Toelaatbaarheid in Intuïtionistische Logica

Tinka Bakker

29 augustus 2012

Begeleiders:

Jeroen Goudsmit en Rosalie Iemhoff

7,5 ECTS

Samenvatting

In deze scriptie zal ik uitleggen waarom en bewijzen dat de Wroński-regels een basis voor toelaatbaarheid vormen in het implicatie-negatie fragment van intuïtionistische propositionele logica.

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Het onderwerp van logica is de structuur van redeneringen. De manier waarop we over redeneringen en hun structuur praten, is in de taal van de logica. Logica is een formele taal en geeft de formele regels van het redeneren. Het vakgebied logica valt traditioneel gezien onder de theoretische filosofie, maar wordt ook tot de wiskunde gerekend. Voor kunstmatige intelligentie speelt logica een belangrijke rol. Het doel van kunstmatige intelligentie is om zelfstandige intelligente agenten of systemen te bouwen. Voorbeelden daarvan zijn reisplanners, spraak naar spraak vertalers, zoekmachines en dergelijke. Welke soort intelligentie er ook wordt nagestreefd, het is bijna altijd noodzakelijk dat de agent of het systeem logische inferenties kan maken. Daarom is het belangrijk dat zowel de ontwikkelaar als het systeem kennis van de logica heeft. Er bestaan veel verschillende soorten logica, ontstaan uit verschillende doelen en verschillende ideeën over wat redeneren inhoudt. De meest bekende vorm van logica is de klassieke logica. Één van de belangrijkste aannames in de klassieke logica is dat een bewering ofwel waar, dan wel onwaar is, dit wordt de wet van de uitgesloten derde genoemd. Binnen de logica waarover ik het verder zal hebben, de intuïtionistische logica, wordt dit juist niet aangenomen. [Troelstra & van Dalen (1988, pag. 10)]

Voor ik iets vertel over het ontstaan van intuïtionistische logica zal ik de opbouw van de scriptie doorlopen. De vraag die ik stel in deze scriptie is **waarom de Wroński-regels een basis vormen voor toelaatbaarheid in het implicatie-negatie fragment van intuïtionistische propositionele logica** (IPC). Om deze vraag te beantwoorden zal ik bewijzen dat de Wroński-regels een basis vormen. Daarom zal ik eerst de intuïtionistische propositionele logica formeel introduceren met daarbij een bewijssysteem en de betekenis hiervan. Vervolgens zal ik uitleggen wat toelaatbaarheid inhoudt en wat de Wroński-regels en het implicatie-negatie fragment inhouden. Een motivatie voor het bestuderen van het implicatie-negatie fragment wordt in het derde hoofdstuk gegeven. Na wat voorbereidend werk volgt een aantal lemma's, tenslotte geef ik het bewijs. Vanaf het derde hoofdstuk gebruik ik overal het artikel van George Metcalfe en Petr Cintula [Cintula & Metcalfe (2010)], tenzij anders vermeld. Om deze reden zal ik in dit hoofdstuk niet steeds opnieuw verwijzen naar het artikel.

Intuïtionistische logica is gebaseerd op de ideeën van L.E.J. Brouwer, grondlegger van de intuïtionistische wiskunde. De eerste formalisering van de intuïtionistische logica werd ontwikkeld door Arend Heyting, in 1928. Nog voor die tijd, rond 1907, zei Brouwer dat de wiskunde een constructieve definitie van het verzamelingenbegrip nodig heeft. Zo'n constructie moest volgens hem gebaseerd zijn op het concrete proces van het tellen, dat zijn oorsprong heeft in een menselijke intuïtie: de aanschouwing van de tijd. Veel klassieke bewijzen zijn gebaseerd op het reductio ad absurdum principe (RAA), het bewijs uit het ongerijmde. Als een aanname tot een tegenspraak leidt, dan is de aanname niet waar en als de ontkenning van een aanname tot een tegenspraak leidt is de aanname waar. Volgens het intuïtionisme zijn bewijzen gebaseerd op het RAA principe problematisch, omdat het principe berust op de wet van de uitgesloten derde [Guerrerio (2001)],. L.E.J. Brouwer zei hierover het volgende:

> Als we op oneindige systemen overgaan en ons afvragen of er in de decimale ontwikkeling van π de rij 0123456789 voorkomt, dan kunnen we hierop noch bevestigend noch ontkennend antwoorden. We weten niet hoe we dat zouden moeten aantonen. Omdat er buiten de menselijke constructieve geest geen wiskunde of wiskundige waarheden bestaan, hebben we dus ook het recht niet om te beweren dat in de decimale ontwikkeling van π de rij 0123456789 hetzij voorkomt, hetzij onmogelijk kan voorkomen. Het geloof aan de onbeperkte geldigheid van de wet van de uitgesloten derde in de wiskunde is voor de intuïtionist een bijgelovig dogma. [Guerrerio (2001)]

Pas als een rij 0123456789 kan worden aangetoond, of er een algoritme wordt gegeven om deze rij te construeren, dan hebben we een overtuigend bewijs. De afwijzing van bewijzen uit het ongerijmde is gebaseerd op het onderscheid tussen constructieve en niet constructieve bewijzen. Volgens intuïtionisme is het enige geldige bewijs van het bestaan van een wiskundig object het object zelf of een constructie van dat object. Een bewering als 'er is een priemgetal groter dan $10^{10^{10}}$' kan alleen bewezen worden door (constructie van) een priemgetal p dat inderdaad groter is dan $10^{10^{10}}$. De belangrijkste consequentie van de afwijzing van de wet van de uitgesloten derde is dat RAA alleen één kant op werkt: stel dat A tot een tegenspraak leidt, dan moet A wel onwaar zijn. De omgekeerde redenering; stel dat de onwaarheid van A tot een tegenspraak leidt, dan moet A wel waar zijn, wordt niet toegelaten in de intuïtionistische logica.

Uit het gedachtegoed van L.E.J. Brouwer is de intuïtionistische logica ontstaan, geformaliseerd door Arend Heyting. Arend Heyting, Andrey Kolmogorov en L.E.J. Brouwer zelf hebben ook de rol van de logische symbolen beschreven in wat de Brouwer-Heyting-Kolmogorov (BHK) wordt genoemd [Troelstra & van Dalen (1988)]. Deze beschrijving en de formalisering ervan worden behandeld in de paragraaf *Syntax*.

2 Introductie IPC

2.1 Taal

In de taal van de logica noemen we beweringen proposities, een propositie kan waar zijn of onwaar. Met behulp van connectieven kunnen we complexere beweringen representeren in de taal van de logica. Hieronder zal een formele definitie van de taal van de logica volgen.

Definitie 1 (Taal van de propositielogica)**.** [Gamut (1982, pag. 35)] De aftelbare verzameling van alle proposities noemen we P. De taal van de propositielogica L is de verzameling $L(P)$ van welgevormde formules, waarbij alle proposities welgevormde formules zijn; $p \in L(P)$ voor alle p $\in P$ en $\perp \in L(P)$ en als $\varphi, \psi \in L(P)$ dan ook $\varphi \wedge \psi$,

$\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi \in L(P)$. Verder gebruiken we $\neg\varphi$ als afkorting voor $\varphi \rightarrow \bot$ we gebruiken $\varphi \leftrightarrow \psi$ als afkorting voor $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ en $\top$ voor $\bot \rightarrow \bot$.

Voor proposities gebruiken we de letters $p, q, r, \ldots$ voor formules gebruiken we de letters φ, ψ, χ... en voor verzamelingen formules gebruiken we de hoofdletters Γ, Δ, Π enzovoort. Nu we de taal van de logica hebben gedefinieerd kunnen we beweringen vertalen naar logica. Als we bijvoorbeeld de bewering 'het regent' willen vertalen, dan zeggen we p: het regent. De bewering 'de pannetjes worden nat' noemen we bijvoorbeeld q. Nu kunnen we 'het regent, dus de pannetjes worden nat' vertalen, namelijk $p \rightarrow q$. Dat wil zeggen dat als het regent, p, dan worden de pannetjes nat, q. Proposities zijn de kleinste elementen in de taal, en door proposities te combineren met connectieven kunnen we formules bouwen. Een propositie staat voor een simpele bewering zoals 'het regent'. Met de connectieven kunnen we complexe beweringen vertalen, de connectieven staan namelijk voor voegwoorden. Het connectief $\wedge$ betekent 'en', $\vee$ betekent 'of', $\neg$ betekent 'niet', $\rightarrow$ betekent 'als...dan' en $\bot$ betekent 'tegenspraak'. In het geval van de bewering 'het regent dus de pannetjes worden nat', bouwen we van p en q de formule $\varphi : p \rightarrow q$. Als we verder de formules $\psi : p \rightarrow r$ en $\chi : p \rightarrow s$ en $\omega : p \rightarrow t$ hebben met vertaling r: ik word nat, s: de afwasteil wordt nat en t: het ikea bonnetje wordt nat, dan kunnen we deze formules verzamelen in Γ; $\Gamma = \{\varphi, \psi, \chi, \omega\}$.

2.2 Semantiek

2.2.1 Kripkemodellen

In de logica zijn beweringen waar of onwaar, vaak uitgedrukt met respectievelijk 1 of 0. Sommige beweringen veranderen van waarheid, zoals bijvoorbeeld de bewering 'het ei is kapot'. Een manier waarop de dynamiek van waarheid wordt gerepresenteerd in de intuïtionistische logica is met behulp van mogelijke werelden. Een wereld kun je zien als een kennistoestand, een verzameling van bekende feiten. Die kennistoestand kun je relateren aan andere kennistoestanden in de tijd, bijvoorbeeld de in de tijd eerstvolgende kennistoestand, of juist die vlak voor de huidige kennistoestand. Tenslotte zijn er verschillen tussen deze kennistoestanden: eerst is het ei nog heel, daarna is het kapotgevallen. Bij elke kennistoestand hoort dus een verzameling van waarheden, de dingen die op dat moment waar zijn. Deze eigenschappen van beweringen worden formeel gemaakt in Kripkemodellen, bedacht door Saul Kripke. Met Kripkemodellen kunnen we onderzoeken of een bewering waar is door een tegenmodel te zoeken. Kripkemodellen bestaan uit werelden, die noemen we w, v, u... en de verzameling werelden heet W. De opvolging van werelden in de tijd geven we aan met het symbool $\geqslant$, wat je zou kunnen vertalen als tegelijk of later dan, in plaats van groter of gelijk aan. Welke beweringen er waar zijn in een wereld geven we aan met het symbool $\Vdash$, dat spreken we uit als 'maakt waar' [Troelstra & van Dalen (1988)]. Hieronder volgt een formele definitie van Kripkemodellen.

Definitie 2 (Kripkemodel)**.** [Troelstra & van Dalen (1988)] Een Kripkemodel K is een 3-tupel $K = \langle W, \geqslant, \Vdash \rangle$ waarbij W een eindige verzameling is, de verzameling van werelden, $\geqslant$ is een reflexieve transitieve relatie op W en $\Vdash$ is een relatie tussen werelden en proposities, een relatie op $W \times L(P)$.

Zoals gezegd is $\langle W, \geqslant \rangle$ transitief en reflexief, dat wil zeggen dat:

1. $\langle W, \geqslant \rangle$ is reflexief, dus voor alle werelden $w \in W$ geldt dat $w \geqslant w$
2. $\langle W, \geqslant \rangle$ is transitief, dus als $w, v, u \in W$ en $w \geqslant v, v \geqslant u$, dan $w \geqslant u$

   Verder geldt monotoniciteit:

3. voor alle proposities p geldt dat als $v \geqslant u$ en $u \Vdash p$, dan ook $v \Vdash p$

Monotoniciteit betekent dat waarheid wordt behouden, dus als het zo is in wereld w dat het ei kapot is, dan blijft dat ook zo in alle werelden volgend op w.

We breiden nu de definitie van $\Vdash$ uit naar formules, dat wil zeggen dat we definiëren wanneer formules waar zijn in een wereld:

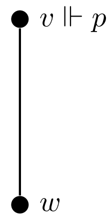
$$
\begin{array}{lcl}
w \Vdash \varphi \wedge \psi & := & w \Vdash \varphi \text{ en } w \Vdash \psi \\
w \Vdash \varphi \vee \psi & := & w \Vdash \varphi \text{ of } w \Vdash \psi \\
w \Vdash \varphi \to \psi & := & \text{als } v \Vdash \varphi \text{ dan } v \Vdash \psi \text{, voor alle werelden } v \text{ waarbij } v \geqslant w \\
w \Vdash \bot & := & \text{Tegenspraak}
\end{array}
$$

We weten nu wanneer een formule φ waar is in een wereld, geschreven als $w \Vdash \varphi$. We kunnen ook zeggen dat $\Gamma \Vdash \varphi$, dit betekent dat voor alle Kripkemodellen voor alle werelden w geldt dat als $w \Vdash \psi$ voor alle $\psi \in \Gamma$, dan ook $w \Vdash \varphi$. We gebruiken deze definitie later in het correctheidsbewijs voor IPC. Een voorbeeld van een Kripkemodel is het tegenmodel voor $\neg\neg p \to p$. Het tegenmodel staat in figuur 1. Stel we nemen aan dat $\neg\neg p$ geldt in wereld w, dat houdt in dat $w \Vdash \neg\neg p$, en $w \Vdash \neg\varphi$ kunnen we interpreteren als dat er geen wereld v is zodat $v \geqslant w$ en $v \Vdash \varphi$. Dus als $w \Vdash \neg\neg p$, dan is er geen wereld v zodat $v \geq w$ en $v \Vdash \neg p$. De enige twee werelden groter of gelijk aan w zijn w zelf en v. In v is p waar, dus daar kan $\neg p$ niet waar zijn en in w kan $\neg p$ niet waar zijn, want $v \geq w$ en met monotoniciteit weten we dat dan ook zou moeten gelden dat $v \Vdash \neg p$, maar dat leidt tot een tegenspraak. Dus we weten nu zeker dat $w \Vdash \neg\neg p$, maar $w \nVdash p$ en aangezien $w \geq w$ is de implicatie $\neg\neg p \to p$ op dit model niet waar.

Dat monotoniciteit niet alleen geldt voor proposities maar voor alle formules φ bewijzen we met inductie voor de structuur van φ, hieronder in lemma 2.1.

Lemma 2.1. Voor ieder Kripkemodel K geldt dat als $w \Vdash \varphi$, dan ook $v \Vdash \varphi$, voor elke $v \geqslant w$ en elke φ.

Bewijs. In het basisgeval is φ een propositie, zeg p. De bewering is hier duidelijk waar vanwege monotoniciteit, namelijk als $w \Vdash p$ en $v \geqslant w$, dan geldt $v \Vdash p$. In het geval dat φ van de vorm $\psi \wedge \chi$ is geldt monotoniciteit ook, want als $w \Vdash \psi \wedge \chi$, dan weten we dat



Figuur 1: Tegenmodel voor $\neg\neg p \to p$

$w \Vdash \psi$ en $w \Vdash \chi$. Met inductie weten we dat als $w \Vdash \psi$ dan ook $v \Vdash \psi$, dit geldt ook voor χ. Dan weten we dat $v \Vdash \psi \wedge \chi$ omdat $v \Vdash \psi$ en $v \Vdash \chi$.
Als φ van de vorm $\psi \vee \chi$ is geldt monotoniciteit; als $w \Vdash \psi \vee \chi$, dan weten we dat $w \Vdash \psi$ of $w \Vdash \chi$. Stel het eerste is het geval, $w \Vdash \psi$, dan weten we met inductie dat $v \Vdash \psi$ moet gelden. Zo ook voor het tweede geval. Dan weten we dat $v \Vdash \psi$ of $v \Vdash \chi$ en dus $v \Vdash \psi \vee \chi$.
Als φ van de vorm $\psi \to \chi$ is, dan geldt monotoniciteit want stel $w \Vdash \psi \to \chi$ en we nemen een arbitraire u zodanig dat $u \geqslant v$ en $u \Vdash \psi$. Nu omdat $u \geqslant w$ vanwege transitiviteit, moet gelden dat $u \Vdash \chi$. Dus moet gelden dat $v \Vdash \psi \to \chi$.
Als φ is $\perp$ dan geldt monotoniciteit, want stel $w \Vdash \perp$, dan $\perp$ dus ook $v \Vdash \perp$.

Nu we weten wanneer een bewering waar is en wanneer niet, willen we dit ook bewijzen. Daarom introduceer ik in de volgende paragraaf het bewijssysteem natuurlijke deductie.

2.3 Syntax

De informele interpretatie voor logische symbolen die we gebruiken is de (BHK) interpretatie. Deze interpretatie is impliciet te vinden in teksten van Brouwer en is expliciet gemaakt door Kolmogorov. De BHK interpretatie voor propositielogica bestaat uit de volgende uitspraken: [Troelstra & van Dalen (1988, pag. 9)],

- Een bewijs van φ en ψ wordt gegeven door middel van een bewijs van φ en een bewijs van ψ.
- Een bewijs van φ of ψ wordt gegeven door middel van een paar $\langle a, b \rangle$ waarbij $a = 0$ en b is een bewijs van φ, of $a = 1$ en b is een bewijs van ψ.
- Een bewijs van φ impliceert ψ wordt gegeven door een constructie om elk bewijs van φ in een bewijs van ψ om te zetten.
- Een bewijs van $\perp$ bestaat niet, een bewijs van $\neg\varphi$ is een constructie die elk hypothetisch bewijs van φ omzet in een bewijs van een contradictie, $\perp$.

Voor een formele interpretatie voor logische symbolen gebruiken we het bewijssysteem natuurlijke deductie. De regels van natuurlijke deductie zijn op een directe manier gebaseerd op de BHK interpretatie. Stel we hebben ψ geconcludeerd uit een hypothetisch bewijs van φ. Dan hebben we laten zien hoe je een bewijs van ψ construeert uit een bewijs van φ. Dat betekent volgens de BHK interpretatie dat we $\varphi \rightarrow \psi$ hebben gemaakt. De manier waarop we dat opschrijven in natuurlijke deductie is als volgt:

$$\cfrac{\begin{array}{c}[\varphi] \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\ \mathrm{I}{\rightarrow}$$

De vierkante haken om φ betekenen dat φ hypothetisch is. De puntjes tussen φ en ψ staan voor een afleiding en I $\rightarrow$ betekent introductieregel van de implicatie. Voor elk connectief bestaan een introductieregel en een eliminatieregel, zie figuur 2 voor een overzicht voor alle regels. De eliminatieregel van $\rightarrow$ houdt in dat als we $\varphi \rightarrow \psi$ en φ, dan mogen we ψ concluderen, want als we $\varphi \rightarrow \psi$ hebben dan kunnen we elk bewijs van φ – en dat hebben we – omzetten in een bewijs van ψ. In natuurlijke deductie is dat: [Gamut (1982, pag. 128-133)]

$$\cfrac{\varphi \qquad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}\ \mathrm{E}{\rightarrow}$$

Soms gebruiken we in bewijzen een verzameling van dingen die we al weten, een verzameling premissen. Daarom kunnen we de regels ook opschrijven zoals in figuur 3 waarbij Γ een verzameling premissen is. Als we gebruik maken van een verzameling premissen Γ dan geldt dat $\Gamma \vdash \varphi$; φ is afleidbaar uit Γ als er een afleiding bestaat voor φ met Γ. Als we geen premissen gebruiken dan schrijven we $\vdash \varphi$; φ is afleidbaar als er een afleiding bestaat voor φ zonder premissen. We kunnen de notatie in figuur 3 gebruiken voor beide gevallen: als we geen premissen gebruiken, dan is de verzameling premissen leeg.

$$\varphi$$

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ \mathrm{I}\wedge \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ \mathrm{E}_l\wedge$$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ \mathrm{E}_r\wedge$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ \mathrm{I}\vee_r \qquad\qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ \mathrm{I}\vee_l$$

$$\frac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots \\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]\\ \vdots \\ \chi\end{array}}{\chi}\ \mathrm{E}\vee$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ \mathrm{I}\to \qquad\qquad \frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}\ \mathrm{E}\to$$

$$\frac{\bot}{\varphi}\ \mathrm{E}\bot$$

$$\frac{\varphi \qquad \bot}{\neg\varphi}\ \mathrm{I}\neg \qquad\qquad \frac{\varphi \qquad \bot}{\bot}\ \mathrm{E}\neg$$

Figuur 2: Natuurlijke deductie bewijssysteem zonder verzameling premissen

$$\Gamma, \varphi \vdash \varphi$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}\ \mathrm{I}\wedge \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\ \mathrm{E}_l\wedge$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \mathrm{E}_r\wedge$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ \mathrm{I}\vee_r \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ \mathrm{I}\vee_l$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \qquad \Gamma, \varphi \vdash \chi \qquad \Gamma, \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \chi}\ \mathrm{E}\vee$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\ \mathrm{I}\!\to \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi \to \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \mathrm{E}\!\to$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ \mathrm{E}\bot$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ \mathrm{I}\neg \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}\ \mathrm{E}\ \neg$$

Figuur 3: Natuurlijke deductie bewijssysteem met verzameling premissen

De laatste twee regels kunnen we als volgt herschrijven:

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi \to \bot}\ \mathrm{I} \to \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi \to \bot}{\Gamma \vdash \bot}\ \mathrm{E} \to$$

Wanneer we niet werken met een verzameling premissen gebruiken we het eerste systeem, dat exact hetzelfde is als het tweede, behalve dat we niet steeds de verzameling premissen hoeven op te schrijven. Met natuurlijke deductie kunnen we bijvoorbeeld bewijzen dat $\neg\neg\neg\varphi \to \varphi$, zie hieronder het bewijs.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\varphi_3 \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\varphi_2 \qquad \neg\varphi_1}{\bot}\ \mathrm{E}\ \neg}{\neg\neg\varphi}\ \mathrm{I}\neg_{,2}}{\varphi \to \neg\neg\varphi}\ \mathrm{I}\!\to_{,1}}{\neg\neg\varphi}\ \mathrm{E}\!\to \qquad \neg\neg\neg\varphi_4}{\bot}\ \mathrm{E}\neg}{\cfrac{\neg\varphi}{\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi}\ \mathrm{I}\!\to_{,4}}\ \mathrm{I}\neg_{,3}$$

Wat hier in woorden staat is, van boven naar beneden, als we φ en $\neg\varphi$ aannemen, hebben we een tegenspraak volgens de eliminatieregel van $\neg$. Nu, met de introductieregel van $\neg$ kunnen we concluderen dat als we op basis van de aanname $\neg\varphi$ tot een tegenspraak $\perp$ komen, dan kan $\neg\varphi$ niet waar zijn. Dus $\neg\varphi$ is niet waar: $\neg\neg\varphi$. We hebben dus onder de aanname dat φ een afleiding gevonden hebben van $\neg\neg\varphi$. Volgens de introductieregel van $\rightarrow$ mogen we concluderen dat $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$. Stel nu dat φ waar is en we weten dat $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$ (dat wil zeggen als φ waar is, dan is $\neg\neg\varphi$ waar) dan weten we dat $\neg\neg\varphi$, volgens de eliminatieregel van $\rightarrow$. Stel nu dat ook $\neg\neg\neg\varphi$ waar is, dat is in tegenspraak met $\neg\neg\varphi$, dus $\perp$, volgens de eliminatieregel van $\neg$. Dus we zijn onder de eerste aanname dat φ uiteindelijk tot een tegenspraak gekomen. Volgens de introductieregel van $\neg$ kan φ dus niet waar zijn: $\neg\varphi$. Nu hebben we onder de aanname dat $\neg\neg\neg\varphi$ een afleiding gevonden voor $\neg\varphi$, dus mogen we volgens de introductieregel van $\rightarrow$ concluderen dat $\neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$, en dat was wat we wilden bewijzen. Alle aannames zijn ook ingetrokken, aangegeven met nummers naast de formule waar we worden aangegeven en met corresponderende nummers op de plek waar ze worden ingetrokken. Dus is het bewijs geldig.

We kunnen niet alleen dingen bewijzen met natuurlijke deductie, maar ook óver natuurlijke deductie. Een voorbeeld hiervan is het bewijs dat als φ afleidbaar is uit een verzameling formules Γ en we hebben nog een verzameling formules, Δ waarvoor geldt dat die alle formules in Γ afleidt, dan leidt Δ ook φ af. Hieronder het bewijs.

Lemma 2.2. Als $\Gamma \vdash \varphi$ en $\Pi \vdash \psi$ voor alle $\psi \in \Gamma$, dan $\Pi \vdash \varphi$

Bewijs We nemen aan dat $\Gamma \vdash \varphi$ en $\Pi \vdash \psi$ voor alle $\psi \in \Gamma$. We weten dat $\Gamma \vdash \varphi$ en dus ook dat $\Pi, \Gamma \vdash \varphi$. We laten zien dat $\Pi \vdash \varphi$.
Stel $\Gamma = \emptyset$, dan $\Pi \vdash \varphi$, want $\Gamma, \Pi \vdash \varphi$. Stel $\Gamma \neq \emptyset$ en $\chi \in \Gamma$ en $\Gamma' = \Gamma \backslash \chi$. Dan bestaat Γ uit $\Gamma \cup \{\chi\}$. We weten dat $\Pi \vdash \chi$, want $\chi \in \Gamma$. Verder weten we dat $\Gamma, \Pi \vdash \varphi$, en dus $\Pi, \Gamma', \chi \vdash \varphi$. We gebruiken nu regel 2 (zie hoofdstuk 4) om te concluderen dat $\Gamma', \Pi \vdash \varphi$. We kunnen deze stap herhalen voor elke $\psi \in \Gamma$ tot dat $\Gamma' = \emptyset$, en dan hebben we $\Gamma', \Pi \vdash \varphi$ en dus $\Pi \vdash \varphi$. $\square$

2.4 Correctheid en Volledigheid

Tussen de twee systemen die ik heb behandeld bestaat een relatie, alles wat bewijsbaar is in natuurlijke deductie is waar op elk Kripkemodel, en andersom. Dit wordt genoteerd als $\Gamma \Vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$. Correctheid houdt in dat alles dat waar is op elk Kripkemodel ook bewijsbaar is, volledigheid houdt in dat alles dat bewijsbaar is, ook waar is op elk Kripkemodel. Correctheid zal ik hieronder bewijzen, voor volledigheid verwijs ik naar Troelstra en van Dalen [Troelstra & van Dalen (1988, pag. 87-93)]. Correctheid zegt dat als $\Gamma \vdash \varphi$, dat dan voor alle modellen voor alle werelden w geldt dat als $w \Vdash \psi$ voor alle $\psi \in \Gamma$, dan ook $w \Vdash \varphi$. Je kunt $\Gamma \vdash \varphi$ ook zien als $\vdash (\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \ldots \wedge \gamma_n) \rightarrow \varphi$, voor alle $\gamma \in \Gamma$, dan is $(\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \ldots \wedge \gamma_n) \rightarrow \varphi$ een tautologie. Het is niet moeilijk om aan te voelen dat elke tautologie waar moet zijn in elke wereld van elk Kripkemodel.

Lemma 2.3. Voor elke verzameling formules Γ en elke formule φ geldt dat als $\Gamma \vdash \varphi$ dan ook $\Gamma \Vdash \varphi$

Bewijs. Laat Γ een verzameling formules zijn en φ een formule. Stel dat $\Gamma \vdash \varphi$. We gebruiken de structuur van het bewijs van φ, dat wil zeggen dat als we weten dat $\Gamma \vdash \varphi$, dan is φ de conclusie van een natuurlijke deductie bewijs, met verschillende mogelijkheden voor de laatst toegepaste regel. Een mogelijkheid is dat φ de conclusie van een natuurlijke deductie bewijs met als laatst toegepaste regel de $\wedge$ introductieregel is. Voor een aantal van de gevallen laat ik zien dat correctheid geldt.

Stel $\varphi \in \Gamma$. We laten zien dat $\Gamma \Vdash \varphi$. Aangezien $\varphi \in \Gamma$, weten we zeker dat als w alle formules in Γ waar maakt, dat w ook φ waar maakt en weten we dus $\Gamma \Vdash \varphi$.

Stel φ is afgeleid door middel van de $\wedge$ introductieregel. Dan is φ van de vorm $\psi \wedge \chi$ en we weten dat $\Gamma \vdash \psi$ en $\Gamma \vdash \chi$. Met inductie weten we nu dat $\Gamma \Vdash \psi$ en $\Gamma \Vdash \chi$, en we weten dat voor een arbitraire wereld w in een arbitrair model geldt dat als $w \Vdash \pi$ voor alle $\pi \in \Gamma$ dat $w \Vdash \psi$ en $w \Vdash \chi$ en dus $w \Vdash \psi \wedge \chi$, daarom weten we nu ook dat $\Gamma \Vdash \psi \wedge \chi$, ofwel $\Gamma \Vdash \varphi$.

Stel φ is afgeleid door middel van de $\vee_l$ of $\vee_r$ introductieregel. Dan is φ van de vorm $\psi \vee \chi$. Als geldt dat $\Gamma \vdash \psi \vee \chi$, dan moet gelden in het geval van $\vee_r$ dat $\Gamma \vdash \psi$, in het geval van $\vee_l$ dat $\Gamma \vdash \chi$. In het eerste geval weten we met inductie dat $\Gamma \Vdash \psi$ moet gelden. Ook weten we dat als een arbitraire wereld w in een arbitrair model alle formules in Γ waar maakt, dat w dan ook ψ waar maakt, en als $w \Vdash \psi$, dan ook $w \Vdash \psi \vee \chi$, en dus $\Gamma \Vdash \psi \vee \chi$, ofwel $\Gamma \Vdash \varphi$. Het tweede geval gaat vergelijkbaar.

Stel φ is afgeleid door middel van de $\to$ introductieregel. Dan is φ van de vorm $\psi \to \chi$. We weten dat $\Gamma, \psi \vdash \chi$ en met inductie weten we dat $\Gamma, \psi \Vdash \chi$. We nemen nu een arbitraire wereld w in een arbitrair model en we nemen aan dat $w \Vdash \pi$ voor alle $\pi \in \Gamma$. Als $w \Vdash \psi$ dan $w \Vdash \chi$ en voor alle werelden v zodat $v \geqslant w$ geldt dan ook $v \Vdash \psi$. Nu omdat $\Gamma, \psi \Vdash \chi$ weten we dat moet gelden $v \Vdash \chi$, dus vanwege de definitie van $w \Vdash \psi \to \chi$ geldt inderdaad dat $w \Vdash \psi \to \chi$.

Stel φ is afgeleid door middel van de $\to$ eliminatieregel. Dan weten we dat er een formule ψ bestaat zodat $\Gamma \vdash \psi$ en $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$. Met inductie weten we dat moet gelden $\Gamma \Vdash \psi$ en $\Gamma \Vdash \psi \to \varphi$. Neem nu aan dat er een arbitraire wereld w bestaat zodat $w \Vdash \gamma$ voor alle $\gamma \in \Gamma$. We weten dat $w \Vdash \psi$ en $w \Vdash \psi \to \varphi$. Hieruit volgt dat $w \Vdash \varphi$, vanwege de definitie van $w \Vdash \psi \to \varphi$ en het feit dat $w \geqslant w$. $\square$

3 Voorbereiding

Het bewijs dat de Wroński-regels een basis vormen voor toelaatbaarheid in het implicatie-negatie fragment van IPC vereist wat voorbereidend werk. In deze paragraaf zal ik een aantal concepten introduceren die nodig zijn voor het bewijs, waaronder de axioma's en regels waar ik de rest van de scriptie vanuit zal gaan.

Implicatie-negatie fragment Het implicatie-negatie fragment van IPC is IPC maar dan zonder de connectieven $\vee$ en $\wedge$. Het implicatie-negatie fragment bestaat alleen uit de connectieven $\perp$ en $\rightarrow$, het connectief $\neg\varphi$ kunnen we nog steeds uitdrukken als $\varphi \rightarrow \perp$. Afhankelijk van wat handiger is gebruik ik de ene keer $\varphi \rightarrow \perp$ en de andere keer $\neg\varphi$. Het is interessant om naar dit specifieke fragment te kijken, omdat het implicatie-negatie fragment van IPC niet structureel compleet is, dat wil zeggen dat niet alle toelaatbare regels ook afleidbaar zijn [Wroński (1986)]. Dit geldt ook voor IPC in het algemeen, maar niet voor het implicatie fragment, het implicatie-conjunctie fragment, het implicatie-conjunctie-negatie fragment en implicatieloze fragmenten [Wroński & Minari (1988), Prucnal (1973)]. Ook bestaan er toelaatbare regels voor het implicatie-negatie fragment die voor andere fragmenten van IPC niet toelaatbaar zijn.

Substituties Substitueren betekent vervangen. Het substitueren van een formule houdt in dat alle variabelen in de formule mogen worden vervangen door een welgevormde formule uit de taal. De connectieven mogen niet vervangen worden, die blijven behouden. Dat blijkt ook uit de regels voor substitutie hieronder. Ik geef alleen regels voor de implicatie en het falsum, omdat we de andere connectieven niet zullen gebruiken.

Definitie 3. Een substitutie is een functie van formule naar formules zodat het volgende geldt:

$$\sigma(p \rightarrow q) = \sigma(p) \rightarrow \sigma(q)$$
$$\sigma(\perp) = \perp$$

Verder geldt voor alle variabelen dat elk voorkomen van een variabele p dezelfde substitutie moet hebben, dus $\sigma(p) = \sigma(p)$ voor alle voorkomens van een variabele p in een formule φ. Ik zal twee voorbeelden van een substitutie geven, waarvan het laatste voorbeeld wordt gebruikt in het bewijs.

Voorbeeld 1. Stel we hebben de formule $\varphi : q \rightarrow (p \rightarrow p)$ dan zou een mogelijke substitutie zijn $\sigma\varphi = ((p \rightarrow (r \rightarrow s)) \rightarrow ((s \rightarrow t) \rightarrow (s \rightarrow t))$ waarbij $\sigma(q) = p \rightarrow (r \rightarrow s)$ en $\sigma(p) = s \rightarrow t$. Merk op dat $\sigma\varphi = ((p \rightarrow (r \rightarrow s)) \rightarrow ((s \rightarrow t) \rightarrow t)$ géén mogelijke substitutie is, omdat $\sigma(p)$ niet hetzelfde is voor alle voorkomens van p.

Voorbeeld 2. We kunnen ook binnen een formule alle variabelen door hetzelfde vervangen. Als we alle variabelen willen vervangen door $\top$ noteren we dat als $\sigma(p) = \top$ voor alle p. Stel we hebben een formule φ: $(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow s) \rightarrow t)$, dan $\sigma\varphi = (\top \rightarrow \top) \rightarrow ((\top \rightarrow \top) \rightarrow \top)$.

Toelaatbaarheid Een regel is toelaatbaar als deze kan worden toegevoegd aan een logica, zonder dat dit nieuwe theorema's oplevert. In klassieke logica zijn toelaatbare regels ook afleidbaar, maar voor intuïtionistische logica is dat over het algemeen niet zo. Hieronder de formele definities van afleidbaarheid en toelaatbaarheid. Een regel is een paar van verzamelingen van formules geschreven als Γ/Δ. Alle regels van natuurlijke deductie zijn voorbeelden van regels. De regel Γ/Δ noemen we een single-conclusion regel als er hoogstens één formule φ in Δ zit, als er meerdere formules inzitten noemen we het een multiple-conclusion regel.

Definitie 4 (Afleidbaarheid)**.** Een regel Γ/Δ is afleidbaar als $\Gamma \vdash \varphi$ voor minstens één $\varphi \in \Delta$.

Definitie 5 (Toelaatbaarheid)**.** Een regel is toelaatbaar, genoteerd $\Gamma \mathrel{|\!\sim} \Delta$, als het zo is dat voor alle substituties σ geldt dat als $\vdash \sigma\varphi$ voor alle $\varphi \in \Gamma$ er een ψ in Δ bestaat zodat $\vdash \sigma\psi$.

In woorden moet een regel aan een bepaalde voorwaarde voldoen om toelaatbaar te zijn, namelijk: welke substitutie je ook neemt, als voor alle formules in Γ geldt dat hun substitutie afleidbaar is, dan móet er een formule in Δ bestaan van welke de substitutie afleidbaar is.

Voorbeeld 3. Een voorbeeld van een toelaatbare regel is $\varphi \to (\psi \to \chi) \ / \ (\varphi \wedge \psi) \to \chi$. De regel is afleidbaar, daardoor geldt dat voor elke substitutie σ dat als $\vdash \sigma(\varphi \to (\psi \to \chi))$ dat dan ook geldt dat $\vdash \sigma((\varphi \wedge \psi) \to \chi)$

Multisets & Multiset ordening Een multiset is hetzelfde als een verzameling, alleen mogen elementen meerdere keren voorkomen in een multiset terwijl dat niet mag in verzamelingen. Een multiset M van een verzameling A kan worden gezien als een functie van $A \to \mathbb{N}$. In het bewijs worden multisets gebruikt voor de complexiteit van formules.

Voorbeeld 4. Een voorbeeld zou zijn als we de verzameling van ijssmaken bij een ijskraam nemen, bijvoorbeeld I = {aardbei, chocolade, citroen, vanille, bosbessen, pistache, straciatella} en aan elke smaak een cijfer tussen 1 en 10 toekennen, bijvoorbeeld chocolade en citroen krijgen een 10, bosbessen een 9, aardbei en vanille een 7, en straciatella en pistache een 6. Dan kunnen we de multiset van smaakbeoordelingen B nemen waarbij we elke smaak in I naar een smaakbeoordeling sturen, dus elk element naar een natuurlijk getal sturen. De besproken beoordeling is als volgt: B = {10,10,9,7,7,6,6}

Multisets kunnen op volgorde worden gezet volgens een multiset ordening. Het bewijs maakt gebruik van de standaard multiset ordening $\prec$ waarbij een multiset P $\prec$ Q voor twee multisets van formules Q verkregen kan worden door een element x uit P te vervangen door een eindig aantal elementen $y_1, y_2, \ldots y_n$ zodanig dat voor elke y_i geldt $y_i < x$. Wanneer we een rijtje multisets hebben zodat $P \prec Q \prec R$, dan kunnen er maar eindig veel multisets S zijn zodat $S \prec P$, dat wil zeggen, als we steeds de stap blijven nemen dat we een element vervangen door een rijtje meer eenvoudige elementen, dan kunnen we dit slechts een eindig aantal keer doen [Dershowitz & Manna (1979)]. Dit kan ik uitleggen aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld 5. Stel je hebt een multiset met één element, namelijk een briefje van 500 euro. Als we nu elk element in S kunnen vereenvoudigen door het te vervangen door een aantal elementen van lagere complexiteit, in dit geval briefjes van minder dan 500, dan kunnen we dit slechts een eindig aantal keer doen. We kunnen bijvoorbeeld het briefje van 500 vervangen door 30 briefjes van 100, dan elk briefje van 100 vervangen door 5 briefjes van 50, en elk briefje van 50 vervangen door 10 briefjes van 10, en elk briefje van 10 vervangen door 12 muntstukken van 2 en elk muntstuk van 2 vervangen door 5 muntstukken van 1, dan elk muntstuk van 1 vervangen door 50 muntstukken van 0.10 en elke muntstuk van 0.10 vervangen door 200 muntstukken van 0.01, maar dan houdt het op. Je kunt misschien alle muntstukken van 0.01 vervangen door ... niks? Maar dan heb je niks. Dan kun je niks meer inruilen. Dit is natuurlijk geen bewijs, maar wel een voorbeeld om aan te voelen dat de operatie van het steeds vereenvoudigen een einde heeft.

Complexiteit van een formule De complexiteit van een formule in het implicatie-negatie fragment wordt gezien als het aantal voorkomens van $\to$ en $\perp$. De complexiteit bijvoorbeeld van $\varphi : p \to (q \to \perp)$ is 3, dat noteren we als $c(\varphi) = 3$. Voor verzamelingen formules Γ wordt de multiset van complexiteiten gebruikt. Stel $\Gamma = \{p, q, \perp, p \to q, q \to \perp, (p \to \perp) \to q\}$ dan hebben we de multiset van complexiteiten van Γ, $mc(\Gamma) = \{1, 1, 2, 3\}$. Merk op dat formules met complexiteit 0 niet worden meegenomen in de multiset.

Multisets van complexiteiten Als we het over verzamelingen formules Γ hebben en we zien de complexiteiten van de formules in Γ als elementen van de multiset $mc(\Gamma)$, dan geldt dat Γ' eenvoudiger is dan Γ voor twee verzamelingen formules Γ en Γ' als we Γ' kunnen verkrijgen door een formule φ in Γ te vervangen door een eindig aantal formules $\psi_1, \psi_2, \ldots$ zodat $c(\psi_i) < c(\varphi)$ voor elke ψ_i. De verzameling formules Γ' is eenvoudiger dan Γ, want Γ' bevat minder complexere formules dan Γ. Hoe dit precies in zijn werk gaat wordt verder uitgelegd in paragraaf 5.1.

Vorm van een formule Alle formules in het implicatie-negatie fragment zijn te verdelen in twee vormen: ofwel de formule eindigt op een propositionele variabele, ofwel op $\perp$. Om deze twee vormen af te korten kunnen we gebruik maken van de volgende notatie. Formules die eindigen op een propositionele variabele q zijn van de vorm $\vec{\varphi} \to q$, formules die eindigen op $\perp$ zijn van de vorm $\vec{\varphi} \to \perp$. $\vec{\varphi} \to \psi$ is een afkorting voor $\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\varphi_3 \to ... \to (\varphi_n \to \psi)...)$ met $n \in \mathbb{N}$. Als $n = 0$ voor $\vec{\varphi} \to \perp$, dan hebben we $\perp$, als $n = 0$ voor $\vec{\varphi} \to q$, dan hebben we q. Verder schrijf ik af en toe geen haakjes in formules als $\varphi_1 \to \varphi_2 \to \varphi_3 \to ... \to \varphi_n \to \perp$, dan moet de formule worden geïnterpreteerd als $(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\varphi_3 \to (... \to (\varphi_n \to \perp)...))))$. We noemen een formule 'eenvoudig' als deze van een van de volgende vormen is:

$\vec{p} \to \perp$

$\vec{\varphi} \to r$, waarbij elke φ_i van de vorm $p \to q$ of p is.

Voorbeeld 6. Neem bijvoorbeeld de formule $p \to q$. Deze formule is van de vorm $\vec{\varphi} \to q$ met $n = 1$, waarbij $\varphi : p$. Deze formule is eenvoudig. De formule $(p \to q) \to \bot$ is van de vorm $\vec{\varphi} \to \bot$, met $n = 1$ en $\varphi : p \to q$. Deze formule is niet eenvoudig. Merk op dat het ook niet zo is dat deze formule van de vorm $\vec{\varphi} \to \bot$ met $n = 2$ en $\varphi_1 : p$ en $\varphi_2 : q$, dit past niet in de vorm $\vec{\varphi} \to \bot$ vanwege de volgorde van de haakjes. Voor $p \to (q \to \bot)$ zou het wel gelden dat de formule van de vorm $\vec{\varphi} \to \bot$ is met $n = 2$ en $\varphi_1 : p$ en $\varphi_2 : q$, deze formule is overigens ook eenvoudig.

4 Bewijs: het eerste lemma

We willen bewijzen dat de Wroński-regel een basis vormt voor toelaatbaarheid. Een basis is een verzameling toelaatbare regels die, als je hem toevoegt aan de logica, *precies* alle toelaatbare regels produceert. Een basis voor IPC bestaat uit verzamelingen van de Wroński-regel. Hieronder de Wroński-regel:

$$(W_n) \qquad (\vec{p} \to \bot)/(\neg\neg p_1 \to p_1), ..., (\neg\neg p_n \to p_n)$$

We maken gebruik van de volgende axioma's en regels waarbij $\Gamma \vdash_w \varphi$ betekent dat $\Gamma \cup \{W_n\} \vdash \varphi$ met $n \in \mathbb{N}$.

Axioma's:

1. $\varphi \vdash_w \varphi$

2. $\Gamma \vdash_w \Delta$ als $\Gamma \vdash_w \varphi$ voor $\varphi \in \Delta$

3. $\vec{p} \to \bot \vdash_w \{\neg\neg p \to p \mid p \in \vec{p}\,\}$

Regels:

1. $$\frac{\Gamma \vdash_w \Delta}{\Gamma', \Gamma \vdash_w \Delta, \Delta'}$$

2. $$\frac{\Gamma, \varphi \vdash_w \Delta \qquad \Gamma \vdash_w \varphi, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash_w \Delta, \Delta'}$$

3. $$\frac{\Gamma \vdash_w \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash_w \sigma(\Delta)}$$

Lemma 4.1. (W_n) is toelaatbaar voor alle $n \in \mathbb{N}$ in het implicatie-negatie fragment van IPC.

Bewijs. Om dit te bewijzen nemen we een willekeurige σ aan en we nemen aan dat $\sigma(\vec{p} \to \bot)$ afleidbaar is, dus $\vdash \sigma(\vec{p} \to \bot)$. Als $n = 0$, dan $\sigma(\vec{(p)} \to \bot) = \bot$ en zou $\bot$ afleidbaar zijn. Omdat we een consistente logica hebben, kan dit niet. Dus $n > 0$. Er moet een p_i zijn in $\vec{p} \to \bot$ zodanig dat $\sigma(p_i)$ van de vorm $\vec{\varphi} \to \bot$ is, anders komen we tot een tegenspraak. Stel namelijk dat alle p_i in $\vec{p} \to \bot$ van de vorm $\vec{\varphi} \to q$ zijn. Als we dan de substitutie $\sigma'(p) = \top$ voor alle p nemen en we passen deze toe op $\sigma(\vec{p} \to \bot)$, dan krijgen we dit:

$$
\begin{aligned}
& \sigma'(\sigma(\vec{p} \to \bot)) \\
&= \sigma'(\sigma(p_1) \to \sigma(p_2) \to \sigma(p_3) \to \ldots \to \sigma(p_n) \to \sigma(\bot)) \\
&= \sigma'((\vec{\varphi_1} \to q_1) \to (\vec{\varphi_2} \to q_2) \to ... \to (\vec{\varphi_n} \to q_n) \to \bot \\
&= \sigma'(\vec{\varphi_1} \to q_1) \to \sigma'(\vec{\varphi_2} \to q_2) \to ... \to \sigma'(\vec{\varphi_n} \to q_n) \to \sigma'(\bot) \\
&= (\vec{\top} \to \top) \to (\vec{\top} \to \top) \to \ldots \to (\vec{\top} \to \top) \to \bot \\
&\equiv \top \to \top \to \top \to \bot \\
&\equiv \top \to \bot \\
&\equiv \bot
\end{aligned}
$$

Aangezien we tot een tegenspraak komen wanneer we aannemen dat alle p_i in $\vec{p} \to \bot$ van de vorm $\vec{\varphi} \to q$ zijn, kan dit niet zo zijn. Omdat alle formules van één van de twee eerder genoemde vormen zijn, moet er wel een p_i in $\vec{p} \to \bot$ bestaan van de vorm $\vec{\varphi} \to \bot$. We nemen nu deze $p_i : \vec{\varphi} \to \bot$. We onderscheiden drie gevallen. In alle drie de gevallen dienen we te laten zien dat $\neg\neg p_i \to p_i$, dan is het gewenste bewezen. In het eerste geval geldt $n = 0$, we hebben dan $p_i : \bot$. Voor $p_i : \bot$ geldt $\neg\neg p_i \to p_i$, want:

$$
\begin{aligned}
& \neg\neg\bot \to \bot \\
&= \neg(\bot \to \bot) \to \bot \\
&= ((\bot \to \bot) \to \bot) \to \bot
\end{aligned}
$$

En $\vdash ((\bot \to \bot) \to \bot) \to \bot$, want:

$$
\dfrac{\dfrac{\bot \to \bot \qquad \dfrac{\bot_1}{(\bot \to \bot) \to \bot_2}\,\mathrm{I}\to 1}{\bot}\,\mathrm{E}\to}{((\bot \to \bot) \to \bot) \to \bot}\,\mathrm{I}\to 2
$$

In het tweede geval geldt $n = 1$, we hebben dan $p_i : p \to \bot$. Dat is te herschrijven naar $\neg p$, en $\vdash \neg\neg\neg p \to \neg p$, want we hebben eerder bewezen dat $\vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$.

In het derde geval geldt $n > 1$, we hebben dan $p_1 \to p_2 \to ... \to p_n \to \bot$ en $p_1 \to p_2 \to ... \to p_n \to \bot \equiv (p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n) \to \bot$. Dit volgt uit het feit dat $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \to \chi)$, zie hieronder voor het bewijs. We noemen $(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n)$ hier φ, nu hebben we $\varphi \to \bot$, en $\varphi \to \bot \equiv \neg\varphi$. Als we nu $\neg\varphi$ invullen in $\neg\neg p_i \to \neg p_i$ krijgen we $\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$ en zoals eerder bewezen geldt $\vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$. $\square$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\varphi \wedge \psi_1$}
\RightLabel{E$\wedge_r$}
\UnaryInfC{ψ}
\AxiomC{$\varphi \wedge \psi_1$}
\RightLabel{E$\wedge_l$}
\UnaryInfC{φ}
\AxiomC{$\varphi \to (\psi \to \chi)_2$}
\RightLabel{E$\to$}
\BinaryInfC{$\psi \to \chi$}
\RightLabel{E$\to$}
\BinaryInfC{χ}
\RightLabel{I$\to_1$}
\UnaryInfC{$(\varphi \wedge \psi) \to \chi$}
\RightLabel{I$\to_2$}
\UnaryInfC{$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \wedge \psi) \to \chi)$}
\AxiomC{φ_3}
\AxiomC{ψ_4}
\RightLabel{I$\wedge$}
\BinaryInfC{$\varphi \wedge \psi$}
\AxiomC{$(\varphi \wedge \psi) \to \chi_5$}
\RightLabel{E$\to$}
\BinaryInfC{χ}
\RightLabel{I$\to_4$}
\UnaryInfC{$\psi \to \chi$}
\RightLabel{I$\to_3$}
\UnaryInfC{$\varphi \to (\psi \to \chi)$}
\RightLabel{I$\to_5$}
\UnaryInfC{$((\varphi \wedge \psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$}
\RightLabel{I$\wedge$}
\BinaryInfC{$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \to \chi)$}
\end{prooftree}
$$

5 Bewijs: het tweede lemma

5.1 Voorbereiding van het tweede lemma

Wanneer we een verzameling formules Γ hebben, dan noemen we Γ eenvoudig, als deze alleen formules van eenvoudige vorm bevat. Wanneer een verzameling Γ niet eenvoudig is, kunnen we door een aantal herschrijvingen te doen de verzameling eenvoudig maken. Zo'n stap noemen we een vereenvoudiging, en noteren we met $\Gamma \rightarrowtail \Pi$ wat je kunt lezen als Γ vereenvoudigt tot Π. Als een verzameling Γ eenvoudig is, dan houdt dat in dat er geen Π bestaat zodanig dat $\Gamma \rightarrowtail \Pi$. Verder geldt dat als $\Gamma \rightarrowtail \Pi$ dan is de multiset van complexiteiten van Π kleiner dan de multiset van complexiteiten van Γ, $mc(\Pi) \prec mc(\Gamma)$. Alle formules die niet van eenvoudige vorm zijn, zijn van één van de volgende vormen:

$\bot \to \varphi$

$(\varphi_1 \to \varphi_2) \to \psi$ waarbij φ_1 en φ_2 niet beiden propositionele variabelen zijn

$(p \to q) \to \vec{\varphi} \to \bot$

Opgemerkt moet worden dat de antecedenten van elk van deze drie formules omgewisseld mogen worden. Wanneer je de antecedenten van een formule omwisselt, dan is de formule die je na het omwisselen hebt gekregen equivalent aan de eerste, want $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \leftrightarrow (\psi \to (\varphi \to \chi))$, zie hieronder voor het bewijs:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{ψ_3}
\AxiomC{φ_1}
\AxiomC{$\varphi \to (\psi \to \chi)_2$}
\RightLabel{E$\to$}
\BinaryInfC{$\psi \to \chi$}
\RightLabel{E$\to$}
\BinaryInfC{χ}
\RightLabel{I$\to_1$}
\UnaryInfC{$\varphi \to \chi$}
\RightLabel{I$\to_3$}
\UnaryInfC{$\psi \to (\varphi \to \chi)$}
\RightLabel{I$\to_2$}
\UnaryInfC{$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$}
\AxiomC{φ_5}
\AxiomC{ψ_4}
\AxiomC{$\psi \to (\varphi \to \chi)_6$}
\RightLabel{E$\to$}
\BinaryInfC{$\varphi \to \chi$}
\RightLabel{E$\to$}
\BinaryInfC{χ}
\RightLabel{I$\to_4$}
\UnaryInfC{$\psi \to \chi$}
\RightLabel{I$\to_5$}
\UnaryInfC{$\varphi \to (\psi \to \chi)$}
\RightLabel{I$\to_6$}
\UnaryInfC{$(\psi \to (\varphi \to \chi)) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$}
\RightLabel{I$\wedge$}
\BinaryInfC{$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \leftrightarrow (\psi \to (\varphi \to \chi))$}
\end{prooftree}
$$

Voorbeeld 7. Als we de formule $p \to (\bot \to q)$ hebben, dan is deze niet van eenvoudige vorm, want het past niet op de eerste vorm $\vec{p} \to \bot$, omdat de formule niet in een $\bot$ eindigt, en niet op de tweede vorm $\vec{\varphi} \to r$ omdat niet alle φ_i van de vorm p of $p \to q$ zijn, namelijk $\bot$ is dat niet. De formule is van de vorm $\bot \to \varphi$, waarbij de antecedenten p en $\bot$ zijn omgewisseld. Dit mag omdat $p \to (\bot \to q) \equiv \bot \to (p \to q)$.

Ik zal nu de regels geven volgens welke we niet-eenvoudige formules herschrijven naar formules van eenvoudige vorm. Als we een formule van de vorm $\bot \to \varphi$ hebben, vereenvoudigen we de formule naar niks, omdat het een tautologie is. Als we een niet-eenvoudige formule van de vorm $(\varphi_1 \to \varphi_2) \to \chi$ hebben, dan vereenvoudigen we de formule naar de volgende drie formules: $p \to \varphi_1$, $\varphi_2 \to q$ en $(p \to q) \to \chi$. Als we tenslotte een formule van de vorm $(p \to q) \to \vec{\varphi} \to \bot$ hebben, dan vereenvoudigen we de formule naar de volgende formules: $q \to \vec{\varphi} \to \bot$ en $(p \to q) \to \vec{\varphi} \to p$.

Definitie 6 (Vereenvoudigen)**.** Als we een formule $\varphi \in \Gamma$ hebben van niet-eenvoudige vorm, dan kunnen we Γ' verkrijgen uit Γ zodat $\Gamma \rightarrowtail \Gamma'$ door Γ te vereenvoudigen volgens de regels hieronder. Het idee is dat we de formule φ vervangen door een eindig rijtje formules $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n$ zodat voor elke ψ_i geldt dat $c(\psi_i) < c(\varphi)$. De verzameling formules zonder φ maar met het nieuwe rijtje formules $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n$ noemen we Γ', ofwel $\Gamma' = \Gamma \backslash \varphi \cup \{\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n\}$.

$$
\begin{aligned}
&\Gamma[\bot \to \psi] \rightarrowtail \Gamma' \\
&\Gamma[(\psi_1 \to \psi_2) \to \chi] \rightarrowtail \Gamma'[p \to \psi_1, \psi_2 \to q, (p \to q) \to \chi] \\
&\Gamma[(p \to q) \to \vec{\psi} \to \bot] \rightarrowtail \Gamma'[q \to \vec{\psi} \to \bot, (p \to q) \to \vec{\psi} \to p]
\end{aligned}
$$

Wanneer we een verzameling formules op deze manier vereenvoudigen, dus bijvoorbeeld $\Gamma \rightarrowtail \Gamma'$, dan is multiset van complexiteiten van Γ' kleiner in de multiset ordening dan Γ, dus $mc(\Gamma') < mc(\Gamma)$. Hieronder een bewijs:

Lemma 5.1. $\Gamma \rightarrowtail \Gamma' \Rightarrow mc(\Gamma') < mc(\Gamma)$

Bewijs. We nemen aan dat $\Gamma \rightarrowtail \Gamma'$. Dan weten we dat er een formule $\pi \in \Gamma$ die niet van eenvoudige vorm is. We bewijzen de claim voor drie gevallen. In het eerste geval is π van de vorm $\bot \to \varphi$. Door het voorkomen van één $\to$ en één $\bot$ is $c(\pi) = 2 + c(\varphi)$ aangezien we $c(\varphi)$ niet weten, zeggen we $c(\varphi) = x$, dus $c(\pi) = x + 2$. Omdat we formules van de vorm $\bot \to \varphi$ vervangen met niks, en de complexiteit van niks 0 geldt $x + 2 > 0$ en dus geldt voor elke formule in het rijtje vervangende formules, namelijk geen, dat deze een lagere complexiteit hebben dan de complexiteit van π, en dus geldt $\Gamma' \prec \Gamma$.

In het tweede geval is π van de vorm $(\varphi_1 \to \varphi_2) \to \chi$. Laat $c(\varphi_1) = x$, $c(\varphi_2) = y$ en $c(\chi) = z$, dus $c(\pi) = x + y + z + 2$. De vervangende formules zijn $\psi_1 : (p \to q) \to \chi$, $\psi_2 : p \to \varphi_1$ en $\psi_3 : \varphi_2 \to q$. Deze formules hebben allemaal een lagere complexiteit dan π, want $c(\psi_1) = z + 2$ en $z + 2 < x + y + z + 2$ wanneer $x + y > 0$ en dat is zo want φ_1

en φ_2 zijn niet beiden propositionele variabelen en dus is de complexiteit van een van de twee groter dan 1. Verder geldt $c(\psi_2) = x + 1$ en $x + 1 < x + y + z + 2$ en tenslotte $c(\psi_3) = y + 1$ en $y + 1 < x + y + z$.

In het derde geval is π van de vorm $(p \to q) \to \vec{\varphi} \to \bot$. De complexiteit van $\vec{\varphi} \to \bot$ noemen we x, $c(\vec{\varphi} \to \bot) = x$ dus $c(\pi) = x + 2$. De vervangende formules ψ_1 en ψ_2 zijn allebei lager in complexiteit dan π, want $\psi_1 : q \to \vec{\varphi} \to \bot$ en $c(\psi_1) = x + 1$ en we weten dat $x + 1 < x + 2$. Verder hebben we $\psi_2 : (p \to q) \to \vec{\varphi} \to p$. We weten dat $c(\vec{\varphi} \to \bot) = x$, dus als we hebben $\vec{\varphi} \to p$, dan weten we dat $c(\vec{\varphi} \to p) = x - 1$, omdat $c(\bot) = 1$ en $c(p) = 0$. Dus $c(\psi_2) = (x - 1) + 2 = x + 1$, en $x + 1 < x + 2$. $\square$

Net zoals eerder uitgelegd bij de standaard multiset ordening, is het vereenvoudigen van verzamelingen formules een operatie die we slechts een eindig aantal keer kunnen uitvoeren. Want stel dat we de operatie oneindig keer konden uitvoeren, dus $\Gamma \rightarrowtail \Gamma' \rightarrowtail \Gamma'' \ldots$ dan zou gelden dat de multiset van complexiteiten van Γ' kleiner is dan de multiset van complexiteiten van Γ; $mc(\Gamma') \prec mc(\Gamma)$ en $mc(\Gamma'') \prec mc(\Gamma')$ en $mc(\Gamma'''') \prec mc(\Gamma'') \ldots$ dus dan zouden er oneindig veel multisets $O_1 \ldots O_n$ zijn zodat $O_1 \prec mc(\Gamma)$ en dat kan niet. Dus we kunnen de operatie van vereenvoudiging maar een eindig aantal keer uitvoeren.

Als een verzameling Γ niet eenvoudig is, dan kunnen we dus in een eindig aantal vereenvoudigingen een eenvoudige verzameling formules Π verkrijgen. Wanneer we beginnen met een niet eenvoudige verzameling formules Γ en we vereenvoudigen tot we de eenvoudige verzameling Π krijgen, dan noteren we dit als $\Gamma \twoheadrightarrowtail \Pi$, wat je kunt lezen als Γ maakt Π uiteindelijk eenvoudig.

Lemma 5.2. Voor elke twee eindige verzamelingen formules Γ en Δ bestaat er een eindige verzameling eenvoudige formules Π zodat geldt:

$$\Gamma \vdash \Delta \Leftrightarrow \Pi \vdash \Delta$$
$$\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} \Delta \Leftrightarrow \Pi \mathrel{|\!\!\sim} \Delta$$

Ik begin hier met een overzicht van het bewijs. In deze volgorde zal ik het bewijs ook opschrijven. Om de eerste claim te bewijzen, moet ik twee implicaties bewijzen, daarvoor is het stappenplan gegeven. De tweede claim lijkt erg op de eerste claim en zal ik niet behandelen. Ik gebruik deze claim wel later.

Stappenplan Lemma 5.2

1. $\Gamma \vdash \Delta \Rightarrow \Pi \vdash \Delta$
   (a) neem aan dat $\Gamma \vdash \Delta$
   (b) neem aan dat $\Gamma \twoheadrightarrowtail \Pi$

(c) neem een arbitraire $\varphi \in \Delta$ zodat $\Gamma \vdash \varphi$ en laat zien $\Pi \vdash \varphi$

(d) als $\Gamma \twoheadrightarrowtail \Gamma'$ dan geldt $\Gamma' \vdash \varphi$ voor elke $\varphi \in \Gamma$ want...

   i. $\Gamma \rightarrowtail \Gamma'$ dan geldt $\Gamma' \vdash \varphi$ voor elke $\varphi \in \Gamma$

   ii. en deze eigenschap is transitief; als $\Gamma_0 \rightarrowtail \Gamma_1 \rightarrowtail \Gamma_2 \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail \Gamma_n$ dan geldt ook dat $\Gamma_n \vdash \varphi$ voor elke $\varphi \in \Gamma$

(e) als $\Gamma \vdash \varphi$ en $\Pi \vdash \psi$ voor alle $\psi \in \Gamma$, dan $\Pi \vdash \Gamma$, en dus $\Pi \vdash \varphi$, zie lemma 2.2

(f) nu omdat $\Gamma \vdash \varphi$ en $\Gamma \twoheadrightarrowtail \Pi$, weten we dat $\Pi \vdash \psi$ voor alle $\psi \in \Gamma$. Vanwege stap (e) weten we nu dat $\Pi \vdash \varphi$

(g) het is zo dat als $\Gamma \vdash \varphi$ en $\Gamma \twoheadrightarrowtail \Pi$ dan $\Pi \vdash \varphi$ voor alle $\varphi \in \Gamma$

2. $\Pi \vdash \Delta \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$

(a) neem aan dat $\Pi \vdash \Delta$

(b) we willen laten zien dat $\Gamma \vdash \Delta$

(c) we nemen een arbitraire $\varphi \in \Delta$ zodat $\Pi \vdash \varphi$ en we laten zien dat $\Gamma \vdash \varphi$

(d) er bestaat een substitutie σ zodat $\Gamma \vdash \sigma(\varphi)$ voor alle $\varphi \in \Pi$ met $\sigma(\varphi) = \varphi$ voor alle $\varphi \in \Delta$ en $\sigma(\varphi) = \varphi$ voor alle $\varphi \in \Gamma$

(e) we weten dat $\sigma(\Pi) \vdash \sigma(\varphi)$

(f) we weten ook dat $\Gamma \vdash \sigma(\varphi)$, dit volgt uit stap (c) en (d) en (1.e)

(g) nu omdat $\sigma(\varphi) = \varphi$, hebben we laten zien dat $\Gamma \vdash \varphi$

Stap 1.d.i. (Als $\Gamma \rightarrowtail \Gamma'$ dan $\Gamma' \vdash \varphi$ voor elke $\varphi \in \Gamma$). Stel $\Gamma \rightarrowtail \Gamma'$. Dan weten we dat er een formule $\psi \in \Gamma$ is die niet eenvoudig is. Deze formule kan van drie vormen zijn, daarom onderscheiden we drie gevallen. Voor elk geval hebben we een vereenvoudigingsstap genoemd. Door nu aan te tonen dat voor alle drie de vereenvoudigingsstappen geldt dat hetgeen aan de linkerkant van $\rightarrowtail$ staat bewijsbaar is uit hetgeen aan de rechterkant van $\rightarrowtail$ staat, bewijzen we dat als $\Gamma \rightarrowtail \Gamma'$ dan $\Gamma' \vdash \varphi$ voor elke $\varphi \in \Gamma$. Voor de eerste vereenvoudigingsstap, $\Gamma[\bot \to \psi] \rightarrowtail \Gamma'$ is het simpel. Hetgeen aan de linkerkant van $\rightarrowtail$ is een tautologie, en dus altijd bewijsbaar. Voor de tweede vereenvoudigingsregel, $\Gamma[(\psi_1 \to \psi_2) \to \chi] \rightarrowtail \Gamma'[p \to \psi_1, q \to \psi_2, (p \to q) \to \chi]$, dienen we te bewijzen dat $p \to \psi_1, \psi_2 \to q, (p \to q) \to \chi \vdash (\psi_1 \to \psi_2) \to \chi$. Zie hieronder het bewijs:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p_1 \quad p \to \psi_1}{\psi_1}\,E\to \quad \psi_1 \to \psi_2}{\psi_2}\,E\to \quad \psi_2 \to q}{q}\,E\to}{p \to q}\,I\to,1 \quad (p \to q) \to \chi}{\chi}\,E\to}{(\psi_1 \to \psi_2) \to \chi}\,I\to,2$$

Voor de derde vereenvoudigingsregel moeten we bewijzen dat $q \to \vec{\psi} \to \bot, (p \to q) \to \vec{\psi} \to p \vdash (p \to q) \to \vec{\psi} \to \bot$. In het bewijs hieronder maak ik gebruik van de notatie $(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n) \to \bot$ voor $p_1 \to p_2 \to ... \to p_n \to \bot$, want $p_1 \to p_2 \to ... \to p_n \to \bot \equiv (p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n) \to \bot$. Ik gebruik dus een nieuwe regel, die gaat als volgt:

$$\frac{\vec{\varphi} \to \psi}{(\varphi_1 \ldots \varphi_n) \to \psi}\ \mathrm{OM}$$

Hierbij betekent $(\varphi_1 \ldots \varphi_n)$ hetzelfde als $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\psi_1 \ldots \psi(2)$}
\AxiomC{$p \to q_1$}
\AxiomC{$(p \to q) \to \vec{\psi} \to p$}
\RightLabel{$E \to$}
\BinaryInfC{$\vec{\psi} \to p$}
\RightLabel{OM}
\UnaryInfC{$(\psi_1 \ldots \psi_n) \to p$}
\RightLabel{$E \to$}
\BinaryInfC{p}
\AxiomC{$p \to q$}
\RightLabel{$E \to$}
\BinaryInfC{q}
\AxiomC{$q \to \vec{\psi} \to \bot$}
\RightLabel{$E \to$}
\BinaryInfC{$\vec{\psi} \to \bot$}
\RightLabel{OM}
\UnaryInfC{$(\psi_1 \ldots \psi_n) \to \bot$}
\RightLabel{$E \to$}
\UnaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$I \to, 2$}
\UnaryInfC{$(\psi_1 \ldots \psi_n) \to \bot$}
\RightLabel{OM}
\UnaryInfC{$\vec{\psi} \to \bot$}
\RightLabel{$I \to, 1$}
\UnaryInfC{$(p \to q) \to \vec{\psi} \to \bot$}
\end{prooftree}
$$

$\square$

Stap 1.d.ii (Transitiviteit)
We weten dat als $\Gamma_0 \rightarrowtail \Gamma_1$ dat geldt $\Gamma_1 \vdash \varphi$ voor alle $\varphi \in \Gamma_0$. Stel nu dat $\Gamma_1 \rightarrowtail \Gamma_2$, dan weten we dat $\Gamma_2 \vdash \varphi$ voor alle $\varphi \in \Gamma_1$. Omdat Γ_2 alle formules φ bewijst in Γ_1, en Γ_1 bewijst alle formules in Γ_0, is het niet moeilijk om in te zien dat Γ_2 alle formules in Γ_0 bewijst. Bovendien volgt dit uit de in paragraaf 4 genoemde regels 1 en 2:

1. als $\Gamma \vdash \Delta$ dan $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$
2. als $\Gamma, \varphi \vdash \Delta$ en $\Gamma' \vdash \varphi, \Delta,$ dan $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$

Stap 2.d Er bestaat een substitutie σ zodat $\Gamma \vdash \sigma(\varphi)$ voor alle $\varphi \in \Pi$ met $\sigma(\varphi) = \varphi$ voor alle $\varphi \in \Delta$ en $\sigma(\varphi) = \varphi$ voor alle $\varphi \in \Gamma$
We weten dat er een substitutie σ bestaat zodat $\Gamma \vdash \sigma(\varphi)$ voor alle $\varphi \in \Pi$, we bewijzen dit door het te laten zien voor de drie vereenvoudigingsstappen. In het geval van de eerste stap hebben we $\varphi \in \Gamma$ en φ is van de vorm $\bot \to \psi$. We hebben $\Pi = \Gamma \backslash \varphi$, we weten dat $\Gamma \vdash \gamma$ voor alle $\gamma \in \Gamma$ en dus zeker dat $\Gamma \vdash \gamma$ voor alle $\gamma \in \Gamma$ behalve φ en daarom $\Gamma \vdash \pi$ voor alle $\pi \in \Pi$. Daarom weten we voor deze eerste stap dat ook moet

gelden $\Gamma \vdash \sigma(\varphi)$ voor alle $\varphi \in \Pi$.

In het tweede geval hebben we $\varphi \in \Gamma$ en φ is van de vorm $(p \to q) \to \vec{\psi} \to \bot$. De vervangende formules zijn $(p \to q) \to \vec{\psi} \to \bot$ en $q \to \vec{\psi} \to \bot$. We weten dat $(p \to q) \to \vec{\psi} \to \bot \vdash q \to \vec{\psi} \to \bot$, want $\vdash q \to (p \to q)$ en we weten dat $(p \to q) \to \vec{\psi} \to \bot \vdash (p \to q) \to \vec{\psi} \to p$, want $\psi \to \bot \vdash \psi \to p$. Omdat $\Pi = (\Gamma \backslash \varphi) \cup \{q \to \vec{\psi} \to \bot, (p \to q) \to \vec{\psi} \to p\}$ en $\Gamma \vdash \Gamma \backslash \varphi$ en $\Gamma \vdash (p \to q) \to \vec{\psi} \to \bot$ en $\Gamma \vdash q \to \vec{\psi} \to \bot$, is het zo dat $\Gamma \vdash \pi$ voor alle $\pi \in \Pi$ en daarom ook $\Gamma \vdash \sigma(\varphi)$ voor elke $\varphi \in \Pi$.

Het derde geval is iets ingewikkelder. We kunnen niet laten zien dat $\Gamma \vdash \pi$ voor alle $\pi \in \Pi$, zoals in de vorige twee gevallen, maar we laten wel zien dat $\Gamma \vdash \sigma(\varphi)$ voor alle $\varphi \in \Pi$. De formule $\varphi \in \Gamma$ is van de vorm $(\psi_1 \to \psi_2) \to \chi$ en de vervangende formules zijn $(p \to q) \to \chi$, $p \to \psi_1$ en $\psi_2 \to q$. In deze formules substitueren we p voor ψ_1 en q voor ψ_2. We krijgen dan $\sigma((p \to q) \to \chi) = (\psi_1 \to \psi_2) \to \chi$, $\sigma(p \to \psi_1) = \psi_1 \to \psi_1$ en $\sigma(\psi_2 \to q) = \psi_2 \to \psi_2$. Omdat $\Gamma \vdash \gamma$ voor alle $\gamma \in \Gamma$ weten we alvast dat $\Gamma \vdash (\psi_1 \to \psi_2) \to \chi$ en omdat $\psi_1 \to \psi_1$ en $\psi_2 \to \psi_2$ beiden tautologiëen zijn, moet gelden dat $\Gamma \vdash \psi_1 \to \psi_1$ en $\Gamma \vdash \psi_2 \to \psi_2$. Nu omdat $\Pi = (\Gamma \backslash \varphi) \cup \{(p \to q) \to \chi, p \to \psi_1, \psi_2 \to q\}$ weten we dat $\Gamma \vdash \sigma(\varphi)$ voor elke $\varphi \in \Pi$.

Samenvatting Lemma 5.2

1. ($\Gamma \vdash \Delta \Rightarrow \Pi \vdash \Delta$). We nemen aan dat $\Gamma \vdash \Delta$ en $\Gamma \twoheadrightarrow \Pi$. We nemen nu een arbitraire $\varphi \in \Delta$ zodat $\Gamma \vdash \varphi$. We willen laten zien dat $\Pi \vdash \varphi$. Omdat $\Gamma \vdash \varphi$ en $\Gamma \rightarrowtail \Pi$, weten we dat $\Pi \vdash \psi$, voor alle $\psi \in \Gamma$, dat volgt uit stap (d) en (e). Nu volgt uit stap (1.e) dat $\Pi \vdash \varphi$.

2. ($\Pi \vdash \Delta \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$). Neem aan dat $\Pi \vdash \Delta$. We nemen een arbitraire formule $\varphi \in \Delta$ zodat $\Pi \vdash \varphi$. We laten zien dat $\Gamma \vdash \varphi$. We weten dat $\sigma(\Pi) \vdash \sigma(\varphi)$ en we weten ook dat $\Gamma \vdash \sigma(\psi)$, dit volgt uit stap (c) en (d). Omdat we hadden gezegd dat $\sigma(\varphi) = \varphi$ voor alle $\varphi \in \Delta$, en $\Gamma \vdash \sigma(\psi)$ weten we nu dat $\Gamma \vdash \psi$, en dat wilden we bewijzen.

6 Bewijs: het derde lemma

Lemma 6.1. Laat Π een eindige verzameling formules zijn. Als $\Pi' \vdash \Delta$ voor alle $\Pi' \in \Psi_\Pi$, dan $\Pi \vdash_w \Delta$

Stappenplan Lemma 6.1

1. neem aan dat $\Pi' \vdash \Delta$ voor alle $\Pi' \in \Psi_\Pi$
2. als $\Pi \vdash \bot$, dan volgt met regel 2 dat $\Pi \vdash \Delta$
3. neem aan dat Π consistent is

4. als $n = 0$, dan $\Pi \vdash \Delta$

5. als $n > 0$, en de uitspraak geldt voor n, dan geldt de uitspraak ook voor $n + 1$

6. met inductie volgt dat $\Pi \vdash \Delta$

Voor ik dit bewijs, zal ik eerst uitleggen wat er wordt met bedoeld met $\Pi' \in \Psi_\Pi$. Stel we hebben een eindige verzameling formules Π, dan kunnen we de verzameling van alle propositionele variabelen van alle formules in Π nemen, we noemen deze verzameling V_Π dus $V_\Pi = \{p \mid p \text{ is een variabele in } \varphi \text{ en } \varphi \in \Pi\}$. Vervolgens nemen we de verzameling V van deelverzamelingen $V_1, V_2, \ldots, V_n$ van V_Π zodat $\Pi \cup V_i \vdash \bot$.

Definitie 7. We definiëren $V = \{V_i \mid V_i \subseteq V_\Pi, \Pi \cup V_i \vdash \bot\}$ en de volgende reeks:

$$\Psi_0 = \{\emptyset\}$$
$$\Psi_i = \{S \cup \{\neg\neg p \to p\} \mid S \in \Psi_{i-1} \text{ en } p \in V_i\} \text{ voor } i \text{ is } 1, \ldots, n.$$
$$\Psi_\Pi = \{S \cup \Pi \mid S \in \Psi_n\}$$

Met deze nieuwe definities en lemma 3 en 4 kunnen we bewijzen dat als $\Pi \vdash\!\!\sim \Delta$ dan $\Pi \vdash \Delta$. Ik zal eerst een voorbeeld geven, waardoor de drie nieuwe definities wat meer tot de verbeelding spreken en lemma 3 makkelijker te begrijpen is.

Voorbeeld 8. Stel we hebben een verzameling formules $\Pi = \{p \to q \to \bot, r \to \bot\}$ en we willen weten hoe Ψ_Π eruit ziet. De eerste stap die we daarvoor nemen is bepalen hoe V_Π eruit ziet. V_Π bestaat uit alle propositionele variabelen in de formules van Π. In ons geval zijn dat p, q en r. Dus $V_\Pi = \{p, q, r\}$. Nu zoeken we de verzameling V, die bestaat uit alle deelverzamelingen van V_Π die verenigd met Π tot een tegenspraak leiden. Aangezien $p \to q \to \bot$ weten we dat $\{p, q\} \cup \Pi \vdash \bot$. Verder weten we dat elke deelverzameling die r bevat ook tot een tegenspraak leidt, want $r \to \bot$. Alleen p of alleen q is niet voldoende om tot een tegenspraak te komen, en zolang Π consistent is, is de lege verzameling ook niet voldoende om een tegenspraak te veroorzaken. We kunnen nu zeggen dat $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$ waarbij $V_1 = \{p, q\}, V_2 = \{p, r\}, V_3 = \{q, r\}, V_4 = \{r\}, V_5 = \{p, q, r\}$.

We weten dat $\Psi_\Pi = \{S \cup \Pi \mid S \in \Psi_n\}$. We weten hoe Π eruit ziet, maar nog niet welke S_i er allemaal zijn. Om daar achter te komen gaan we de verzameling Ψ_n bouwen. We weten dat Ψ_n de laatste Ψ_i is in een opsomming $\Psi_0, \Psi_2, \ldots \Psi_n$. Volgens de definitie is Ψ_0 de verzameling met de lege verzameling erin. Ψ_1 bestaat dan uit alle elementen in Ψ_0 verenigd met $\{\neg\neg p \to p\}$ voor alle $p \in V_1$. En $V_1 = \{p, q\}$, dus $\Psi_1 = \{\emptyset \cup \{\neg\neg p \to p\}, \emptyset \cup \{\neg\neg q \to q\}\} = \{\{\neg\neg p \to p\}, \{\neg\neg q \to q\}\}$.
Nu we Ψ_1 weten, kunnen we met onze definitie Ψ_2 maken. Wanneer we elk element in Ψ_1 verenigen met $\neg\neg p \to p$ voor alle $p \in V_2$ krijgen we de volgende verzameling:
$\Psi_2 = \{\{\neg\neg p \to p\}, \{\neg\neg p \to p, \neg\neg r \to r\}, \{\neg\neg q \to q, \neg\neg p \to p\}, \{\neg\neg q \to q, \neg\neg r \to r\}\}$.

Wanneer we doorgaan tot we alle verzamelingen $V_1, V_2, \dots V_5$ hebben gehad dan krijgen we als laatste verzameling; $\Psi_n = \Psi_5 = \{\{\neg\neg p \to p, \neg\neg r \to r\}\{\neg\neg p \to p, \neg\neg r \to r, \neg\neg q \to q\}\{\neg\neg q \to q, \neg\neg r \to r\}\}$. We zijn nu bij de stap gekomen dat we Ψ_Π kunnen construeren, $\Psi_\Pi = \{S \cup \Pi \mid S \in \Psi_n\}$. Als we deze definitie volgen, dan krijgen we

$\Psi_\Pi = \{\{\neg\neg p \to p, \neg\neg r \to r\} \cup \Pi, \{\neg\neg p \to p, \neg\neg r \to r, \neg\neg q \to q\} \cup \Pi, \{\neg\neg q \to q, \neg\neg r \to r\} \cup \Pi\}$

We zijn nu toegekomen aan het bewijs van dit lemma; als $\Pi' \vdash \Delta$ voor alle $\Pi' \in \Psi_\Pi$, dan $\Pi \vdash_w \Delta$. We bewijzen de hierboven genoemde stappen.

Stap 2 (als $\Pi \vdash \bot$, dan volgt met regel 2 dat $\Pi \vdash \Delta$)
Stel Π is inconsistent, dan $\Pi \vdash \bot$. In dit geval, volgt met regel 2 meteen dat $\Pi \vdash \Delta$, want als $\Pi \vdash \bot$ en $\bot \vdash \Delta$ dan geeft regel 2 het resultaat $\Pi \vdash \Delta$.

Stap 4 (als $n = 0$, dan $\Pi \vdash \Delta$)
We bewijzen het lemma voor het geval dat $n = 0$, en we bewijzen dat als het lemma geldt voor n, dat het dan ook geldt voor $n+1$. Stel $n = 0$, dan $\Psi_\Pi = \{S \cup \Pi \mid S \in \Psi_0\}$. Aangezien $\Psi_0 = \{\emptyset\}$, geldt dat $\Psi_\Pi = \{\Pi \cup \emptyset\} = \{\Pi\}$. We moeten laten zien dat voor elke $\Pi' \in \Psi_\Pi$ geldt dat als $\Pi' \vdash \Delta$ dat dan ook geldt $\Pi \vdash \Delta$, nu aangenomen dat $\Pi' \vdash \Delta$ en aangezien $\Pi' = \Pi$, volgt direct dat $\Pi \vdash \Delta$.

Stap 5 (als $i > 0$, en de uitspraak geldt voor i, dan geldt de uitspraak ook voor $i + 1$)
We bewijzen nu dat als het lemma geldt voor een $i > 0$, dat het dan ook geldt voor $i + 1$. Stel $i > 0$. We nemen aan dat het lemma geldt voor i, dus als $\Pi' \vdash \Delta$ voor alle $\Pi' \in \Psi_\Pi$, waarbij $\Psi_\Pi = \{\Pi \cup S \mid S \in \Psi_i\}$, dan $\Pi \vdash \Delta$. We laten zien dat als $\Pi' \vdash \Delta$ voor alle $\Pi' \in \Psi_\Pi$ met $\Psi_\Pi = \{\Pi \cup S \mid S \in \Psi_{i+1}\}$ dat dan ook geldt $\Pi \vdash \Delta$. Om dit te laten zien nemen we het antecedent aan, dus $\Pi' \vdash \Delta$ voor alle $\Pi' \in \Psi_\Pi$ met $\Psi_\Pi = \{\Pi \cup S \mid S \in \Psi_{i+1}\}$.
We bekijken een $S' \in \Psi_n$. Door constructie geldt dat (1) $\Pi \vdash V_{i+1} \to \bot$, want dit geldt voor alle V_i. Uit onze aanname volgt dat (2) $\Pi \cup S' \cup \neg\neg p \to p \vdash \Delta$ voor alle $p \in V_{i+1}$. Met deze gegevens en de volgende denkstappen kunnen we laten zien dat $\Pi, S' \vdash \Delta$. Met de Wroński regel kunnen we afleiden dat $V_{i+1} \vdash \neg\neg p \to p$ voor $p \in V_{n+1}$. Met regel 1 weten we dan ook dat $\Pi, V_{n+1} \vdash \neg\neg p \to p$. Hieruit volgt met (1) en regel 2 dat $\Pi \vdash \neg\neg p \to p$, zie hieronder de toepassing van regel 2:

$$\frac{\Pi, V_{i+1} \vdash \neg\neg p \to p \qquad \Pi \vdash V_{i+1} \to \bot}{\Pi \vdash \neg\neg p \to p}\ \text{regel 2}$$

Uit $\Pi \vdash \neg\neg p \to p$ volgt met regel 1 dat ook $S', \Pi \vdash \neg\neg p \to p$. Hieruit volgt met (2) en regel 2 dat $S', \Pi, V_{i+1} \to \bot \vdash \Delta$. Hieronder de toepassing van regel 2:

$$\frac{\Pi, S', \neg\neg p \to p \vdash \Delta \qquad S', \Pi \vdash \neg\neg p \to p}{S', \Pi, V_{i+1} \to \bot \vdash \Delta}\ \text{regel 2}$$

Tenslotte volgt hieruit met regel 2 onze conclusie; $\Pi \vdash \Delta$

$$\frac{S', \Pi, V_{i+1} \to \bot \vdash \Delta \qquad \Pi \vdash V_{i+1} \to \bot}{\Pi, S' \vdash \Delta} \text{ regel 2}$$

Samenvatting Lemma 6.1
We willen bewijzen dat als $\Pi' \vdash \Delta$ voor alle $\Pi' \in \Psi_\Pi$, dan $\Pi \vdash \Delta$. We nemen aan dat $\Pi' \vdash \Delta$ voor alle $\Pi' \in \Psi_\Pi$. Als Π inconsistent is, dan volgt met regel 2 meteen dat $\Pi \vdash \Delta$. Als Π consistent is, en $n = 0$, dan volgt dat $\Pi' = \Pi$ en dus $\Pi \vdash \Delta$. Als $n > 0$, dan volgt met stap 5 dat als de uitspraak geldt voor n dat de uitspraak ook geldt voor $n + 1$. Nu met stap 4 en 5 volgt dat de uitspraak geldt voor iedere n. $\square$

7 Bewijs: het vierde lemma

Lemma 7.1. Laat Π een eindige verzameling formules zijn. Als $\Pi \mathrel{|\!\!\sim} \Delta$, dan $\Pi' \vdash \Delta$ voor alle $\Pi' \in \Psi_\Pi$

Om dit lemma te bewijzen maken we gebruik van de constructie van een projectieve verzameling formules Φ voor iedere $\Pi' \in \Psi_\Pi$ zodat $\Pi \subseteq \Phi \subseteq \Pi'$. Verder maken gebruik van het feit dat voor elke formule een klassieke bedeling bestaat, dat wil zeggen dat aan elke variabele de waarheidswaarde 0 of 1 wordt toegekend. In dit lemma noemen we deze waarheidswaarde $e(p)$ voor een variabele p. We kunnen vervolgens beredeneren dat $\Phi \mathrel{|\!\!\sim} \Delta$ en met definitie 7.2 kunnen we concluderen dat $\Phi \vdash \Delta$. Dan is makkelijk in te zien dat $\Pi' \vdash \Delta$, omdat $\Phi \subseteq \Pi'$ en met lemma 3 kunnen we dan concluderen dat $\Pi \vdash \Delta$. Hieronder de definitie van projectiviteit en een belangrijke eigenschap van projectiviteit.

Definitie 8. Een verzameling Γ is projectief als er een substitutie σ bestaat zodat de volgende twee eigenschappen gelden:

$$\vdash \sigma(\varphi) \text{ voor alle } \varphi \in \Gamma$$
$$\Gamma \vdash \sigma(\varphi) \leftrightarrow \varphi \text{ voor alle } \varphi \in L(P).$$

Lemma 7.2. Als Γ projectief is, dan $\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} \Delta \Leftrightarrow \Gamma \vdash \Delta$

Stappenplan Lemma 7.1

1. stel $\Pi \mathrel{|\!\!\sim} \Delta$
2. we definiëren de verzameling Φ als $\Phi = \{\Pi' \backslash \{\neg\neg p \to p \mid e(p) = 1\}\}$
3. door constructie volgt dat $\Phi \subseteq \Pi'$
4. we weten dat $\Pi \subseteq \Phi$
5. Φ is projectief want
   (a) $\vdash \sigma(\varphi)$ voor alle $\varphi \in \Phi$

(b) $\Phi \vdash \sigma(p) \leftrightarrow p$ (merk op dat $\Phi \vdash \sigma(p) \leftrightarrow p \Rightarrow \Phi \vdash \sigma(\varphi) \leftrightarrow \varphi$)

6. $\Phi \mathrel{|\!\!\sim} \Delta$, want $\Pi \mathrel{|\!\!\sim} \Delta$ en $\Pi \subseteq \Phi$
7. uit definitie 7.2 volgt dat $\Phi \vdash \Delta$
8. omdat $\Phi \subseteq \Pi'$ en $\Phi \vdash \Delta$, moet wel $\Pi' \vdash \Delta$

Stap 3 ($\Phi \subseteq \Pi'$)
Dit volgt uit de definitie van Φ omdat $\Phi = \Pi' \backslash \{\neg\neg p \to p\}$ voor bepaalde p. Φ bestaat uit alle elementen in Π, behalve een aantal formules $\neg\neg p \to p$, dus het is zeker zo dat alle elementen in Φ ook in Π zitten.

Stap 4 ($\Pi \subseteq \Phi$)
Uit de definitie van Π' volgt dat $\Pi \subseteq \Pi'$, Π' bestaat namelijk uit de vereniging van Π met bepaalde verzamelingen S. Dus in ieder geval geldt $\Pi \subseteq \Pi'$. We weten dat $\Phi = \Pi' \backslash \{\neg\neg p \to p\}$ voor alle p met $e(p) = 1$. Omdat $\neg\neg p \to p$ niet van eenvoudige vorm is, weten we zeker dat $\neg\neg p \to p \notin \Pi$ voor alle $p \in V_\Pi$. De elementen die in Π' zitten maar niet in Φ zijn per definitie elementen die niet in Π zitten en daarom kunnen we veilig stellen dat omdat $\Pi \subseteq \Pi'$ ook geldt dat $\Pi \subseteq \Phi$.

Stap 5 (Φ is projectief)
Om te laten zien dat Φ projectief is, moeten we een substitutie vinden zodat de eigenschappen in stap 5.a en 5.b gelden. We definiëren een verzameling T voor elke Π', dit hebben we nodig om te laten zien dat Φ projectief is. $T = \{p \in V_\Pi \mid \neg\neg p \to p \notin \Pi'\}$, voor elke Π' bestaat er dus een verzameling T'. In het eerder behandelde voorbeeld hadden we $\Pi' = \{\{\neg\neg p \to p, \neg\neg r \to r\} \cup \Pi\}$. De T' behorende bij Π' is dan $T' = \{q\}$. Verder weten we dat $\Pi \cup T \nvdash \bot$, want dat leidt tot een tegenspraak. Omdat $\Pi \cup T$ consistent is, bestaat er een valuatie in klassieke logica zodanig dat alles in $\Pi \cup T$ waar is. Verder geldt voor deze valuatie dat als $e(p) = 0$ dan $\neg\neg p \to p \in \Pi'$. Dan zal ik nu de substitutie noemen die we gebruiken in 5.a en 5.b:

$$\sigma(p) = \begin{array}{ll} & \\ \Phi \to p & \text{als } e(p) = 1 \\ (\Phi \to p \to \bot) \to \bot & \text{als } e(p) = 0 \end{array}$$

Stap 5.a ($\vdash \sigma(\varphi)$ voor alle $\varphi \in \Phi$)

We weten dat φ van de vorm $\neg\neg p \to p$ is, of dat $\varphi \in \Pi$. In het eerste geval weten we dat $e(p) = 0$. Daarom geldt $\sigma(p) = ((\Phi \to (p \to \bot)) \to \bot)$ en krijgen we dus $\sigma(\varphi) = \neg\neg((\Phi \to (p \to \bot)) \to \bot) \to ((\Phi \to (p \to \bot)) \to \bot)$. We kunnen $((\Phi \to (p \to \bot)) \to \bot)$ omschrijven naar $\neg((\Phi \to (p \to \bot))$, dus $\neg\neg((\Phi \to (p \to \bot)) \to \bot) \equiv \neg\neg\neg((\Phi \to (p \to \bot))$. Nu gebruiken we de regel $\neg\neg\neg\chi \to \neg\chi$, dat geldt voor alle formules χ, dus ook voor $\neg\neg\neg((\Phi \to (p \to \bot))$. We hebben dan $\neg((\Phi \to (p \to \bot)) \to ((\Phi \to (p \to \bot)) \to \bot)$ verkregen, en ook de consequent kunnen we omschrijven naar $\neg((\Phi \to (p \to \bot))$, en dan hebben we een tautologie: $\neg((\Phi \to (p \to \bot)) \to \neg((\Phi \to (p \to \bot))$. Dus $\sigma(\varphi) = \neg((\Phi \to (p \to \bot)) \to \neg((\Phi \to (p \to \bot))$ en dat is een tautologie, en tautologieën zijn afleidbaar, dus $\vdash \sigma(\varphi)$.

In het tweede geval is φ een formule in Π, en φ is dus van eenvoudige vorm. We onderscheiden twee gevallen. Of $\varphi : \vec{p} \to \bot$, of $\varphi : \vec{\psi} \to p$.
Stel $\varphi : \vec{p} \to \bot$. Dan weten we dat er p bestaan zodat $e(p) = 0$, dat hebben we eerder beredeneerd in lemma 1. Omdat $\Phi \vdash \sigma(q) \to q$, voor alle $q \in \vec{p}$, krijgen we $\Phi \vdash \sigma\vec{p} \to p \to \bot$. Met deductie weten we nu dat $\vdash \sigma(\vec{p}) \to \Phi \to p \to \bot$, en omdat $\vdash \chi \to \neg\neg\chi$ voor alle formules χ geldt, geldt dus ook $\vdash \sigma(\vec{p}) \to \neg\neg(\Phi \to p \to \bot)$. Dat kunnen we herschrijven tot $\vdash \sigma\vec{p} \to (((\Phi \to (p \to \bot)) \to \bot) \to \bot)$, en daarmee hebben we laten zien dat $\vdash \sigma(\vec{p}) \to \sigma(p) \to \bot$, want $\sigma(p)$ was $((\Phi \to (p \to \bot)) \to \bot)$ en dus $\vdash \sigma(\varphi)$.
Stel nu dat $\varphi : \vec{\psi} \to p$. Als $e(p) = 1$, dan weten we dat $\sigma(p) = \Phi \to p$, en met stap 5b krijgen we $\Phi \vdash \sigma(\vec{\psi} \to p)$. Met natuurlijke deductie weten we nu dat $\sigma(\vec{\psi}) \to \sigma(p)$, en dat wilden we. Als $e(p) = 0$, dan weten we dat er $\psi \in \vec{\psi}$ bestaan zodat $e(\psi) = 0$, anders komen we tot een tegenspraak. We kunnen hier weer twee gevallen onderscheiden; ofwel ψ is een variabele, zeg q, ofwel ψ is van de vorm $r \to q$. Stel het eerste geval, $\psi : q$, dan $\Phi \vdash \vec{\psi} \to q \to p$, want $\varphi \in \Phi$. Met stap 5b kunnen we afleiden dat $\vdash \sigma(\vec{\psi}) \to \Phi \to q \to \sigma(p)$, en dan moet ook gelden dat $\vdash \sigma(\vec{\psi}) \to ((\Phi \to (q \to \bot)) \to \bot) \to \neg\neg\sigma(p)$. Nu omdat $e(p) = 0$ geldt $\vdash \neg\neg\sigma(p) \to \sigma(p)$ en kunnen we dus $\neg\neg\sigma(p)$ vervangen door $\sigma(p)$, we krijgen dan $\vdash \sigma(\vec{\psi}) \to ((\Phi \to (q \to \bot)) \to \bot) \to \sigma(p)$ ofwel $\vdash \sigma(\vec{\psi}) \to \sigma(q) \to \sigma(p)$, wat we wilden. Tenslotte als ψ van de vorm $r \to q$ is, dan weten we dat $e(r) = 1$ en $e(q) = 0$ en we weten dat $\vdash \Phi \to \sigma(\psi) \to (r \to q) \to \sigma(p)$ en dus $\vdash \sigma(\vec{\psi}) \to \neg\sigma(p) \to \Phi \to \neg(r \to q)$ en het is zo dat $(\Phi \to \neg(r \to q)) \to \neg((\Phi \to r) \to ((\Phi \to (q \to \bot)) \to \bot))$ daarmee hebben we $\vdash \sigma(\vec{\psi}) \to \neg\neg(\sigma(r) \to \sigma(q)) \to \neg\neg\sigma(p)$ en omdat $e(p) = 0$ geldt $\vdash \neg\neg\sigma(p) \to \sigma(p)$ en dus hebben we gekregen $\vdash \sigma(\vec{\psi}) \to \neg\neg(\sigma(r) \to \sigma(q)) \to \sigma(p)$, ofwel $\vdash \sigma\vec{\psi} \to (\sigma(r) \to \sigma(q)) \to \sigma(p)$, en dat was wat we wilden laten zien. $\square$

Stap 5.b $(\Phi \vdash \sigma(p) \leftrightarrow p)$

Stel $e(p) = 1$. We laten zien dat $\Phi \vdash \sigma(p) \to p$ en $\Phi \vdash p \to \sigma(p)$. Ten eerste $\Phi \vdash \sigma(p) \to p$. Neem aan dat $\sigma(p)$. Omdat $e(p) = 1$, weten we $\sigma(p) = \Phi \to p$. We willen bewijzen dat $\Phi \vdash (\Phi \to p) \to p$, we nemen aan dat $\Phi \to p$. Nu onder de aanname Φ kunnen we afleiden dat p, en dus kunnen we concluderen dat $\Phi \vdash (\Phi \to p) \to p$ en dus $\Phi \vdash \sigma(p) \to p$. Zie het bewijs hieronder, waarin $\Phi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \qquad \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \vdash (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to p_1}{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n, \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \vdash p}\,\mathrm{E}\!\to}{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n, (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to p \vdash p}\,\text{regel 1}}{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \vdash ((\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to p) \to p}\,\mathrm{I}\!\to, 1$$

Ten tweede $\Phi \vdash p \to \sigma(p)$. Stel p, we laten zien dat $\Phi \to p$. Omdat p weten we dat de implicatie waar is, dus $\Phi \vdash p \to \sigma(p)$.

Stel $e(p) = 0$. We laten zien dat $\Phi \vdash \sigma(p) \to p$ en $\Phi \vdash p \to \sigma(p)$. Ten eerste $\Phi \vdash \sigma(p) \to p$. Stel $\sigma(p)$, dus stel $(\Phi \to (p \to \bot)) \to \bot$. We laten zien dat p. We weten dat $\Phi \vdash \neg p \to (\Phi \to \neg p)$, want dat is een tautologie. Dan weten we ook dat $\Phi \vdash ((\Phi \to (p \to \bot)) \to \bot) \to \neg\neg p$, want voor alle formules φ, ψ geldt dat $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$, als we dit toepassen krijgen we $(\neg p \to (\Phi \to \neg p)) \leftrightarrow (\neg(\Phi \to \neg p) \to \neg\neg p)$ en $\neg(\Phi \to \neg p) \equiv (\Phi \to (p \to \bot)) \to \bot$. Nu omdat $e(p) = 0$, weten we dat $\neg\neg p \to p$ en dus dat $\Phi \vdash ((\Phi \to (p \to \bot)) \to \bot) \to p$ en dat wilden we laten zien.
Ten tweede $\Phi \vdash p \to \sigma(p)$. Stel p, dan aangezien $e(p) = 0$, geldt $\bot$. Uit $\bot$ volgt alles wat we willen. We willen $\sigma(p) = (\Phi \to p \to \bot) \to \bot$, dus $p \to (\Phi \to p \to \bot)$. $\square$

Samenvatting Lemma 7.1
Om dit lemma te bewijzen nemen we aan dat $\Pi \mathrel{|\!\!\sim} \Delta$. We definiëren de verzameling Φ en we laten zien dat $\Pi \subseteq \Phi \subseteq \Pi'$. Vervolgens laten we zien in stap 5 dat Φ projectief is. Vervolgens concluderen we dat $\Phi \mathrel{|\!\!\sim} \Delta$ en met definitie 7.2 weten we dat $\Phi \vdash \Delta$. Nu kunnen we in stap 8 concluderen dat $\Pi' \vdash \Delta$, aangezien $\Phi \subseteq \Pi'$ en $\Phi \vdash \Delta$.

Theorema 1 (W_n vormt een basis voor $\mathrel{|\!\!\sim}$ in het implicatie-negatie fragment van IPC.)

De lemma's die we gebruiken in dit bewijs zal ik nog een keer herhalen:

Lemma 4.1 (W_n) is toelaatbaar voor alle $n \in \mathbb{N}$ in het implicatie-negatie fragment van IPC

Lemma 5.2 Voor elke twee eindige verzamelingen formules Γ en Δ bestaat er een eindige verzameling eenvoudige formules Π zodat geldt:

$$\Gamma \vdash \Delta \Leftrightarrow \Pi \vdash \Delta$$
$$\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} \Delta \Leftrightarrow \Pi \mathrel{|\!\!\sim} \Delta$$

Lemma 6.1 Laat Π een eindige verzameling formules zijn. Als $\Pi' \vdash \Delta$ voor alle $\Pi' \in \Psi_\Pi$, dan $\Pi \vdash_w \Delta$.

Lemma 7.1 Laat Π een eindige verzameling formules zijn. Als $\Pi \mathrel{|\!\!\sim} \Delta$, dan $\Pi' \vdash \Delta$ voor alle $\Pi' \in \Psi_\Pi$.

We laten zien dat $\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} \Delta \Leftrightarrow \Gamma \vdash_w \Delta$. Dat $\Gamma \vdash_w \Delta \Rightarrow \Gamma \mathrel{|\!\!\sim} \Delta$ hebben we laten zien in lemma 4.1 Om te laten zien dat $\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} \Delta \Leftrightarrow \Gamma \vdash_w \Delta$, nemen we aan dat $\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} \Delta$. Met lemma 5.2 weten we dat er een verzameling eenvoudige formules Π bestaat zodat $\Pi \mathrel{|\!\!\sim} \Delta$. Uit lemma 7.1 volgt nu dat $\Pi' \vdash \Delta$ voor alle $\Pi' \in \Psi_\Pi$, nu met lemma 6.1 weten we dat $\Pi \vdash_w \Delta$. Volgens lemma 5.2 weten we nu dat $\Gamma \vdash_w \Delta$. $\square$

Bibliografie

Cintula, Petr, & Metcalfe, George. 2010. Admissible rules in the implication-negation fragment of intuitionistic logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, **162**(2), 162–171.

Dershowitz, Nachum, & Manna, Zohar. 1979. Proving termination with multiset orderings. *Commununications of the ACM*, **22**(8), 465–476.

Gamut, L.F.T. 1982. *Logic, Language, and Meaning.* Vol. 1. Chicago Press.

Guerrerio, G. 2001. *Gödel: Mathematische waarheid en logische paradoxen.* Vol. 1. Le Scienze.

Prucnal, T. 1973. On the structural completeness of some pure implicational calculi. *Studia Logica*, **32**(1), 45–50.

Troelstra, Anne Sjerp, & van Dalen, Dirk. 1988. *Constructivism in Mathematics - An Introduction.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 121. Elsevier.

Wroński, A. 1986. On factoring by compact congruences in algebras of certain varieties related to the intuitionistic logic. *Bulletin of the Section of Logic*, **15**(2), 48–51.

Wroński, A., & Minari, P. 1988. The property (HD) in intermediate logics. A partial solution of the problem of H. Ono. *Reports on mathematical logic*, **22**, 21–25.