β'':

$$\beta = \phi\beta_0,\ \beta' = \phi\beta_0',\ \beta'' = \phi\beta_0''$$

We krijgen dan de volgende gegeneraliseerde formule voor een lineaire vector functie, toegepast op de vector ρ:

$$\phi\rho = \beta S\alpha\rho + \beta' S\alpha'\rho + \beta'' S\alpha''\rho$$

Deze uitdrukking bevat negen scalaire constanten, namelijk:

$$S\alpha\beta,\ S\alpha'\beta,\ S\alpha''\beta;\ S\alpha\beta',\ S\alpha'\beta',\ S\alpha''\beta';\ S\alpha\beta'',\ S\alpha'\beta'',\ S\alpha''\beta''$$

Tegenwoordig presenteren wij een lineaire vector functie na de keuze van een basis vooral als een 3×3 matrix ϕ_{ij} waarbij $i, j \ \epsilon \ \{1,\ 2,\ 3\}$. Wanneer wij deze matrix echter uitschrijven in componenten, lijkt dit erg op de afleiding van Hamilton. De algemene vorm van de lineaire vector functie ϕ, toegepast op een willekeurige vector $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ ziet er dan als volgt uit:
$\phi\rho = (\sum_{i=1}^{3} \phi_{1j}\rho_j, \sum_{i=1}^{3} \phi_{2j}\rho_j, \sum_{i=1}^{3} \phi_{3j}\rho_j)$ Deze uitdrukking bevat ook negen scalaire constanten.

7.3.2 Rotatie

Gibbs gebruikte de lineaire vector functie om een rotatie voor te stellen. Deze functie is niet erg beknopt en heeft als minpunten dat men niet direct de hoek en de as van een rotatie kan aflezen. Hamilton beschouwde de rotatie meer als links- of rechtsvermenigvuldiging met een quaternion. Aangezien in de tekst de rotatie vooral wordt aangehaald in het debat tussen Gibbs en Tait, zal ik hieronder rotatie van een vector door conjugatie met een quaternion bespreken, de methode die Tait gebruikte om een rotatie te beschrijven.

Conjugatie met een quaternion kan men beschouwen als de operatie $q(\ )q^{-1}$, toegepast op een vector v. Conjugatie met een quaternion laat de vector v roteren. Wanneer men een vector v wil laten roteren met een hoek θ om een as in de driedimensionale ruimte, is conjugatie met een eenheidsquaternion $\hat{q}$ (een quaternion met norm 1) de eenvoudigste methode. Een eenheidsquaternion kan,

[5]Zie bijvoorbeeld de artikelen van Tait en Gibbs, in paragraaf 5.1 en 5.2.

[6]Hamilton gebruikde de term 'diplanar'. Dit betekent dat de drie vectoren in twee willekeurige vlakken liggen die niet evenwijdig zijn in de drie dimensionale ruimte, de vectoren $\alpha, \alpha' en \alpha''$ zijn dus lineair onafhankelijk.

[7]Zie [25, p.62].

[8]Hamilton levert het bewijs hiervan in paragraaf 294 van zijn *Elements*, zijn methode wijkt niet veel af van de methode die de moderne lineaire algebra hiervoor gebruikt.

net als een complex getal, gerepresenteerd worden als combinatie van een cosinus en een sinus, met behulp van een uitbreiding van de formule van Euler:

$$q = e^{\theta(u_x i + u_y j + u_z k)} = \cos(\theta) + \hat{u}\sin(\theta)$$

conjugatie met dit quaternion q geeft dan een rotatie van de vector v om de as, die parallel ligt aan de eenheidsvector $\hat{u} = (u_x, u_y, u_z)$, met een hoek 2θ.
Voor het bewijs of uitgebreidere toelichting hiervan verwijs ik naar Taits *Elementairy Treatise*[9]. In Taits *Treatise* worden vooral veel voorbeelden in het hoofdstuk 'Kinematica' behandeld.

De eenvoud om een rotatie te presenteren door middel van conjugatie met een quaternion is opvallend. In het algemeen presenteren wij een rotatie van een vector in drie dimensies na de keuze van een basis als een matrix. Aan de berekening van deze matrix gaat echter veel werk vooraf. Daarom wordt ook nu een rotatie in drie dimensies nog vaak gepresenteerd als conjugatie met een quaternion.

7.3.3 Hamilton operator

De Hamilton operator of differentiaal operator wordt een aantal keren aangehaald in de tekst. De operator heeft de volgende structuur:

$$\nabla = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}$$

Deze operator kan worden toegepast op zowel scalairwaardige functies van een vector als vectoren als quaternionen, waarvan de coëfficienten functies zijn van de scalairen x, y en z. De operator was uniek in zijn defenitie omdat i, j en k elk systeem van loodrechte eenheidsvectoren mag presenteren. De operator is dus heel algemeen, wat bijzonder handig is voor bijvoorbeeld toepassing in fysische problemen. Met x, y en z worden de assen bedoeld, zoals ze bekend waren in de Cartesische coördinaten. Tegenwoordig gebruiken we hiervoor een willekeurig referentie assenstelsel. In de bovenstaande (eerste) defenitie van de differentiaaloperator was de Cartesische invloed dus nog aanwezig.

De toepassing van deze operator op een vector $\sigma = ti + uj + vk$, waarvan t, u en v functies zijn van x, y en z geeft het volgende resultaat[25, p.102]:

$$\begin{aligned}
\nabla\sigma &= (i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz})(it + ju + kv) \\
&= -(\frac{dt}{dx} + \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dz}) \\
&\quad +i(\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dz}) \\
&\quad +j(\frac{dt}{dz} - \frac{dv}{dx}) \\
&\quad +k(\frac{du}{dx} - \frac{dt}{dy})
\end{aligned}$$

[9] of andere artikelen over quaternioncalculus zoals [3] en [23].

De toepassing van deze operator op een scalar $\omega = \omega(x,\ y,\ z)$ geeft het volgende resultaat:

$$\begin{aligned}\nabla\omega &= (i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz})\omega \\ &= i\frac{d\omega}{dx} + j\frac{d\omega}{dy} + k\frac{d\omega}{dz}\end{aligned}$$

Tweemaal toepassen van de differentiaal operator geeft de volgende operator:

$$\nabla^2 = -(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}).$$

Hierbij kan worden opgemerkt dat deze operator gelijk is aan de Laplace operator vermenigvuldigd met -1. Tait liet na de introductie van de twee operatoren gelijk zien hoe de twee operatoren Laplace's vergelijking voor de potentiaal in de vrije ruimte vereenvoudigde:

$$\nabla^2\frac{1}{T\rho} = -\frac{\nabla\rho}{T\rho^3} - \nabla\frac{1}{T\rho^3}.\rho$$

Hierbij staat T voor het tensorgedeelte van de vector ρ, waar ik verder niet op in ga in deze toelichting.

Dit is niet de enige fysische toepassing van de operatoren. Tait haalde in zijn *Treatise* nog vele andere toepassingen aan. Beide operatoren hebben vele en belangrijke toepassingen gekend in de fysica. Hamilton was de uitvinder van deze operatoren en heeft hiermee twee krachtige operatoren aan de fysica geleverd.

Het min-teken in de operatoren was voor de tegenstanders van de quaternionenalgebra echter wel een groot punt van kritiek in het debat. De uitkomsten werden als on-fysisch beschouwd. Dit min-teken is natuurlijk direct terug te voeren naar de onderlinge relaties tussen i, j en k, namelijk $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. In de huidige vectoralgebra is het kwadraat van twee eenheidsvectoren $+1$, wat fysisch makkelijk geaccepteerd kan worden[10].

7.3.4 Meetkundige interpretatie quaternion

Nu we de basiselementen en enkele belangrijke definities binnen de quaternionenalgebra behandeld hebben, is het nog goed om kort naar de meetkundige interpretatie van quaternionen te kijken. Over het belang van de notie van een quaternion is veel discussie geweest. Is het quaternion nodig of overbodig? Het gaat hier om de betekenis van het quaternion zelf en niet om het nut van een quaternion, wanneer deze toegepast wordt. De hierboven besproken rotatie van een vector door middel van conjugatie met een quaternion geeft bijvoorbeeld geen informatie over de betekenis van een quaternion, dit is gewoon een instrument.

[10] Het product van twee dezelfde snelheidsvectoren wordt geacht versterkt te worden in dezelfde richting in plaats van in de tegenovergestelde richting.

De extra's in de grondbeginselen van de quaternionenalgebra ten opzichte van de moderne algebra zijn het vierde element van de basis, het quaternionenproduct, maar ook de deling die gedefinieerd is in de algebra. Tait geeft in zijn inhoudsopgave een beknopte samenvatting over het verband tussen het begrip 'deling' en de quaternionen:

> "Thus it appears that the ratio of two vectors, or the multiplier required to change one vector into another, in general depends upon *four* distinct numbers, whence the name QUATERNION.
> A quaternion q is thus *defined* as expressing a relation
>
> $$\beta = q\alpha$$
>
> between the two vectors α, β"[25, p.32]

Tait verwijst voor dit citaat naar de *Elements* van Hamilton. Hamilton bewees in zijn *Elements* dat het quotient van twee vectoren die parallel lopen in de drie-dimensionale ruimte een scalar is, namelijk de ratio tussen de twee vectoren. Vervolgens bewees Hamilton dat het quotient van twee vectoren die loodrecht op elkaar staan een derde vector is, die loodrecht op de eerste twee vectoren staat. Wanneer twee vectoren niet parallel én niet loodrecht op elkaar staan is het quotient een quaternion. Een quaternion is dus per definitie het quotient van twee vectoren in de drie-dimensionale ruimte. Men kan quaternionen ook beschouwen als de vermenigvuldingsfactor om vector α in vector β te veranderen.

Bibliografie

[1] *Life and Scientific Work of Peter Guthrie Tait.* Cambridge, 1911.

[2] Michael J. Crowe. *A history of Vector Analysis.* University of Notre Dame Press, 1967.

[3] David Eberly. Quaternion algebra and calculus. *Geometric Tools. LLC*, 1999.

[4] J. Willard Gibbs. On the rôle of quaternions in the algebra of vectors. *Nature*, 43:511–513, April 2 1891.

[5] J. Willard Gibbs. Quaternions and the ausdehnungslehre. *Nature*, 44:79–82, May 28 1891.

[6] J. Willard Gibbs. *The scientific papers of J. Willard Gibbs*, volume 2. Dover Publications. Inc, 1961.

[7] William Rowan Hamilton. Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time. *Transactions of the Royal Irish Academy*, 17:293–422, 1837.

[8] William Rowan Hamilton. *Lectures on Quaternions.* Dublin: Hodges and Smith, 1853.

[9] W.R. Hamilton and W.E. Hamilton. *Elements of Quaternions.* Longmans, Green, 1866.

[10] Oliver Heaviside. On the forces, stresses, and fluxes of energy in the electromagnetic field. *Philosophical Transaction of the Royal Society of London*, 183 A:423–484, 1893.

[11] Oliver Heaviside. *Electromagnetic Theory*, volume 1. The Electrician printing and publishers co., December, 16 1993.

[12] Cargill Gilston Knott. Recent innovations in vector theory. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 19:212–237, December 1892.

[13] Teun Koetsier. Explanation in the historiography of mathematics: The case of hamilton's quaternions. *Stud.Hist.Phil.Sci*, 26(4):593–616, 1995.

[14] Alexander Macfarlane. Principles of the algebra of physics. *Proceedings of the American Association for the Advancement of Science*, 40:65–117, 1891, published 1892.

[15] Alexander Macfarlane. Review of utility of quaternions in physics. by a. mcaulay. *Physical Review*, 1:387–390, December 1893.

[16] James Clerck Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism.* Dover Publications, New York, 3 edition, 1954. Deze nieuwe editie is een onveranderde republicatie van de derde editie uit 1891.

[17] J.C. Maxwell and W.D. Niven. *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell: Volume two.* Dover Phoenix Editions. Dover Publications, 2003.

[18] J.C. Maxwell and London Mathematical Society. *On the Mathematical Classification of Physical Quantities.* London Mathematical Society, 1871.

[19] Alexander McAulay. Quaternions. *Nature*, 47:151, December 1892.

[20] Alexander McAulay. Quaternions as a practical instrument of physical research. *Philosophical Magazine*, 33(205):477–495, June 1892.

[21] Alexander McAulay. On the mathematical theory of electromagnetism. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 183 A:685–779, 1892, read in 1892, published in 1893.

[22] Alexander McAulay. *Utility of Quaternions in Physics.* London. Macmillan and Co, 1893.

[23] Joe McMahon. A (mostly) linear algebraic introduction to quaternions. *Program in Applied Mathematics. University of Arizona*, 2003.

[24] Z.K. Silagadze. Multi-dimensional vector product. *Budker Institute of Nuclear Physics*, April, 30 2002.

[25] Peter G. Tait. *An elementairy Treatise on Quaternions.* Cambridge University Press, 3rd edition, 1890.

[26] Peter G. Tait. The rôle of quaternions in the algebra of vectors. *Nature*, 43:608, April 30 1891.

[27] Jean G. Van Bladel. *Electromagnetic Fields.* the Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 2 edition, 2007.