Riemann-integratie vs Lebesgue-integratie

Bachelorscriptie wiskunde (WISB 399)

7,5 ECTS

Gert Jan Gelderman,
6526691,

onder begeleiding van Dr. Ivan Kryven & Rik Versendaal.

11 maart 2021

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Introductie

In het jaar 1854 schreef de bekende Duitse wis- en natuurkundige Bernhard Riemann (1826 - 1866) een belangrijke tekst (*Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, zie [11]) waarin hij een integratie concept presenteerde welke vandaag de dag bekend staat als de integratie methode van Riemann. Ruim twee decennia later herformuleerde de Franse wiskundige Gaston Darboux (1842 - 1917) deze integratie methode in zijn publicatie *Mémoire sur les fonctions discontinues* (zie [6].) Naast dat Darboux de integratie methode volgens Riemann herformuleerde, bewees hij ook een aantal mooie eigenschappen van de Riemann-integraal (deze eigenschappen zal de lezer in paragraaf 2.2 observeren.) Ondanks deze eigenschappen kwam men er echter ook al gauw achter dat de Riemann-integraal niet perfect was vanwege een aantal beperkingen. Deze beperkingen motiveerde de bekende Franse wiskundige Henri Lebesgue (1875 - 1941) tot het formuleren van een nieuw integratie concept welke hij beschreef in zijn publicatie *Sur le développement de la notion d'intégrale* (zie [9].) [3]

Opmerking 1.0.1. *We attenderen de lezer op het feit dat de Riemann-integraal niet volledig afkomstig is van Riemann zelf. Zo lijkt de Riemann-integraal veel op de Cauchy-integraal, welke al eerder was uitgevonden. Echter, Riemann was wel de eerste wiskundige die sprak over het begrip 'klasse van integreerbare functies', wat een grote stap richting de functionaal analyse heeft gevormd.*

Het doel van deze scriptie is het vergelijken van de eigenlijke Riemann-integraal met de Lebesgue-integraal. We beginnen met een korte herhaling van de Riemann-integraal, waarbij we in het bijzonder een aantal beperkingen van de Riemann-integraal zullen observeren. Ook bestuderen we de Lebesgue-integraal, waarbij we zullen gaan zien dat deze laatste integratie methode oplossingen biedt op de beperkingen van de Riemann-integraal. Vervolgens visualiseren we de klasse van eigenlijke Riemann-integreerbare functies en de klasse van bijna overal begrensde, Lebesgue-integreerbare functies en zullen we deze klassen van functies met elkaar vergelijken. Zo zal blijken dat de klasse van eigenlijke Riemann-integreerbare functies is bevat in de klasse van Lebesgue-integreerbare functies. Hoewel de Lebesgue-integraal vele voordelen heeft ten opzichte van de Riemann-integraal, zullen we echter ook het oog richten op een aantal sterke kanten van de Riemann-integraal. Ten slotte zal de lezer een generalisatie van de Riemann-integraal bestuderen welke ook wel bekend staat als de Henstock-Kurzweil-integraal. Deze laatste vorm van integratie blijkt onder meer in een zeker opzicht ook een uitbreiding te zijn van de Lebesgue-integraal, zoals de lezer zal gaan observeren.

De abstracte stof binnen deze scriptie zal gepaard gaan met een stuk intuïtie doormiddel van voorbeelden. Zo zal in deze scriptie onder meer de bekende Dirichlet functie meerdere malen voorkomen (zie (2.4)); dienend om intuïtie te scheppen. Hiermee zal deze functie een belangrijke rol spelen binnen deze scriptie.

Hoofdstuk 2

De Riemann-integraal en haar eigenschappen en beperkingen

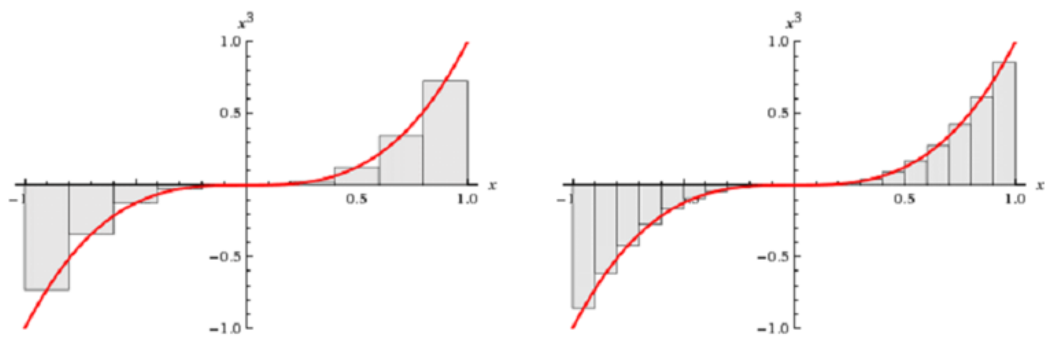
In dit hoofdstuk zullen we een beknopte herhaling geven over de leer omtrent Riemann-integralen, zoals deze bekend is vanuit de analyse. We bespreken kort de Riemann-integraal; haar eigenschappen en haar beperkingen. Tevens illustreren we deze stof aan de hand van enkele voorbeelden. Verder zullen we ons in dit hoofdstuk - en doorgaande deze scriptie - beperken tot eigenlijke Riemann-integralen. De lezer wordt geadviseerd dit hoofdstuk over te slaan indien deze al in voldoende mate bekend is met de stof omtrent Riemann-integralen.

2.1 Definitie van de Riemann-integraal

We veronderstellen in dit hoofdstuk dat I een reëel, gesloten en begrensd interval $[a, b]$ is, waarbij $a < b$. Indien voor een specifiek interval wordt gekozen dan wordt dit vermeld.

We beginnen met een simpel voorbeeld waarmee we de definitie van de onder- en bovensom illustreren. Tevens dient dit voorbeeld als een stuk intuïtie dat betrekking heeft tot Lemma 2.1.1.

Voorbeeld 2.1.1. *Zij* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *de functie gedefinieerd door* $f(x) = x^3$. *Zij verder* V *de partitie van* $[-1, 1]$ *gegeven door* $\{-1, \frac{-4}{5}, \ldots, \frac{4}{5}, 1\}$ *en zij* W *de partitie van* $[-1, 1]$ *gegeven door* $\{-1, \frac{-9}{10}, \ldots, \frac{9}{10}, 1\}$.



Figuur 2.1: Schattingen van de integraal van f over $[-1, 1]$ met de partities V (links) en W (rechts.)

Merk dan op dat W een partitie van $[-1, 1]$ is, welke fijner is ten opzichte van de partitie V; dat wil zeggen $V \subset W$. Derhalve zullen de onder- en bovensom van f over $[-1, 1]$ met partitie W een schatting geven van de integraal van f over $[-1, 1]$ welke nauwkeuriger is dan de schatting gegeven door de onder- en bovensom van f over $[-1, 1]$ met partitie V. Dit laatste wordt geïllustreerd in Figuur 2.1.

Zij $f : I \to \mathbb{R}$ een begrensde functie en zij $V = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ een partitie van I. We zullen dan in het vervolg de onder- en bovensom van f over I, met partitie V, respectievelijk noteren met $L(f, V)$ en $U(f, V)$. Verder zullen we de collectie van alle partities van I noteren met $\mathcal{V}(I)$.

Zoals Voorbeeld 2.1.1 al illustreert, valt het volgende resultaat te verwachten.

Lemma 2.1.1. *Zij $f : I \to \mathbb{R}$ een begrensde functie en zij verder $V = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ en $W = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ twee partities van I, met W fijner dan V. Dan geldt:*

$$\inf_I f \cdot (b - a) \leq L(f, V) \leq L(f, W) \leq U(f, W) \leq U(f, V) \leq \sup_I f \cdot (b - a). \tag{2.1}$$

Voor het bewijs van Lemma 2.1.1 verwijzen we de lezer naar [2], p116, p118.

Uit (2.1) volgt dat de Riemann-onder- en Riemann-bovenintegraal correct gedefinieerd zijn. We herinneren de lezer eraan dat de definities van deze laatste twee begrippen als volgt zijn.

Definitie 2.1.1 (Riemann-onder- en Riemann-bovenintegraal, [2], p117)**.** *Zij, opnieuw, $f : I \to \mathbb{R}$ een begrensde functie. We definiëren de Riemannn-onder- en Riemann-bovenintegraal, respectievelijk, als volgt:*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x = \sup\{L(f,V) \mid V \in \mathcal{V}(I)\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x = \inf\{U(f,V) \mid V \in \mathcal{V}(I)\}.$$

Met behulp van (2.1) kan men bovendien bewijzen dat de Riemann-onder-integraal altijd kleiner of gelijk is aan de Riemann-bovenintegraal (zie [2], p119.)

We hebben nu voldoende intuïtie en voorkennis omtrent de Riemann-integraal in herhaling gebracht, derhalve herinneren we de lezer nu aan de formele definitie van de Riemann-integraal.

Definitie 2.1.2 (Riemann-integraal, [2], p119)**.** *Zij $f : I \to \mathbb{R}$ een functie. We zeggen dan dat f Riemann-integreerbaar is over I indien het volgende geldt:*

(i) f is een begrensde functie;

(ii) $\underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x$.

Indien f Riemann-integreerbaar is over I, dan noemen we het getal

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x := \underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x$$

de Riemann-integraal van f over I.

We reflecteren terug op het voorbeeld waarmee we deze paragraaf zijn begonnen (Voorbeeld 2.1.1.) Met behulp van Figuur 2.1 kan de lezer observeren dat uit Definitie 2.1.2, de functie f vanuit dit voorbeeld Riemann-integreerbaar is op $[-1, 1]$. In paragraaf 2.3 zullen we kennis maken met een klassiek voorbeeld van een functie welke niet Riemann-integreerbaar is. Deze functie staat bekend als de Dirichlet functie.

2.2 Eigenschappen van de Riemann-integraal

In deze paragraaf beschouwen we een aantal significante eigenschappen van Riemann-integratie.

We herinneren de lezer eraan dat iedere continue functie op een interval I Riemann-integreerbaar is, zoals blijkt uit de volgende stelling.

Stelling 2.2.1 (Lebesgue criterium voor Riemann-integreerbaarheid, [12], p104)**.** *Zij $f : I \to \mathbb{R}$ een begrensde functie. f is Riemann-integreerbaar over I dan en slechts dan als f bijna overal continu is op I.*

Het bewijs van deze stelling vergt enige kennis over het begrip 'bijna overal.' In het volgende hoofdstuk zullen we dit begrip definiëren. Verder zullen we Stelling 2.2.1 in Hoofdstuk 4 bewijzen. Voor nu mag de lezer deze stelling voor waar aannemen en er bovendien vanuit gaan dat elke continue functie in het bijzonder bijna overal continu is. Vervolgens kan de lezer observeren dat inderdaad iedere continue functie $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar is over I.

Zij $f : I \to \mathbb{R}$ een functie die Riemann-integreerbaar is over I. Zij vervolgens $F : I \to \mathbb{R}$ de functie gedefinieerd door:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t. \tag{2.2}$$

De laatste functie zullen we vanaf nu aanduiden als "het verloop van de Riemann-integraal van de functie f" (binnen het interval I.) Een tweede belangrijke eigenschap omtrent Riemann-integratie is dan de volgende.

$$\text{Zij } f : I \to \mathbb{R} \text{ een Riemann-integreerbare functie, dan is het verloop van de bijbehorende Riemann-integraal uniform continu.} \tag{2.3}$$

Intuïtief gezien is de continuïteit (herinner dat continuïteit op een gesloten en begrensde verzameling uniforme continuïteit impliceert) van het verloop van de Riemann-integraal behorend bij een Riemann-integreerbare functie $f : I \to \mathbb{R}$ logisch, vanwege de begrensdheid van de functie f. Stel, immers, dat er een Riemann-integreerbare functie f gedefinieerd op het interval I zou bestaan waarvan het verloop van de bijbehorende Riemann-integraal discontinu is. Dan zou er een x uit I bestaan waarvoor geldt dat de integraal van f

over $[x, x+h]$ ($[x-h, x]$) - met $h > 0$ en zodanig dat $x + h \in I$ ($x - h \in I$) - niet naar 0 nadert wanneer h willekeurig dicht bij 0 komt. Dit zou betekenen dat de functie f op dit deelinterval divergeert, wat in tegenspraak is met de begrendsdheid van f.

Voor de volledigheid zullen we (2.3) noteren als stelling en deze vervolgens formeel bewijzen.

Stelling 2.2.2 (Uniforme continuïteit van het verloop van de integraal)**.** *Zij $f : I \to \mathbb{R}$ een functie die Riemann-integreerbaar is over I. Zij verder de functie $F : I \to \mathbb{R}$ gedefinieerd zoals in (2.2). Dan is de functie F uniform continu op I.*

Bewijs. De gevraagde uniforme continuïteit is bewezen indien we voor een willekeurig punt c uit I aantonen dat F continu is in c en we vervolgens aantonen dat de continuïteit van F over I uniform is. We moeten dus aantonen dat voor willekeurige $\epsilon > 0$ een $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $x \in I$ met $|x - c| < \delta$ geldt $|F(x) - F(c)| < \epsilon$.

Zij nu c een willekeurig punt uit I. Stel dat voor x geldt $|x - c| < \delta$ en veronderstel verder - zonder verlies van algemeenheid - dat $x \geq c$. Dan geldt:

$$F(x) - F(c) = \int_c^x f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Uit Definitie 2.1.2 volgt dat f een begrensde functie is, derhalve volgt het bestaan van een constante $M > 0$ waarvoor geldt $|f| \leq M$. Uit dit laatste volgt dan:

$$-\int_c^x M\ \mathrm{d}t \leq \int_c^x f(t)\ \mathrm{d}t \leq \int_c^x M\ \mathrm{d}t.$$

Ofwel,

$$-M(x-c) \leq \int_c^x f(t)\ \mathrm{d}t \leq M(x-c).$$

We zien dus dat de volgende afschatting voor $|F(x) - F(c)|$ geldt:

$$|F(x) - F(c)| \leq M|x - c|.$$

Uit deze afschatting voor $|F(x) - F(c)|$ volgt de volgende ongelijkheid:

$$|F(x) - F(c)| < M\delta.$$

Gezien $M > 0$ kunnen we $\delta = \frac{\epsilon}{M}$ kiezen. We zien dan dat we voor een willekeurig punt c uit I hebben bewezen dat de functie F uniform continu is in c. Hiermee is de stelling bewezen. $\square$

We zijn nu aangekomen bij de laatste eigenschap die we zullen beschouwen. Deze eigenschap is geformuleerd als stelling welke ook wel bekend staat als de inverse fundamentele stelling van de Infinitesimaalrekening. Deze stelling is als volgt.

Stelling 2.2.3 (Inverse fundamentele stelling van de Infinitesimaalrekening, [8], p1)**.** *Zij $f : I \to \mathbb{R}$ continu en zij verder $F : I \to \mathbb{R}$ de functie zoals gedefinieerd in (2.2). Dan geldt dat de functie F differentieerbaar is op I, met als afgeleide $F'(x) = f(x)$, voor $x \in I$.*

Bewijs. In dit bewijs volgen we de behandeling van [8], p2.

Gezien f continu is op I, weten we dat f Riemann-integreerbaar is over I. We zien dus dat

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

bestaat.

We moeten bewijzen dat $F'(x) = f(x)$ voor willekeurige $x \in I$. Merk derhalve het volgende op:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Veronderstel nu - zonder verlies van algemeenheid - dat $h > 0$. Gezien f continu is op het gesloten en begrensde interval $[x, x+h]$, neemt f een minimale waarde m en maximale waarde M aan in het laatstgenoemde interval. Merk op dat deze minimale en maximale waarden afhankelijk zijn van h, ofwel $m = m_h$ en $M = M_h$. Op $[x, x+h]$ hebben we dus $m_h \leq f(t) \leq M_h$. Uit dit laatste volgt dan:

$$\int_x^{x+h} m_h\ \mathrm{d}t \leq \int_x^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t \leq \int_x^{x+h} M_h\ \mathrm{d}t.$$

Ofwel,

$$hm_h \leq \int_x^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t \leq hM_h.$$

Ofwel,

$$m_h \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t \leq M_h.$$

Uit de continuïteit van f op het steeds kleiner wordende interval $[x, x+h]$ volgt dan:

$$\lim_{h \to 0} m_h = \lim_{h \to 0} M_h = f(x).$$

Gezien m_h en M_h, respectievelijk, steeds de minimale en maximale waarden zijn van de functie f op het steeds kleiner wordende interval $[x, x+h]$, volgt dan:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t = f(x).$$

Hiermee is de stelling bewezen. □

2.3 Beperkingen van de Riemann-integraal

Nu de lezer bekend is met Riemann-integratie en met een aantal bijbehorende significante eigenschappen, is het tijd om een aantal beperkingen van Riemann-integratie te behandelen. Deze paragraaf is derhalve aan dit laatste toegewijd.

Merk op dat uit Stelling 2.2.1 een beperking van de Riemann-integraal volgt. Immers, uit deze stelling volgt dat niet elke discontinue functie $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar is. Zoals in paragraaf 2.1 al benoemd is, is een voorbeeld van een dergelijke discontinue functie de zogenaamde Dirichlet functie. De definitie van deze functie - op een interval I - is als volgt:

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) := \begin{cases} 1 & \text{als } x \in \mathbb{Q} \cap I, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Intuïtief gezien is het logisch dat deze functie niet Riemann-integreerbaar is op het gegeven domein, immers, we herinneren de lezer aan het feit dat de rationale getallen dicht zijn in de reëele getallen. Dit wil zeggen dat tussen

ieder paar verschillende reële getallen ten minste één rationaal getal is gelegen. Uit dit laatste en uit de definitie van de Dirichlet functie op een interval I volgt dan dat de bovensom behorend bij een willekeurige partitie van I altijd strict groter is dan de bijbehorende ondersom. In het bijzonder is de bovenintegraal dus strict groter dan de onderintegraal (om precies te zijn, is de bovenintegraal gelijk aan $b-a$ en de onderintegraal is gelijk aan 0.) Vanuit Definitie 2.1.2 volgt dan dat de Dirichlet functie niet Riemann-integreerbaar is over een interval I (en bovendien ook niet over $\mathbb{R}$.)
In het volgende hoofdstuk zullen we het voorbeeld van de Dirichlet functie opnieuw tegenkomen. Dit voorbeeld heeft immers betrekking tot de monotone convergentie stelling (Stelling 3.2.1), welke in het volgende hoofdstuk besproken zal worden. We zullen ondermeer ook zien dat de Dirichlet functie - gedefinieerd op een interval I - wél Lebesgue-integreerbaar is!

Een andere beperking van de Riemann-integraal - welke betrekking heeft op rijen van (Riemann-integreerbare) functies $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - is dat we tot op zekere hoogte limieten en integralen mogen verwisselen. Wanneer we te maken hebben met een rij van (Riemann-integreerbare) functies, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gedefinieerd op een interval I - welke convergeert tot een zekere functie $f : I \to \mathbb{R}$ - en we beschouwen:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x,$$

dan moet men meestal een sterke conditie eisen (zoals uniforme convergentie van de rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in combinatie met Riemann-integreerbaarheid van alle f_n) om de limiet en de integraal te mogen verwisselen. Ook op deze beperking zullen we in het volgende hoofdstuk terugkomen in het licht van Lebesgue-integratie, gezien deze beperking betrekking heeft tot de gedomineerde convergentie stelling (Stelling 3.2.4.)

Hoofdstuk 3

De Lebesgue-integraal tegenover de Riemann-integraal

In paragraaf 2.3 hebben we gesteld dat de Riemann-integraal beperkingen heeft die betrekking hebben op discontinue functies en het verwisselen van limieten en integralen. De Franse wiskundige Henri Lebesgue (1875–1941) merkte op dat functies welke bijna overal continu zijn prima geïntegreerd kunnen worden, uitgaande van de definitie van de integraal volgens Riemann. Echter, tegelijkertijd benoemde Lebesgue ook dat men geen reden heeft om te hopen dat functies welke overal discontinu zijn ook Riemann-integreerbaar zijn. Immers, zo zei Lebesgue zelf het volgende over een functie f welke overal discontinu is:

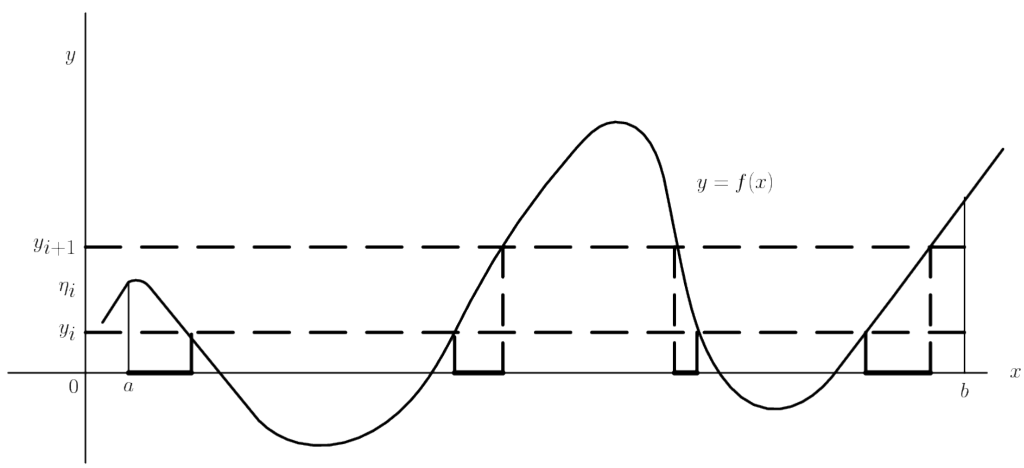
> *Het nemen van intervallen* (x_i, x_{i+1})*, dat wil zeggen waarden van* $f(x)$ *corresponderend met waarden van* x *die dichter bij elkaar zijn gelegen, garandeerd geenzins dat men waarden van* $f(x)$ *neemt, waarvan het onderlinge verschil kleiner wordt.* [9]

Het zijn deze beperkingen en observaties die Lebesgue hebben gemotiveerd om een nieuwe definitie van de integraal te ontwikkelen, waarbij in het bijzonder, niet het domein van een functie, maar het co-domein van de functie wordt gepartitioneerd in steeds kleinere intervallen.[3], p5.

In dit hoofdstuk zullen we de Lebesgue-integraal bestuderen (paragraaf 3.1). Echter, de hoofdzaak van dit hoofdstuk is het behandelen van verschillende convergentiestellingen welke gelden voor de Lebesgue-integraal en welke de beperkingen van de Riemann-integraal, die reeds in paragraaf 2.3 zijn besproken, oplossen (paragraaf 3.2).

3.1 Definitie van de Lebesgue-integraal

Om de Lebesgue-integraal formeel te kunnen definiëren, is het belangrijk dat de lezer bekend is met een stuk achtergrondkennis binnen de maattheorie. Gezien het veel werk is om dit alles te bestuderen, beschouwen we het achterliggende idee van de Lebesgue-integraal, van waaruit we beknopt naar de formele definitie van de Lebesgue-integraal toe kunnen werken. We beschrijven het achterliggende idee met behulp van de onderstaande continue functie f op het interval (a, b).



Figuur 3.1: Weergave van de verzameling E_i [3], p6.

Het doel van Lebesgue was om een definitie van de integraal op te stellen welke ondermeer toepasbaar is op een groot aantal discontinue functies (zoals de Dirichlet functie.) Derhalve is het logisch om het interval $(\underline{f}, \overline{f})$ - begrensd door de boven- en ondergrens van f op het interval (a, b) - te partitioneren, in plaats van het interval (a, b). Immers, op deze manier kunnen we het interval (a, b) verdelen in deelverzamelingen gebasseerd op waarden van $f(x)$, waarvan het onderlinge verschil zeer klein is.

Het partitioneren van het interval $(\underline{f}, \overline{f})$ doen we met behulp van de getallen y_i, zoals weergegeven in Figuur 3.1. We stellen hierbij dat deze getallen y_i onderling minder dan ϵ verschillen, waarbij $\epsilon > 0$. we beschouwen nu de waarden van $f(x)$ waarvoor geldt:

$$y_i \leq f(x) \leq y_{i+1}.$$

De hiermee corresponderende waarden van x vormen dan een deelverzameling $E_i \subset (a, b)$. In het geval van ons voorbeeld (zie Figuur 3.1) bestaat E_i uit vier intervallen. In andere gevallen kan E_i er zeer complex uitzien, echter, dit maakt voor de theorie niet uit. Zij nu η_i een willekeurig getal tussen y_i en y_{i+1}. Dan is het verschil tussen η_i en $f(x)$ met $x \in E_i$ kleiner dan ϵ. Laat nu $m(E_i)$ de maat zijn van de verzameling E_i (het begrip 'maat' zullen we spoedig definiëren.) In dit geval nemen we als maat van E_i de lengte van de vier intervallen waaruit E_i is opgebouwd. Kies verder uit alle (y_i, y_{i+1}) een getal η_i. Hierbij geldt dat $i \in I$, met I eindig. Merk dan nu op dat door

$$S = \sum_{i \in I} \eta_i m(E_i) \tag{3.1}$$

een schatting van de integraal $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ wordt gegeven. [3], p6, p7.

Vanuit dit achterliggende idee moeten we ons zelf nu de volgende vraag stellen:

> "Wat is een maat?"

We zullen dit begrip definiëren met behulp van het voorbeeld van zo net (Figuur 3.1.) Overdek de verzameling E_i met een eindig aantal of aftelbaar oneindig aantal intervallen, en laat $l_1, l_2, \ldots$ de lengtes zijn van deze intervallen. We willen dan graag hebben dat

$$m(E_i) \leq l_1 + l_2 + \ldots$$

Wanneer we vervolgens kijken naar de grootste ondergrens van de collectie bestaande uit alle aftelbare overdekkingen van $m(E_i)$ welke aan de laatstgenoemde ongelijkheid voldoen, dan is dit een bovengrens van $m(E_i)$. Derhalve noteren we deze bovengrens met $\overline{m(E_i)}$ en we hebben dan dus:

$$m(E_i) \leq \overline{m(E_i)}. \tag{3.2}$$

Zij nu E_i^c het complement van E_i in (a,b). Dan hebben we op soortgelijke wijze als net:

$$m(E_i^c) \leq \overline{m(E_i^c)}.$$

Uiteraard is het wenselijk dat het volgende geldt:

$$m(E_i) + m(E_i^c) = m[(a,b)] = b - a.$$

Derhalve moet de volgende ongelijkheid gelden:

$$m(E_i) \geq b - a - \overline{m(E_i^c)}. \tag{3.3}$$

We observeren nu dat de ongelijkheden (3.2) en (3.3), respectievelijk, een boven- en ondergrens vormen van $m(E_i)$. Merk vervolgens op dat deze ongelijkheden elkaar nooit tegenspreken. Wanneer deze onder- en bovengrens gelijk zijn aan elkaar, dan is $m(E_i)$ dus gedefinieerd en zeggen we dat E_i meetbaar is. Indien voor een functie f de verzamelingen E_i meetbaar zijn voor iedere keuze van de getallen y_i, dan zeggen we dat f een meetbare functie is. Vervolgens valt in te zien dat wanneer de getallen y_i ϵ van elkaar verschillen waarbij ϵ naar nul nadert, de som S uit (3.1) nadert tot $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. We zien dus dat een functie meetbaar moet zijn om lebesgue-integreerbaar te kunnen zijn. [3], p8.

Uit het bovenstaande idee van de maat kunnen we opmerken dat het noodzakelijk is dat het interval (a,b) meetbaar moet zijn. Verder dient de lezer te observeren dat wanneer $A \subset (a,b)$ meetbaar is, $A^c \subset (a,b)$ meetbaar is. Ook is met inductie te bewijzen dat de vereniging van een rij $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ van meetbare deelverzamelingen uit (a,b) meetbaar is. We kunnen deze feiten generaliseren voor een willekeurige verzameling X, welke de rol inneemt van (a,b) in het reeds beschreven voorbeeld. Dit leidt ons tot de volgende formele definitie.

Definitie 3.1.1 (σ-algebra, Definitie 3.1 uit [12])**.** *Een σ-algebra $\mathcal{A}$ op een verzameling X is een familie van deelverzamelingen van X met de volgende eigenschappen:*

$$X \in \mathcal{A}, \tag{Σ_1}$$

$$A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}, \tag{Σ_2}$$

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}. \tag{Σ_3}$$

Een verzameling $A \in \mathcal{A}$ heet meetbaar of $\mathcal{A}$-meetbaar.

Met deze laatste definitie en het reeds beschreven idee van de maat, zien we dus dat een maat op een verzameling X een afbeelding is welke gedefinieerd is op een σ-algebra op X. Dit leidt ons tot de volgende formele definitie van een maat op een verzameling X.

Definitie 3.1.2 (Maat, [12], p23)**.** *Een (positieve) maat μ op X is een afbeelding $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ welke voldoet aan:*

$$\mathcal{A} \text{ is een } \sigma\text{-algebra op } X, \tag{M$_0$}$$

$$\mu(\emptyset) = 0, \tag{M$_1$}$$

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ paarsgewijs disjunct} \Longrightarrow \mu\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n). \tag{M$_2$}$$

Hierbij is $\biguplus$ notatie voor een disjuncte vereniging.

Voor een verzameling X en een σ-algebra $\mathcal{A}$ op X, wordt het paar $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte genoemd. Zij verder μ een maat op X, dan wordt $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte genoemd.

Nu de lezer bekend is met de formele definitie van een maat μ op een verzameling X, kunnen we het oog richten op de formele definitie van de Lebesgue-integraal. Om dit te kunnen doen, zullen we nu het begrip 'simpele functie' definiëren. Simpele functies zijn immers de 'bouwstenen' van de Lebesgue-integraal, gezien iedere positieve meetbare functie de puntsgewijze limiet is van een stijgende rij simpele functies. Dit laatste staat bekend als het Lemma van Sombrero, waar we dadelijk op zullen terugkomen. De definitie van een simpele functie is als volgt.

Definitie 3.1.3 (Simpele functie, [12], p63)**.** *Een simpele functie $f : X \to \mathbb{R}$ op een meetbare ruimte $(X, \mathcal{A})$ is een functie van de vorm*

$$f(x) = \sum_{m=1}^{M} y_m \mathbb{1}_{A_m}(x), \quad M \in \mathbb{N}, y_m \in \mathbb{R}, A_m \in \mathcal{A} \text{ disjunct.} \tag{3.4}$$

Hierbij is $\mathbb{1}_{A_m} : X \to \{0, 1\}$ de indicatorfunctie gedefinieerd door:

$$\mathbb{1}_{A_m}(x) := \begin{cases} 1 & \text{als } x \in A_m, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Indien we het volgende hebben:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} z_n \mathbb{1}_{B_n}(x), \quad N \in \mathbb{N}, z_n \in \mathbb{R}, z_0 := 0, B_n \in \mathcal{A}, \ X = \biguplus_{n=0}^{N} B_n, \tag{3.5}$$

dan wordt (3.5) een standaard weergave van f genoemd. De verzameling van simpele functies noteren we met $\mathcal{E}(\mathcal{A})$.

Vanuit de bovenstaande definitie kunnen we opmerken dat een simpele functie meetbaar is. En gezien elke simpele functie slechts een eindig aantal waarden aanneemt, hebben we voor elke simpele functie een standaard weergave. [12], p63.

We observeren nu het reeds genoemde, zogenaamde Lemma van Sombrero.

Lemma 3.1.1 (Lemma van Sombrero, [12], p64, p65)**.** *Laat $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte zijn. Iedere positieve meetbare functie $u : X \to [0, \infty]$ is de puntsgewijze limiet van een stijgende rij simpele functies $f_n \in \mathcal{E}(\mathcal{A}), f_n \geq 0$. Ofwel,*

$$u(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \quad f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \cdots . \tag{3.6}$$

Lemma 3.1.1 is essentieel voor de correctheid van de formele definitie van de Lebesgue-integraal, zoals we dadelijk zullen gaan zien. Voor een bewijs van dit lemma verwijzen we de lezer naar [12], p65.

Voor een simpele functie f in standaard weergave lijkt het logisch dat de bijbehorende Lebesgue-integraal gegeven wordt door:

$$I_\mu(f) = \sum_{n=0}^{N} y_i \mu(B_i) \in [0, \infty]. \tag{3.7}$$

Het komt uiteindelijk wel neer op deze laatste gelijkheid, echter, met deze gelijkheid stuiten we wel op een probleem. Stel immers dat geldt $\mu(B_i) = \infty$, $\mu(B_j) = \infty$, met $i \neq j$. Stel verder dat geldt $y_i = 1, y_j = -1$. In dit geval is dan de uitdrukking $\infty - \infty$ onderdeel van de sommatie uit (3.7). Daarmee is deze sommatie niet goed gedefinieerd. Om dit probleem te voorkomen, beperken we ons derhalve voorlopig tot positieve simpele functies ($\mathcal{E}^+(\mathcal{A})$). Voor deze simpele functies geldt dat alle y_i in de sommatie van (3.7) positief zijn. Nu resteert echter nog de vraag of de waarde van de sommatie uit (3.7) afhankelijk is van een standaard weergave van een simpele functie (een standaard weergave van een simpele functie is immers niet uniek!) Dit laatste blijkt gelukkig niet zo te zijn. Voor het bewijs van deze onafhankelijkheid verwijzen we de lezer naar Lemma 9.1 en diens bewijs, uit [12].

We zien nu dus dat de volgende definitie - gebasseerd op (3.7) - goed gedefinieerd is.

Definitie 3.1.4 (Definitie 9.2 uit [12])**.** *Laat $f = \sum_{i=0}^{M} y_i \mathbb{1}_{A_i} \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$ een simpele functie zijn in standaard weergave. Dan is het getal*

$$I_\mu(f) := \sum_{i=0}^{M} y_i \mu(A_i) \in [0, \infty]$$

de (μ-)integraal van f.

(Een Lebesgue-integraal wordt ook wel genoteerd als (μ-)integraal. Hierbij slaat μ op de maat waarmee men werkt.)

Opmerking 3.1.1. *Merk op dat $I_\mu(f)$ uit Definitie 3.1.4 de formele uitdrukking is van de som S uit (3.1), met $y_i = \eta_i$ en $\mu(A_i) = m(E_i)$.*

Laten we vanaf nu alle (positieve) meetbare functies (meetbare afbeeldingen van de vorm $u : X \to \mathbb{R}$) noteren met $\mathcal{M} := \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ($\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$). Uit Definitie 3.1.4 in combinatie met Lemma 3.1.1, volgt dan de volgende definitie.

Definitie 3.1.5 ((μ-)integraal voor positieve meetbare functies, [12], p75)**.** *Laat $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte zijn. De (μ-)integraal van een positieve functie $u \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ wordt gegeven door:*

$$\int u \; \mathrm{d}\mu := \sup\{I_\mu(g) : g \leq u, \; g \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})\} \in [0, \infty].$$

Tot dusver weten we hoe de Lebesgue-integraal is gedefinieerd voor positieve meetbare functies. We willen echter deze definitie uitbreiden tot alle meetbare functies. We kunnen dit als volgt doen. Zij $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. We kunnen dan de functie f schrijven als $f^+ - f^-$, waarbij $f^+(x) := \max\{u(x), 0\}$ en $f^-(x) := -\min\{u(x), 0\}$. Merk dan vervolgens op dat f^+ en f^- positieve meetbare functies zijn. Derhalve volgt met de lineariteit van Lebesgue-integralen behorend bij positieve meetbare functies (zie [12], p77) dat de formele definitie van de Lebesgue-integraal voor meetbare functies als volgt is.

Definitie 3.1.6 (Lebesgue-integraal, [12], p82). *Een functie $u : X \to \mathbb{R}$, gedefinieerd op een maatruimte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ is (μ-)integreerbaar indien de functie meetbaar is en verder indien geldt $\int u^+ \, \mathrm{d}\mu$, $\int u^- \, \mathrm{d}\mu < \infty$. In dit geval noemen we*

$$\int u \, \mathrm{d}\mu := \int u^+ \, \mathrm{d}\mu - \int u^- \, \mathrm{d}\mu \in (-\infty, \infty) \tag{3.8}$$

de (μ-)integraal van u. We schrijven $\mathcal{L}^1(\mu)$ voor de verzameling van alle reëelwaardige (μ-)integreerbare functies.

3.2 'Bijna overal' en convergentiestellingen

Nu we bekend zijn met de formele definitie van de Lebesgue-integraal, zullen we ons gaan focussen op een tweetal belangrijke stellingen welke volgen uit de Lebesgue-integraal. Deze stellingen staan bekend als de zogenaamde convergentie stellingen en hebben beiden betrekking op integralen van rijen van functies.

Stelling 3.2.1 (Monotone convergentie, Stelling 12.1 uit [12]). *Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte.*

(i) Zij $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ een stijgende rij van integreerbare functies $u_1 \leq u_2 \leq \cdots$ met limiet $u := \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = \lim_{n\to\infty} u_n$. Dan $u \in \mathcal{L}^1(\mu)$ dan, en slechts dan als $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \, \mathrm{d}\mu < \infty$. In het laatste geval geldt:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \, \mathrm{d}\mu = \int \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n \, \mathrm{d}\mu.$$

(ii) Zij $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ een dalende rij van integreerbare functies $v_1 \geq v_2 \geq \cdots$ met limiet $v := \inf_{n\in\mathbb{N}} v_n = \lim_{n\to\infty} v_n$. Dan $v \in \mathcal{L}^1(\mu)$ dan, en slechts dan als $\inf_{n\in\mathbb{N}} \int v_n \, \mathrm{d}\mu > -\infty$. In het laatste geval geldt:

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \int v_n \, \mathrm{d}\mu = \int \inf_{n\in\mathbb{N}} v_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Om deze stelling te kunnen bewijzen, maken we gebruik van de Stelling van Beppo Levi. Dit resultaat is als volgt.

Stelling 3.2.2 (Beppo Levi, [12], p75)**.** *Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Voor een stijgende rij van functies $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \cdots$, hebben we het supremum $u := \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ en*

$$\int \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n \ \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \ \mathrm{d}\mu. \tag{3.9}$$

Merk op dat we $\lim_{n\to\infty}$ mogen schrijven in plaats van $\sup_{n\in\mathbb{N}}$ in (3.9). Bovendien geldt (3.9) binnen het interval $[0, \infty]$, i.e. het geval '$\infty = \infty$' is mogelijk.

Bewijs. In dit bewijs volgen we de behandeling van [12], p75 - 77.

Merk op dat $u \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ (zie Gevolg 8.10 uit [12].)

Stap 1. Claim: $u, w \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, $u \leq w \Longrightarrow \int u \ \mathrm{d}\mu \leq \int w \ \mathrm{d}\mu$. Zij $u \leq w$, dan geldt voor iedere simpele functie f met de eigenschap $f \leq u$ ook dat $f \leq w$. Derhalve krijgen we dan:

$$\begin{aligned}\int u \ \mathrm{d}\mu &= \sup\{I_\mu(f) : f \leq u,\ f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})\}\\ &\leq \sup\{I_\mu(g) : g \leq u,\ g \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})\} = \int w \ \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Stap 2. Claim: $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \ \mathrm{d}\mu \leq \int \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n \ \mathrm{d}\mu$. Uit de claim behorend bij stap 1 volgt:

$$\begin{aligned}\forall m : u_m \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n &\Longrightarrow \forall m : \int u_m \ \mathrm{d}\mu \leq \underbrace{\int \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n \ \mathrm{d}\mu}_{\text{onafhankelijk van } m}\\ &\Longrightarrow \sup_{m\in\mathbb{N}} \int u_m \ \mathrm{d}\mu \leq \int \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n \ \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Stap 3. Claim: $f \leq u$, $f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A}) \Longrightarrow I_\mu(f) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \ \mathrm{d}\mu$. Zij $f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$ een willekeurige simpele functie zodanig dat $f \leq u$. Zij verder $\alpha \in (0, 1)$ vast. Dan geldt:

$$
\begin{aligned}
u = \sup u_n &\Longrightarrow \forall x \ \exists N(x,\alpha) \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N(x,\alpha) : \alpha f(x) \leq u_n(x) \\
&\Longrightarrow B_n := \underbrace{\{x : \alpha f(x) \leq u_n(x)\}}_{\in \mathcal{A}} \uparrow_{n\to\infty} X \\
&\Longrightarrow \alpha \mathbb{1}_{B_n} \cdot f \leq \mathbb{1}_{B_n} \cdot u_n \leq u_n,
\end{aligned}
$$

waarbij we gebruik maken van de definitie van de verzamelingen B_n en van het feit dat $\mathbb{1}_{B_n} \leq 1$. Voor alle simpele functies $f = \sum_{m=0}^{M} y_m \mathbb{1}_{A_m}$ hebben we dan:

$$
\alpha \sum_{m=0}^{M} y_m \mu(B_n \cap A_m) = I_\mu(\alpha \mathbb{1}_{B_n} \cdot f) \leq \int u_n \ \mathrm{d}\mu \leq \underbrace{\sup_{m\in\mathbb{N}} \int u_m \ \mathrm{d}\mu}_{\text{onafhankelijk van } n} .
$$

Gezien de rechterkant van het laatstgenoemde onafhankelijk is van n en omdat $B_n \uparrow X$, kunnen we $n \to \infty$ nemen, met als gevolg dat $\mu(B_n \cap A_m) \to \mu(A_m)$. Vervolgens krijgen we dan:

$$
\alpha I_\mu(f) = \alpha \sum_{m=0}^{M} y_m \mu(A_m) \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} \int u_m \ \mathrm{d}\mu \quad \forall \alpha \in (0,1).
$$

Gezien de rechterkant van het laatstgenoemde onafhankelijk is van $\alpha \in (0,1)$, volgt de claim wanneer $\alpha \to 1$.

Stap 4. We observeren ten slotte het supremum over alle $f \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$ met $f \leq u$. Uit de claim behorend bij stap 3 volgt dan:

$$
\int u \ \mathrm{d}\mu = \sup_{\mathcal{E}^+(\mathcal{A}) \ni f \leq u} I_\mu(f) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \ \mathrm{d}\mu.
$$

Uit dit laatste in combinatie met de claim behorend bij stap 2 volgt dan het gewenste resultaat. Hiermee is de stelling bewezen. □

We zullen nu vervolgens Stelling 3.2.1 bewijzen.

Bewijs van Stelling 3.2.1. In dit bewijs volgen we de behandeling van [12], p97.

Uit $u_n := -v_n$ volgt dat (i), (ii) impliceert. voor (i) merken we op dat $u_n - u_1 \in \mathcal{L}^1(\mu)$ een stijgende rij van positieve functies

$$0 \leq u_n - u_1 \leq u_{n+1} - u_1 \leq \cdots$$

definieert, waarvoor we de Stelling van Beppo Levi kunnen gebruiken:

$$0 \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int (u_n - u_1)\ \mathrm{d}\mu = \int \sup_{n\in\mathbb{N}} (u_n - u_1)\ \mathrm{d}\mu. \tag{3.10}$$

Veronderstel nu dat $u \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Gezien het supremum uit (3.10) een stijgende limiet is, krijgen we vanwege de lineariteit van de Lebesgue-integraal (zie [12], p85):

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n\ \mathrm{d}\mu &= \int (u - u_1)\ \mathrm{d}\mu + \int u_1\ \mathrm{d}\mu \\ &= \int u\ \mathrm{d}\mu - \int u_1\ \mathrm{d}\mu + \int u_1\ \mathrm{d}\mu = \int u\ \mathrm{d}\mu < \infty.\end{aligned}$$

Voor het omgekeerde, als $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n\ \mathrm{d}\mu < \infty$, zien we vanuit (3.10) dat $u - u_1 \in \mathcal{L}^1(\mu)$ en, gezien $u_1 \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $u = (u - u_1) + u_1 \in \mathcal{L}^1(\mu)$ vanwege de lineariteit van de Lebesgue-integraal. Derhalve impliceert (3.10):

$$\int u\ \mathrm{d}\mu = \int (u - u_1)\ \mathrm{d}\mu + \int u_1\ \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n\ \mathrm{d}\mu < \infty.$$

□

We zullen nu, als toepassing van Stelling 3.2.1, laten zien dat de Dirichlet functie Lebesgue-integreerbaar is. Hiervoor maken we gebruik van de zogenaamde Lebesgue-maat (notatie: λ.) Informeel gesproken is de Lebesgue-maat de standaard maat voor de n-dimensionale Euclidische ruimten. Voor $n = 1, 2, 3$ komt dit, respectievelijk, overeen met de lengte van een (verzameling) interval(len); de oppervlakte van een (verzameling van) rechthoek(en) en het volume van een (verzameling) balk(en). Merk op dat we in het voorbeeld aan het begin van dit hoofdstuk ook gebruik hebben gemaakt van de Lebesgue-maat. Voor een formele definitie van de Lebesgue-maat en alle gerelateerde stof, verwijzen we de lezer naar [12], H4 t/m H6.

Zij $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ een enumeratie van alle rationale getallen op een interval $I = [a, b]$. We kunnen dan de Dirichlet functie, gedefinieerd op het interval I, schrijven als limiet van een stijgende rij van functies, $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$, welke als volgt is gedefinieerd:

$$g_k(x) := \begin{cases} 1 & als\ x = a_j,\ voor\ j \leq k, \\ 0 & anders. \end{cases} \tag{3.11}$$

We zullen laten zien dat g_k voor alle $k \in \mathbb{N}$ Lebesgue-integreerbaar is. Immers, zij $\epsilon > 0$ willekeurig en zij verder $x \in I$ willekeurig. Dan gaat $\lambda([x, x+\epsilon])$ $(\lambda([x-\epsilon, x]))$ naar 0 wanneer ϵ naar 0 nadert. Uit de monoticiteit van een maat (dit laatste kan de lezer bewijzen vanuit Definitie 3.1.2) volgt dan dat de Lebesgue-maat van een willekeurig punt $x \in I$ gelijk is aan 0. Uit dit laatste in combinatie met eigenschap (M_2) vanuit Definitie 3.1.2 volgt dan dat de Lebesgue-maat van een aftelbare verzameling $A \subset I$ gelijk is aan 0. Merk vervolgens op dat uit dit laatste volgt dat de Lebesgue-integraal van elk van de functies g_k gelijk moet zijn aan 0. Uit Stelling 3.2.1 volgt dan dat de integraal van de Dirichlet functie op een willekeurig interval $I = [a, b]$ gelijk moet zijn aan 0.

De Dirichlet functie dient bovendien als tegenvoorbeeld op Stelling 3.2.1 in de context van Riemann-integratie. Men kan observeren dat de functies g_k, zoals in (3.11), Riemann-integreerbaar zijn. Immers, deze functies zijn opgebouwd uit een eindig aantal continue (constante) functies en daarmee zijn deze functies Riemann-integreerbaar. Echter, in paragraaf 2.3 hebben we gezien dat de Dirichlet functie op een interval $I = [a, b]$ niet Riemann-integreerbaar is. Derhalve geldt de monotone convergentie stelling (Stelling 3.2.1) niet in de context van Riemann-integratie.

We beëindigen dit hoofdstuk met het behandelen van de bekende gedomineerde convergentie stelling (Stelling 3.2.4). Informeel gesproken vertelt deze stelling dat we voor een rij Lebesgue-integreerbare functies met limietsfunctie u in $[-\infty, \infty]$ het limiet en de integraal mogen verwisselen indien de reeds genoemde rij van functies uniform begrensd is door een zekere Lebesgue-integreerbare functie. Voordat we deze stelling kunnen formuleren en bewijzen, dienen we eerst kennis op te doen van het Lemma van Fatou en het begrip 'bijna overal', met bijbehorende resultaten. De definitie van dit laatste begrip is als volgt.

Definitie 3.2.1 (Bijna overal, [12], p89). *Een (μ-)nul verzameling $N \in \mathcal{N}_\mu$ is een meetbare verzameling $N \in \mathcal{A}$ welke voldoet aan:*

$$N \in \mathcal{N}_\mu \Longleftrightarrow N \in \mathcal{A} \text{ met } \mu(N) = 0.$$

Indien een eigenschap $\Pi = \Pi(x)$ geldt voor alle $x \in X$ behalve voor x uit een nul verzameling $N \in \mathcal{N}_\mu$, dan zeggen we dat Π bijna overal geldt. Deze laatste uitspraak korten we af met Π a.e. (vanuit het Engelse "almost everywhere.")

Opmerking 3.2.1. *Nu we weten wat 'bijna overal' inhoudt, kunnen we vanuit Definitie 3.1.2 observeren dat iedere continue functie ook bijna overal continu is. Bovendien merken we op dat het resultaat van Stelling 3.2.1 nog steeds geldt indien de rij van meetbare functies $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$), zoals in deze stelling, bijna overal monotoon is en/of bijna overal convergeert tot de limietsfunctie u (v).*

Stelling 3.2.3 (Stelling 11.2 uit [12]). *Zij $u \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ een meetbare functie op een maatruimte $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dan geldt:*

(i) $\int |u| \, \mathrm{d}\mu = 0 \Longleftrightarrow |u| = 0$ *a.e.* $\Longleftrightarrow \mu\{u \neq 0\} = 0$,

(ii) $\mathbb{1}_N u \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *voor alle* $N \in \mathcal{N}_\mu$ *en* $\int_N u \, \mathrm{d}\mu = 0$.

Voor het bewijs van Stelling 3.2.3 verwijzen we de lezer naar [12], p90.

Vanuit de reeds genoemde stelling valt het volgende resultaat te verwachten.

Gevolg 3.2.1 ([12], p91). *Zij $u \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ en $v \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $v \geq 0$, dan geldt:*

$$|u| \leq v \quad \text{a.e.} \Longrightarrow u \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

Voor het bewijs van dit gevolg verwijzen we de lezer opnieuw naar [12], p91.

We zijn nu bijna zover om de gedomineerde convergentie stelling te formuleren en te bewijzen. Het resteert ons alleen nog om het Lemma van Fatou te bestuderen. Het bewijs van dit lemma kan de lezer, wederom, vinden in [12], p78, p79.

Lemma 3.2.1 (Fatou, [12], p78). *Zij $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ een rij van positieve meetbare functies. Dan geldt dat $u := \liminf_{n\to\infty} u_n$ meetbaar is en bovendien:*

$$\int \liminf_{n\to\infty} u_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int u_n \, \mathrm{d}\mu.$$

De gedomineerde convergentie stelling is nu als volgt.

Stelling 3.2.4 (Gedomineerde convergentie, [12], p97)**.** *Zij* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *een maatruimte en zij* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ *een rij van functies zodanig dat:*

(a) $|u_n(x)| \leq w(x)$ *voor alle* $n \in \mathbb{N}$*, voor bijna alle* $x \in X$ *en een* $w \in \mathcal{L}^1(\mu)$*,*

(b) $u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$ *bestaat in* $[-\infty, \infty]$ *voor bijna alle* $x \in X$*,*

Dan geldt dat $u \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *en hebben we dat*

(i) $\lim_{n\to\infty} \int |u_n - u| \; \mathrm{d}\mu = 0$*;*

(ii) $\lim_{n\to\infty} \int u_n \; \mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} u_n \; \mathrm{d}\mu = \int u \; \mathrm{d}\mu$*.*

Bewijs. In dit bewijs volgen we de behandeling van [12], p98.

Uit $|u_n| \leq w$ a.e. volgt dat $|u| = \lim_{n\to\infty} |u_n| \leq w$ a.e., en uit Gevolg 3.2.1 volgt dan dat $u \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Derhalve geldt dat:

$$\left| \int u_n \; \mathrm{d}\mu - \int u \; \mathrm{d}\mu \right| = \left| \int (u_n - u) \; \mathrm{d}\mu \right| \leq \int |u_n - u| \; \mathrm{d}\mu,$$

waaruit volgt dat (i), (ii) impliceert. Gezien

$$|u_n - u| \leq |u_n| + |u| \leq 2w \text{ a.e.} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

hebben we dat $2w - |u_n - u| \geq 0$ a.e., en vanuit Lemma 3.2.1 volgt dan:

$$\begin{aligned} \int 2w \; \mathrm{d}\mu &= \int \liminf_{n\to\infty} (2w - |u_n - u|) \; \mathrm{d}\mu \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int (2w - |u_n - u|) \; \mathrm{d}\mu \\ &= \int 2w \; \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |u_n - n| \; \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Dus $0 \leq \liminf_{n\to\infty} \int |u_n - u| \; \mathrm{d}\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int |u_n - n| \; \mathrm{d}\mu \leq 0$, met als gevolg dat $\lim_{n\to\infty} \int |u_n - u| \; \mathrm{d}\mu = 0$. $\square$

Het zal de lezer wellicht zijn opgevallen dat we in het bewijs van Stelling 3.2.4 gebruik hebben gemaakt van additiviteit en de driehoeksongelijkheid als eigenschappen van de Lebesgue-integraal, terwijl we niet hebben gecontroleerd of deze eigenschappen daadwerkelijk gelden voor de Lebesgue-integraal. Dit blijkt echter wel zo te zijn en het bewijs voor de geldigheid van deze eigenschappen kan de lezer terugvinden in [12], p85.

Merk op dat de gedomineerde convergentie stelling (Stelling 3.2.4) niet geldt in de context van Riemann-integratie. Immers, we kunnen exact hetzelfde tegenvoorbeeld (de Dirichlet functie) construeren, zoals we ook hebben gedaan om te laten zien dat de monotone convergentie stelling (Stelling 3.2.1) niet geldt in de context van Riemann-integratie. Neem derhalve weer de rij van functies $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zoals gedefinieerd in (3.11). En neem vervolgens als dominerende functie de constante functie 1. We hebben dan een rij van Riemann-integreerbare functies die convergeren tot de Dirichlet functie en welke wordt gedomineerd door de zojuist genoemde constante functie die bovendien Riemann-integreerbaar is. Echter, we weten dat de Dirichlet functie niet Riemann-integreerbaar is en derhalve concluderen we inderdaad dat Stelling 3.2.4 niet geldt in de context van Riemann-integratie.

Stelling 3.2.4 zou nog steeds gelden indien we in plaats van een rij Lebesgue-integreerbare functies ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$), een rij meetbare functies met limietsfunctie u hebben welke bijna overal uniform begrensd zijn door een functie $w \in \mathcal{L}^1(\mu)$ zoals in de stelling. Immers, uit de monotoniciteit van Lebesgue-integralen (zie [12], Stelling 10.4(iv)) in combinatie met Gevolg 3.2.1 zou dan volgen dat de desbetreffende rij van meetbare functies Lebesgue-integreerbaar zijn en daarmee ook de bijbehorende limietsfunctie u (zoals behandeld in het bewijs van Stelling 3.2.4.) Echter, in de context van Riemann-integratie garandeert de Riemann-integreerbaarheid van de functie w niet dat, noch de reedsgenoemde rij van meetbare functies Riemann-integreerbaar zijn, noch de bijbehorende limietsfunctie Riemann-integreerbaar is. Merk op dat het tegenvoorbeeld van de Dirichlet functie dit illustreert! Een mogelijke oplossing in de context van Riemann-integratie is om de extra eis te stellen dat de rij van functies Riemann-integreerbaar zijn; uniform begrensd zijn door een zekere constante M en bovendien dat de bijbehorende limietsfunctie Riemann-integreerbaar is. En zoals in paragraaf 2.3 al is benoemd zou een andere mogelijke oplossing zijn om de extra eis te stellen dat de rij van functies Riemann-integreerbaar zijn en bovendien uniform convergeren tot de limietsfunctie, wat immers impliceert dat de limietsfunctie Riemann-integreerbaar is. We zien nu dus dat de gedomineerde convergentie stelling voor Lebesgue-integratie inderdaad een zeer mooi resultaat is ten opzichte van een soortgelijk resultaat in de context van Riemann-integratie. [1]

Hoofdstuk 4

Bijdrage van de (λ-)integraal aan de infinitesimaalrekening

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien hoe de Lebesgue-integraal is gedefinieerd en dat vanuit deze definitie een aantal mooie stellingen volgen waaruit blijkt dat de Lebesgue-integraal soepeler is met rijen van functies en bijbehorende limietsfuncties dan de Riemann-integraal. Ook hebben we een voorbeeld gezien van een functie welke niet Riemann-integreerbaar is, maar wél Lebesgue-integreerbaar is. Dit alles leidt ons tot de vraag:

> "Is de klasse van bijna overal begrensde Lebesgue-integreerbare functies, gedefinieerd op een gesloten en begrensd interval een uitbreiding van de klasse van eigenlijke Riemann-integreerbare functies?"

Het is precies deze vraag waar we ons in dit hoofdstuk in zullen verdiepen. Derhalve zullen we ons in dit hoofdstuk beperken tot de Lebesgue-maat. Het doel hierbij is om de reeds genoemde klassen met elkaar te vergelijken, waarbij we een poging doen om beide klassen te visualiseren. Zo zullen we in paragraaf 4.1 zien dat iedere eigenlijke, Riemann-integreerbare functie ook Lebesgue-integreerbaar is en verder zullen we in deze paragraaf ook de reeds genoemde klasse van Riemann-integreerbare functies visualiseren doormiddel van het zogenaamde Lebesgue criterium voor Riemann-integreerbaarheid (herinner Stelling 2.2.1!) In paragraaf 4.2 zullen we de focus leggen op de reeds genoemde klasse van Lebesgue-integreerbare functies, met als doel deze klasse te visualiseren We beëindigen vervolgens deze paragraaf (en tevens dit hoofdstuk), met het definiëren van de klasse van functies welke het verschil vormen tussen de eerder genoemde klassen van functies.

4.1 De klasse van eigenlijke Riemann-integreerbare functies

Zoals reeds is benoemd, is het doel van deze paragraaf om de klasse van eigenlijke Riemann-integreerbare functies te visualiseren. Om dit te kunnen verwezenlijken, zullen we nu allereerst bewijzen dat elke eigenlijke Riemann-integreerbare functie (gedefinieerd op een gesloten en begrensd interval $I = [a, b]$) Lebesgue-integreerbaar is met betrekking tot de Lebesgue-maat (λ).

Stelling 4.1.1 (Stelling 12.8 uit [12])**.** *Zij $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ een meetbare en Riemann-integreerbare functie. Dan geldt:*

$$u \in \mathcal{L}^1(\lambda) \quad \textit{en} \quad \int_{[a,b]} u \, \mathrm{d}\lambda = (R) \int_a^b u(x) \, \mathrm{d}x.$$

Hierbij dient '(R)' voor de laatst genoemde integraal om te benadrukken dat deze integraal een Riemann-integraal is.

Om deze stelling te kunnen bewijzen moeten we nog één ander resultaat observeren, welke een direct gevolg is van Stelling 3.2.3.

Gevolg 4.1.1 ([12], p91)**.** *Zij $u, v \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ zodanig dat $u = v$ μ-bijna overal. Dan geldt:*

(i) $u, v \geq 0 \Longrightarrow \int u \, \mathrm{d}\mu = \int v \, \mathrm{d}\mu$;

(ii) $u \in \mathcal{L}^1(\mu) \Longrightarrow v \in \mathcal{L}^1(\mu) \quad$ *en* $\quad \int u \, \mathrm{d}\mu = \int v \, \mathrm{d}\mu$.

Voor het bewijs van het bovenstaande gevolg verwijzen we de lezer naar [12], p91.

Bewijs van Stelling 4.1.1. In dit bewijs volgen we de behandeling van [12], p103, p104.

Gezien u Riemann-integreerbaar is, bestaat er een rij van partities $V(i) = \{t_0, t_1, \cdots, t_i\}$ van $[a, b]$ zodanig dat:

$$\lim_{i\to\infty} L(u, V(i)) = \underline{\int} u = \overline{\int} u = \lim_{i\to\infty} U(u, V(i)).$$

Zonder verlies van algemeenheid mogen we veronderstellen dat $V(i) \subset V(i+1) \subset \cdots$, waarbij we observeren dat de onder- en bovensommen, respectievelijk, stijgen en dalen wanneer de partities verfijnen (herinner Lemma 2.1.1.) De corresponderende simpelfuncties $\sigma_u^{V(i)}$ en $\Sigma_u^{V(i)}$, respectievelijk, gedefinieerd door:

$$\sigma_u^{V(i)}(x) := \sum_{j=1}^{i} \inf_{x\in[t_{j-1},t_j]} u(x)\mathbb{1}_{[t_{j-1},t_j)}(x),$$

$$\Sigma_u^{V(i)}(x) := \sum_{j=1}^{i} \sup_{x\in[t_{j-1},t_j]} u(x)\mathbb{1}_{[t_{j-1},t_j)}(x),$$

convergeren monotoon tot:

$$\sigma_u := \sup_{i\in\mathbb{N}} \sigma_u^{V(i)} \le u \le \inf_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_u^{V(i)} =: \Sigma_u,$$

en vanuit Stelling 3.2.1 concluderen we:

$$\underline{\int} u = \lim_{i\to\infty} L(u, V(i)) = \lim_{i\to\infty} \int_{[a,b]} \sigma_u^{V(i)} \,\mathrm{d}\lambda = \int_{[a,b]} \sigma_u \,\mathrm{d}\lambda,$$

en bovendien:

$$\overline{\int} u = \lim_{i\to\infty} U(u, V(i)) = \lim_{i\to\infty} \int_{[a,b]} \Sigma_u^{V(i)} \,\mathrm{d}\lambda = \int_{[a,b]} \Sigma_u \,\mathrm{d}\lambda.$$

Ofwel, $\sigma_u, \Sigma_u \in \mathcal{L}^1(\lambda)$. Gezien u Riemann-integreerbaar is, hebben we:

$$\int_{[a,b]} \Sigma_u \,\mathrm{d}\lambda - \int_{[a,b]} \sigma_u \,\mathrm{d}\lambda = \overline{\int} u - \underline{\int} u = 0,$$

vanwaar Stelling 3.2.3(i) impliceert dat $\Sigma_u = \sigma_u$ Lebesgue a.e. Derhalve geldt:

$$\{u \ne \Sigma_u\} \cup \{u \ne \sigma_u\} \subset \{\sigma_u \ne \Sigma_u\} \in \mathcal{N}_\lambda,$$

en vanuit Gevolg 4.1.1(ii) concluderen we dan dat u Lebesgue-integreerbaar is. [12], p103, p104. $\square$

Het zal de lezer wellicht zijn opgevallen dat we veronderstellen dat u een meetbare functie is. Echter, de meetbaarheid van u volgt ook al uit de veronderstelling dat u Riemann-integreerbaar is. Immers, Uit dit laatste volgt het bestaan van de functies σ_u en Σ_u, waarbij σ_u het supremum is van de rij van simpele functies $\sigma_u^{V(i)}$ en waarbij Σ_u het infimum is van de rij van simpele functies $\Sigma_u^{V(i)}$ (Zie het bovenstaande bewijs.) Uit de meetbaarheid van de reeds genoemde rijen van simpelfuncties volgt dan dat σ_u en Σ_u meetbaar zijn (zie [12], p66.) Bovendien volgt uit het bovenstaande bewijs dat $\Sigma_u = \sigma_u = u$ Lebesgue a.e. Derhalve is u een meetbare functie. Vanuit Stelling 4.1.1 in combinatie met een dergelijk voorbeeld als de Dirichletfunctie, zien we nu dus dat de Lebesgue-integraal de eigenlijke Riemann-integraal uitbreidt.

We zullen dadelijk Stelling 2.2.1 gaan bewijzen, waarmee we zien dat we de klasse van eigenlijke Riemann-integreerbare functies kunnen visualiseren doormiddel van het begrip 'bijna overal', zoals in het vorige hoofdstuk is gedefinieerd. Merk op dat Stelling 2.2.1 daadwerkelijk de klasse van eigenlijke Riemann-integreerbare functies visualiseert. De lezer weet immers al vanuit hoofdstuk 2 dat iedere continue functie, gedefinieerd op een gesloten en begrensd interval, Riemann-integreerbaar is (dit zal de lezer dadelijk ook eindelijk gaan inzien). Echter, doormiddel van Stelling 2.2.1 weten we ook precies welke discontinue functies Riemann-integreerbaar zijn, waarmee we de gewenste klasse van eigenlijke Riemann-integreerbare functies complementeren.

Voordat we Stelling 2.2.1 gaan bewijzen, observeren we allereerst nog een voorbeeld waarin we Stelling 2.2.1 zullen toepassen.

Voorbeeld 4.1.1 (Thomae's functie, [5]). *Zij $T : [0,1] \to \mathbb{R}$ de functie gedefinieerd door:*

$$T(x) := \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{als } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ volledig vereenvoudigd}, \\ 0 & \text{als } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Deze functie staat bekend als Thomae's functie.

Merk op dat T discontinu is op alle rationale getallen. Immers, herinner dat elk rationaal getal x een limiet is van een rij irrationale getallen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Uit een dergelijke rij volgt dan dat de functie waarde $T(x_n)$ naar 0 nadert *wanneer n naar oneindig gaat, terwijl de functie waarde $T(x)$ ongelijk is aan 0. We concluderen derhalve inderdaad dat Thomae's functie discontinu is op alle rationale getallen.*

Het blijkt dat Thomae's functie wel continu is op $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Immers, merk allereerst vanuit de definitie van T op dat voor iedere rij $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ welke convergeert tot een irrationaal getal $y \in [0,1]$ en welke slechts een eindig aantal rationale elementen bevat, de functie waarde $T(y_n)$ convergeert tot $T(y)$, wanneer n naar oneindig gaat. Derhalve hebben we de continuïteit van T op $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ bewezen indien we voor iedere rij van rationale getallen $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welke convergeert tot een irrationaal getal $r \in [0,1]$, aantonen dat de functie waarde $T(r_n)$ nadert tot $T(r)$, wanneer n naar oneindig gaat. Zij derhalve $r \in [0,1]$ irrationaal en zij verder $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij bestaande uit rationale getallen, welke convergeert tot r. We kunnen dan iedere r_n schrijven als een volledig vereenvoudigde breuk $\frac{p_n}{q_n}$. Uit de convergentie van $\frac{p_n}{q_n}$ tot r en het feit dat r oneindig veel decimalen heeft, volgt dan dat q_n naar oneindig nadert wanneer n naar oneindig gaat. Uit dit laatste in combinatie met de definitie van de functie T volgt dan dat $T(r_n)$ naar $T(r)$ convergeert. Uit dit alles concluderen we dan inderdaad dat Thomae's functie continu is op $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$.

Eerder hebben we gezien dat de Lebesgue-maat over een aftelbare verzameling gelijk is aan 0. Derhalve zien we nu dat Thomae's functie bijna overal continu is op $[0,1]$ en concluderen we vanuit Stelling 2.2.1 dat Thomae's functie Riemann-integreerbaar is.

Laten we dit voorbeeld afronden door Thomae's functie te vergelijken met de Dirichlet functie. Zoals de lezer wellicht al is opgevallen, lijken deze beide functies op elkaar. Beide functies hebben immers dezelfde waarde voor alle irrationale getallen en verschillen slechts op de rationale getallen. Op soortgelijke wijze als net kunnen we aantonen dat de Dirichlet functie discontinu is op, zowel de rationale getallen, als op de irrationale getallen. Dat wil zeggen dat de Dirichlet functie overal discontinu is en derhalve volgt ook uit Stelling 2.2.1 dat de Dirichlet functie niet Riemann-integreerbaar is.

Bewijs van Stelling 2.2.1. In dit bewijs volgen we de behandeling van [12], p104, p105.

'$\Rightarrow$': We veronderstellen dat u Riemann-integreerbaar is. Zij verder $V(i)$, σ_u en Σ_u zoals in het bewijs van Stelling 4.1.1. Uit de definitie van het supremum en infimum vinden we dan voor iedere $\epsilon > 0$ en iedere $x \in [a, b]$ een $n(x, \epsilon) \in \mathbb{N}$ zodanig dat:

$$|\sigma_u^{V(i)}(x) - \sigma_u(x)| + |\Sigma_u^{V(i)}(x) - \Sigma_u(x)| \leq \epsilon \text{ voor alle } i \geq n_{\epsilon,x}. \tag{4.2}$$

Zij nu $x_0 \in [a, b] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V(n)$ en zij verder $i \geq n_{\epsilon,x_0}$. Er bestaan dan t_{j-1}, $t_j \in V(i)$ zodanig dat $x_0 \in (t_{j-1}, t_j)$. Uit (4.2) volgt dan dat voor alle $y \in (t_{j-1}, t_j)$ geldt:

$$\begin{aligned}
|u(x_0) - u(y)| &\leq \sup_{x\in[t_{j-1},t_j]} u(x) \; - \inf_{x\in[t_{j-1},t_j]} u(x) \\
&= \Sigma_u^{V(i)}(x_0) - \sigma_u^{V(i)}(x_0) \\
&\leq \epsilon + |\Sigma_u(x_0) - \sigma_u(x_0)|.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Zoals in het bewijs van Stelling 4.1.1 concluderen we vanuit de Riemann-integreerbaarheid van u dat $\{\Sigma_u \neq \sigma_u\}$ een λ-nul verzameling is. Uit dit laatste in combinatie met (4.3) volgt dan:

$$\{x : u \text{ niet continu in } x\} \subset \underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V(n)}_{\text{aftelbare verzameling}} \cup \overbrace{\{\Sigma_u \neq \sigma_u\}}^{\lambda\text{-nul verzameling}} \in \mathcal{N}_\lambda.$$

'$\Leftarrow$': We veronderstellen nu dat de verzameling $\{x : u \text{ niet continu in } x\}$ (een deelverzameling van) een λ-nul verzameling is. Zij nu $V(i)$ een partitie van $[a, b]$ en $x_0 \in [a, b]$ zodanig dat u continu is in x_0. Er bestaat dan een $k = k(x_0, V(i)) \in \mathbb{N}$ zodanig dat $x_0 \in [t_{k-1}, t_k]$, waarbij $t_{k-1}, t_k \in V(i)$. Gezien we zonder verlies van algemeenheid mogen veronderstellen dat $V(i) \subset V(i+1) \subset \cdots$, geldt dat t_{k-1}, t_k steeds dichter naar x_0 naderen, wanneer i naar oneindig gaat. Derhalve geldt:

$$\Sigma_u(x_0) - \sigma_u(x_0) \leq \sup_{x\in[t_{k-1},t_k]} u(x) \; - \inf_{x\in[t_{k-1},t_k]} u(x),$$

waarbij uit de continuïteit van u in x_0 volgt dat de laatste term naar nul gaat wanneer i naar oneindig gaat. We zien dus dat het volgende geldt:

$$\{x : u \text{ continu in } x\} \subset \{\Sigma_u = \sigma_u\},$$

ofwel,

$$\{\Sigma_u \neq \sigma_u\} \subset \{x : u \text{ niet continu in } x\}.$$

Uit dit laatste in combinatie met de veronderstelling dat de verzameling $\{x : u \text{ niet continu in } x\}$ (een deelverzameling van) een λ-nul verzameling is volgt dan dat de meetbare verzameling $\{\Sigma_u \neq \sigma_u\}$ een deelverzameling van een nul verzameling is. Hieruit volgt dan:

$$\underline{\int} u \stackrel{\text{def}}{=} \int_{[a,b]} \Sigma_u \, \mathrm{d}\lambda = \int_{[a,b]} \sigma_u \, \mathrm{d}\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\int} u,$$

ofwel, u is Riemann-integreerbaar. $\square$

Merk op dat we in het bovenstaande bewijs gebruik hebben gemaakt van de eigenschappen dat de vereniging van een tweetal nul verzamelingen weer een nul verzameling definieert en dat bovendien een deelverzameling van een nul verzameling weer een nul verzameling definieert. We hebben dit echter niet expliciet bewezen. Echter, Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte, dan kan men vanuit Definitie 3.1.2 aantonen dat voor een tweetal meetbare verzamelingen $A, B \in \mathcal{A}$ de volgende eigenschappen gelden:

(i) $A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$,

(ii) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

Vanuit deze eigenschappen volgt dan inderdaad dat iedere deelverzameling van een nul verzameling een nul verzameling definieert en bovendien dat de vereniging van twee nul verzamelingen ook weer een nul verzameling definieert.

4.2 De klasse van (λ-)integreerbare reële functies van de vorm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

Nu we de klasse van eigenlijke Riemann-integreerbare functies hebben gevisualiseerd, zullen we de klasse van bijna overal begrensde, Lebesgue-integreerbare functies, gedefinieerd op een gesloten en begrensd interval visualiseren.

Uitgaande van de Lebesgue-maat is het gemakkelijk in te zien dat ieder begrensd interval meetbaar is en van eindige maat is. In het bijzonder zien we dus dat de klasse van bijna overal begrensde, Lebesgue-integreerbare functies, gedefinieerd op een gesloten en begrensd interval een domein van eindige maat hebben. Uit dit laatste in combinatie met de eis dat een dergelijke functie bijna overal begrensd moet zijn om deel uit te kunnen maken van de reeds genoemde klasse, volgt dat we deze gewenste klasse als volgt kunnen visualiseren.

Stelling 4.2.1. *Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte met $\mu(X) < \infty$. Zij verder $f : X \to \mathbb{R}$ een functie die bijna overal begrensd is. Dan is f Lebesgue-integreerbaar dan en slechts dan als f meetbaar is.*

Bewijs. '$\Rightarrow$': Deze implicatie volgt direct uit Definitie 3.1.6.
'$\Leftarrow$': We veronderstellen dat f een meetbare functie is. Uit deze veronderstelling volgt dat f^+ en f^- meetbare functies zijn. Uit Lemma 3.1.1 volgt dan het bestaan van twee rijen van stijgende positieve simpele functies, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}^+(\mathcal{A})$ zodanig dat $\lim_{n\to\infty} f_n = f^+$ en $\lim_{n\to\infty} g_n = f^-$. Uit de begrensdheid van f a.e. volgt het bestaan van een constante $M > 0$ zodanig dat $|f| \leq M$ a.e. Uit het gegeven dat $\mu(X) < \infty$ volgt dan dat de functie $g : X \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door de constante functie M Lebesgue-integreerbaar is.

Merk op dat $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ en dat bovendien geldt:

(a) $|f_n(x)| \leq g(x)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, voor bijna alle $x \in X$ en $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$,

(b) $f^+(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ bestaat in $[-\infty, \infty]$ voor alle $x \in X$.

vanuit Stelling 3.2.4 observeren we dan dat $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Op soortgelijke wijze observeren we vanuit Stelling 3.2.4 dat $\int f^- \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Uit Definitie 3.1.6 volgt dan dat f Lebesgue-integreerbaar is. □

Vanuit de bovenstaande stelling concluderen we dus dat de klasse van bijna overal begrensde, Lebesgue-integreerbare functies, gedefinieerd op een gesloten en begrensd interval precies wordt gegeven door alle meetbare, bijna overal begrensde functies die gedefinieerd zijn op een gesloten en begrensd interval. Hiermee hebben we de gewenste klasse gevisualiseerd. Tevens concluderen we vanuit Stellingen 4.1.1 en 2.2.1 in combinatie met Stelling 4.2.1

dat het verschil tussen de klasse van eigenlijke Riemann-integreerbare functies en de klasse van bijna overal begrensde, Lebesgue-integreerbare functies, gedefinieerd op een gesloten en begrensd interval precies wordt gegeven door de klasse van alle meetbare, bijna begrensde functies, gedefinieerd op een gesloten en begrensd interval, welke niet bijna overal continu zijn.

Hoofdstuk 5

Waarom Riemann-integratie?

In Hoofdstukken 3 & 4 hebben we een aantal significante voordelen van Lebesgue-integratie gezien ten opzichte van Riemann-integratie. Bovendien hebben we gezien dat Lebesgue-integratie een uitbreiding is van Riemann-integratie wanneer we ons beperken tot eigenlijke Riemann-integreerbare functies. Een logische (en wellicht wel een prangende) vraag om derhalve op dit moment te stellen is:

> "Waarom Riemann-integratie, terwijl Lebesgue-integratie tot op grote hoogte een uitbreiding is van Riemann-integratie en vele voordelen heeft ten opzichte van Riemann-integratie?"

Hoewel de Riemann-integraal niet vele voordelen heeft ten opzichte van de Lebesgue-integraal, geven we in dit korte hoofdstuk een aantal sterke kanten van de Riemann-integraal welke we in verband zullen brengen met Lebesgue-integratie.

Ten eerste is Riemann-integratie intuïtief gezien veel duidelijker dan Lebesgue-integratie. Immers, informeel gesproken is het verschil tussen deze beide vormen van integratie dat we in het geval van Riemann-integratie integreren over het domein van een gegeven Riemann-integreerbare functie en we in het geval van Lebesgue-integratie integreren over het co-domein van een Lebesgue-integreerbare functie. Echter, vanuit de Riemann-integratie valt duidelijk in te zien dat we inderdaad integreren over het domein van een geschikte functie door steeds fijnere verdelingen te kiezen, terwijl het over het algemeen lastiger valt in te zien dat we bij Lebesgue-integratie integreren over het co-domein van een geschikte functie f door steeds betere simpele functies te kiezen als benadering voor de positieve (f^+) en negatieve (f^-) gedeelten van f. Bovendien zijn de definities van boven- en ondersommen gemakkelijker te begrijpen dan de definities van integralen van simpele functies, vanwege de maattheorie die aan dit laatste verbonden is. Dit brengt ons bij het volgende.

Ten tweede is de Riemann-integraal gemakkelijker te definiëren vergeleken met de Lebesgue-integraal. Immers, voor het definiëren en begrijpen van de Riemann-integraal, hoeft men slechts te beschikken over een stuk basis kennis van de analyse. Echter, basis kennis vanuit de analyse is niet genoeg om de Lebesgue-integraal te kunnen definiëren en te begrijpen, gezien kennis over maattheorie noodzakelijk is (zoals de lezer in hoofdstuk 3 heeft geobserveerd.) Vanwege dit sterke punt van Riemann-integratie is het ook logisch dat men over het algemeen eerst kennis maakt met de Riemann-integraal.

Ten derde kunnen we de Riemann-integratie generaliseren tot integratie volgens Henstock-Kurzweil. Deze laatste vorm van integratie is een uitbreiding van Lebesgue-integratie en heeft bovendien een zeer sterke fundamentele stelling van de Infinitesimaalrekening. In het volgende hoofdstuk - welke compleet is toegewijd aan de Henstock-Kurzweil-integraal - zal de lezer meer kennis op doen over de Henstock-Kurzweil-integraal.

Hoofdstuk 6

De Henstock-Kurzweil-integraal

Zoals in het vorige hoofdstuk al is benoemd, zullen we ons in dit hoofdstuk bezighouden met de Henstock-Kurzweil-integraal. Deze vorm van integratie kunnen we afleiden uit de integratie methode volgens Riemann, zoals de lezer zal zien in paragraaf 6.1. We zullen in paragraaf 6.2 bewijzen dat de Henstock-Kurzweil-integraal een generalisatie is van de Riemann-integraal en bovendien zullen we kort beargumenteren dat in een zeker opzicht de Henstock-Kurzweil-integraal een uitbreiding is van de Lebesgue-integraal. Ten slotte behandelen we in paragraaf 6.3 de fundamentele stelling van de Infinitesimaalrekening behorend bij deze vorm van integratie. Het blijkt immers dat Henstock-Kurzweil integratie de inverse operatie is van differentiatie!

6.1 Definitie van de Henstock-Kurzweil-integraal

In deze paragraaf volgen we de behandeling van [7].

Zoals reeds benoemd kunnen we de Henstock-Kurzweil-integraal definiëren vanuit de definitie van de Riemann-integraal. Echter, we zullen dit doen vanuit een definitie van de Riemann-integraal welke anders is geformuleerd dan Definitie 2.1.2 (namelijk in ϵ-δ-vorm.) Om deze equivalente definitie van de Riemann-integraal te kunnen formuleren, dient de lezer bekend te zijn met het begrip 'gelabelde partitie.'

Zij in deze paragraaf $I = [a, b]$ een gesloten en begrensd interval. We herinneren de lezer eraan dat een partitie $V := \{[x_{i-1}, x_i] : 1 \leq i \leq n\}$ van I gedefinieerd is als een verdeling van I in een eindig aantal gesloten en begrensde deelintervallen $[x_{i-1}, x_i]$, waarbij slechts de bijbehorende eindpunten in intersecties van paren van dergelijke deelintervallen kunnen voorkomen. We observeren van hieruit nu de volgende definitie.

Definitie 6.1.1 (Gelabelde partitie)**.** *Een gelabelde partitie,*

$$T := \{(t_i, [x_{i-1}, x_i]) : 1 \leq i \leq n\},$$

van een interval I is een eindige verzameling geordende paren, waarbij $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ voor alle i, en waarbij de intervallen $[x_{i-1}, x_i]$ een partitie vormen van I. De getallen t_i zijn de corresponderende labels.

Voor het gemak worden vaak de begin- of eindpunten van de deelintervallen $[x_{i-1}, x_i]$ gekozen als labels. Beschouw als voorbeeld het interval $[0, 1]$. Merk dan vervolgens op dat de verzameling $\{(0, [0, \frac{1}{3}]), (\frac{1}{3}, [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]), (\frac{2}{3}, [\frac{2}{3}, 1])\}$ een gelabelde partitie van $[0, 1]$ is. Nu de lezer bekend is met het begrip 'gelabelde partitie', kunnen we observeren hoe een Riemann-som in termen van een gelabelde partitie is gedefinieerd. Deze definitie is als volgt.

Definitie 6.1.2 (Riemann-som)**.** *Zij $T := \{(t_i, [x_{i-1}, x_i]) : 1 \leq i \leq n\}$ een gelabelde partitie van I en zij verder $f : I \to \mathbb{R}$ een functie. Dan is*

$$S(f, T) := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

De Riemann-som van de functie f corresponderend met de gelabelde partitie T.

Nu we de definitie van een riemann-som weten, in termen van een gelabelde partitie, kunnen we de definitie van de Riemann-integraal definiëren in termen van een gelabelde partitie (en in ϵ-δ-vorm.) Deze definitie is als volgt.

Definitie 6.1.3 (Riemann-integraal in ϵ-δ-vorm)**.** *Voor een functie $f : I \to \mathbb{R}$, is het getal $A = \int_a^b f$ de Riemann-integraal van f indien voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ bestaat zodanig dat als $T := \{(t_i, [x_{i-1}, x_i]) : 1 \leq i \leq n\}$ een willekeurige gelabelde partitie is van I waarbij $0 < x_i - x_{i-1} \leq \delta$ voor alle $i = 1, 2, \cdots, n$, er dan geldt $|S(f, T) - A| \leq \epsilon$.*

We kunnen vanuit deze definitie van de Riemann-integraal in ϵ-δ-vorm de Henstock-Kurzweil-integraal definiëren. Om dit laatste te kunnen doen zal de lezer, ter voorbereiding, eerst nog kennis op moeten doen van een tweetal definities en het zogenaamde Lemma van Cousin.

Definitie 6.1.4 (Gauge)**.** *Een functie γ gedefinieerd op het interval I wordt een gauge genoemd indien geldt dat $\gamma(x) > 0$ voor alle $x \in I$.*

Zoals de lezer wellicht zelf al heeft geobserveerd, zijn er vele voorbeelden van gauges te verzinnen. Denk bijvoorbeeld aan alle positieve constante functies gedefinieerd op een interval I. Of denk aan de cosinus-functie gedefinieerd op het interval $[0, 1]$.

Definitie 6.1.5 (γ-fijn)**.** *Zij γ een gauge op het interval I en zij verder $T := \{(t_i, [x_{i-1}, x_i]) : 1 \leq i \leq n\}$ een gelabelde partitie van I. Dan wordt T γ-fijn genoemd indien $x_i - x_{i-1} \leq \gamma(t_i)$ voor alle $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Het blijkt dat er voor iedere gauge γ gedefinieerd op het interval I een γ-fijne gelabelde partitie bestaat. Dit laatste staat bekend als het Lemma van Cousin.

Lemma 6.1.1 (Lemma van Cousin)**.** *Zij γ een gauge welke gedefinieerd is op het interval I, dan bestaat er een gelabelde partitie van het interval I welke γ-fijn is.*

Een manier om Lemma 6.1.1 te bewijzen is doormiddel van de verzameling S welke gedefinieerd is door:

$$S := \{x \in (a, b] : \exists\ \gamma\text{-fijne gelabelde partitie van } [a, x]\}.$$

Het doel van dit bewijs is dan dat men laat zien dat het supremum van S bestaat en wordt gegeven door b. Voor een dergelijk bewijs verwijzen we de lezer naar [7].

We kunnen nu de Henstock-Kurzweil-integraal definiëren. De definitie is als volgt.

Definitie 6.1.6 (Henstock-Kurzweil-integraal)**.** *Voor een functie $f : I \to \mathbb{R}$, is het getal $B = \int_a^b f$ de Henstock-Kurzweil-integraal van f indien voor elke $\epsilon > 0$ een gauge γ bestaat zodanig dat als $T := \{(t_i, [x_{i-1}, x_i]) : 1 \leq i \leq n\}$ een γ-fijne, gelabelde partitie is, er dan geldt $|S(f, T) - B| \leq \epsilon$.*

6.2 De Henstock-Kurzweil integraal tegenover de Riemann- en Lebesgue-integraal

Het doel van deze paragraaf is te bewijzen dat de Henstock-Kurzweil-integraal een generalisatie is van de Riemann-integraal en we zullen beknopt laten zien dat de Henstock-Kurzweil-integraal een uitbreiding is van de klasse van reële, Lebesgue-integreerbare functies. We veronderstellen weer dat $I = [a, b]$ een gesloten en begrensd interval is.

Stelling 6.2.1 (Stelling 3.1 uit [7]). *Zij $f : I \to \mathbb{R}$ een Riemann-integreerbare functie op I met $\int_a^b f = A$, dan is f Henstock-Kurzweil-integreerbaar op I met $\int_a^b f = A$.*

Bewijs. In dit bewijs volgen we de behandeling van [7], p8.

We veronderstellen dat de functie $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar is op I. Zij nu $\epsilon > 0$. Gezien f Riemann-integreerbaar is bestaat er een constante $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ zodanig dat als $T := \{(t_i, [x_{i-1}, x_i]) : 1 \leq i \leq n\}$ een gelabelde partitie is op I waarbij $x_i - x_{i-1} \leq \delta$ voor alle $i = 1, 2, \cdots, n$, er dan geldt $|S(f, T) - A| \leq \epsilon$. We kiezen nu onze gauge γ, gedefinieerd op I, door:

$$\gamma(x) = \delta.$$

We weten dan dat indien T een γ-fijne, gelabelde partitie is van I, er geldt:

$$|S(f, T) - A| \leq \epsilon.$$

Omdat we ϵ willekeurig gekozen hebben, weten we dat dit laatste geldt voor alle $\epsilon > 0$ en dus concluderen we dat f Henstock-Kurzweil-integreerbaar is met $\int_a^b f = A$. $\square$

Vanuit het bovenstaande bewijs en Definities 6.1.3 en 6.1.6, kan de lezer observeren dat de Henstock-Kurzweil-integraal inderdaad een generalisatie is van de Riemann-integraal.

Het blijkt dat de klasse van Henstock-Kurzweil-integreerbare functies ook een uitbreiding is van reële functies uit $\mathcal{L}^1(\lambda)$. We zullen dit nu beknopt beargumenteren. Om dit te kunnen doen maken we gebruik van Stellingen 3.2.1 en 3.2.4, welke ook gelden binnen de context van Henstock-Kurzweil-integratie. Dit laatste zullen we echter niet bewijzen gezien dit, noch het doel van deze paragraaf is, noch tot de kern van deze scriptie behoort. Eveneens zullen we het volgende resultaat - welke we dadelijk zullen toepassen in onze beknopte argumentatie - niet bewijzen.

Stelling 6.2.2 (Lusin, [10], p43)**.** *Zij f een meetbare functie, dan bestaat er een rij van continue functies, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welke bijna overal convergeert tot f.*

De beknopte argumentie is nu als volgt.

Zij $f : D \to \mathbb{R}$ een reële functie uit $\mathcal{L}^1(\lambda)$. We kunnen dan f schrijven als $f^+ - f^-$ (herinner dat $f^+(x) := \max(f(x), 0)$ en $f^-(x) := -\min(f(x), 0)$.) Uit de veronderstelling dat f Lebesgue-integreerbaar is in combinatie met Definitie 3.1.6 volgt dat de niet-negatieve, reële functies f^+ en f^- Lebesgue-integreerbaar zijn en dus in het bijzonder Lebesgue-meetbaar zijn. Vanuit Stelling 6.2.2 volgt dan het bestaan van twee rijen van continue functies, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welke, respectievelijk, bijna overal convergeren tot f^+ en f^-.

Zonder verlies van algemeenheid beschouwen we nu alleen f^+. Voor deze laatste functie definiëren we nu de volgende rij van functies:

$$f_m^+(x) := \min(f^+(x), m), \text{ met}, x \in D \text{ en } m \in \mathbb{N}. \tag{6.1}$$

Gezien f^+ en de constante functie m Lebesgue-integreerbaar zijn en het minimum over twee Lebesgue-integreerbare functies ook weer Lebesgue-integreerbaar is (zie [12], Stelling 10.4(iii)), observeren we nu dat f_m^+ Lebesgue-integreerbaar is voor iedere $m \in \mathbb{N}$. Voor iedere n kunnen we vervolgens f_n ook afkappen met iedere $m \in \mathbb{N}$, zoals in (6.1). Voor iedere m is dan de resulterende rij continu vanwege de continuïteit van, zowel de functies $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, als de constante functie m. Ook merken we op dat een dergelijke resulterende rij van continue functies, na afkapping met de constante functie m, bijna overal convergeert tot f_m^+ en per definitie wordt gedomineerd door m.

Gezien iedere continue reële functie Riemann-integreerbaar is, volgt dan uit de continuïteit van, zowel de reële constante functie m, als de rij van reële functies - welke bijna overal convergeren tot f_m^+ en bovendien worden gedomineerd door m - in combinatie met Stellingen 4.1.1 en 6.2.1 dat we voor iedere f_m^+ een rij van, zowel Lebesgue-, als Henstock-Kurzweil-integreerbare functies hebben die bijna overal convergeren tot f_m^+ en worden gedomineerd door de constante functie m welke ook, zowel Lebesgue- als Henstock-Kurzweil-integreerbaar is. Bovendien weten we vanuit de Stellingen 4.1.1 en 6.2.1 dat de Lebesgue-integralen van ieder element uit de laatstgenoemde rij en de functie m gelijk zijn aan de corresponderende Henstock-Kurzweil integralen. Uit dit alles in combinatie met de gedomineerde convergentie stelling (Stelling 3.2.4) volgt dan dat f_m^+, zowel Lebesgue- als Henstock-Kurzweil-integreerbaar is voor iedere $m \in \mathbb{N}$ en dat beide integratie methoden dezelfde waarden geven voor de corresponderende integralen (dus $(\lambda) \int_D f_m \, \mathrm{d}\lambda = (HK) \int_D f_m \, \mathrm{d}x$ voor elke $m \in \mathbb{N}$, waarbij $(\lambda) \int$ en $(HK) \int$, respectievelijk, notatie is voor de Lebesgue- en Henstock-Kurzweil-integraal.)

Nu dan, merk op dat de rij $(f_m^+)_{m \in \mathbb{N}}$, zoals gedefinieerd in (6.1) een monotoon stijgende rij van positieve, Henstock-Kurzweil-integreerbare functies is welke bijna overal convergeren tot de limietsfunctie f^+. Uit de Lebesgue-integreerbaarheid van deze limietsfunctie f^+, weten we dan vanuit de monotone convergentie stelling (Stelling 3.2.1) dat het volgende geldt:

$$\lim_{m \to \infty} \int_D f_m \, \mathrm{d}\lambda < \infty. \tag{6.2}$$

Gezien we weten dat de Lebesgue-integralen van de functies f_m gelijk zijn aan de corresponderende Henstock-Kurzweil-integralen geldt (6.2) ook in termen van de Henstock-Kurzweil-integraal. Uit dit laatste in combinatie met Stelling 3.2.1 volgt dan nu dat de limietsfunctie f^+ ook Henstock-Kurzweil-integreerbaar is en dat de bijbehorende Henstock-Kurzweil-integraal gelijk is aan de bijbehorende Lebesgue-integraal. Op soortgelijke wijze als net kunnen we ook aantonen dat f^- Henstock-Kurzweil-integreerbaar is en dat de bijbehorende Henstock-Kurzweil-integraal gelijk is aan de bijbehorende Lebesgue-integraal. Uit dit alles in combinatie met de lineariteit van de Henstock-Kurzweil-integraal volgt dan dat de functie f Henstock-Kurzweil-integreerbaar is en dat de bijbehorende Henstock-Kurzweil-integraal gelijk is aan de bijbehorende Lebesgue-integraal.

Tot dusver hebben we kort beargumenteerd dat iedere reële Lebesgue integreerbare functie f uit $\mathcal{L}^1(\lambda)$ ook Henstock-Kurzweil-integreerbaar is en dat beide integratie methoden dezelfde integraal opleveren. Het resteert ons nu dus nog te laten zien dat er een Henstock-Kurzweil-integreerbare functie bestaat welke niet Lebesgue-integreerbaar is. Indien we dit laatste hebben behandeld, dan hebben we dus inderdaad kort beargumenteerd dat de Henstock-Kurzweil-integraal een uitbreiding is van de klasse van reële Lebesgue-integreerbare functies uit $\mathcal{L}^1(\lambda)$. We beëindigen derhalve deze paragraaf met een voorbeeld van een reële functie welke Henstock-Kurzweil-integreerbaar is, maar niet Lebesgue-integreerbaar.

Voorbeeld 6.2.1 (De Dirichlet integraal)**.** *We beschouwen de functie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door:*

$$f(x) := \frac{\sin x}{x}.$$

We zullen laten zien dat f niet Lebesgue-integreerbaar is op $(0, \infty)$ met behulp van Stelling 3.2.1. Dit gaat als volgt.

Herinner allereerst vanuit Definitie 3.1.6 dat een functie g Lebesgue-integreerbaar is precies als de functie $|g|$ Lebesgue-integreerbaar is. Indien we dus kunnen aantonen dat $|f| := \frac{|\sin x|}{x}$ niet Lebesgue-integreerbaar is op $(0, \infty)$, dan is f ook niet Lebesgue-integreerbaar op $(0, \infty)$. Definieer derhalve nu op $(0, \infty)$ de rij van functies $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ door:

$$f_n(x) := \begin{cases} |f(\frac{1}{n})| & \textit{als } 0 < x < \frac{1}{n} \\ |f(x)| & \textit{als } x \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Merk dan nu op dit een rij van continue functies is welke monotoon stijgend is en convergeert tot de limietsfunctie $|f|$. Uit de continuïteit van alle f_n volgt dan dat elke f_n Lebesgue-integreerbaar is. Uit Stelling 3.2.1 volgt dan nu dat $|f|$ Lebesgue-integreerbaar is precies als $\lim_{n \to \infty} \int_{(0,\infty)} f_n \, \mathrm{d}\lambda < \infty$. Observeer echter dat dit laatste niet het geval is. We concluderen derhalve dat de functie $|f|$ niet Lebesgue-integreerbaar is op het interval $(0, \infty)$. Derhalve is de functie f ook niet Lebesgue-integreerbaar op het interval $(0, \infty)$.

We hebben zojuist gezien dat $(\lambda) \int_{(0,\infty)} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}\lambda$ niet bestaat. Deze integraal staat ook wel bekend als de Dirichlet integraal en is wél Henstock-Kurzweil-integreerbaar [4].

6.3 De fundamentele stelling van de Infinitesimaalrekening

We beëindigen dit hoofdstuk met het formuleren en bewijzen van de fundamentele stelling van de Infinitesimaalrekening voor de Henstock-Kurzweil-integraal. Herinner dat deze stelling in de context van Riemann-integratie als volgt is.

Stelling 6.3.1 (Fundamentele stelling van de Infinitesimaalrekening in de context van Riemann-integratie)**.** *Zij $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ differentieerbaar op ieder punt $x \in [a, b]$. Zij verder $f = F'$ gedefinieerd op het interval $[a, b]$ Riemann-integreerbaar. Dan geldt de volgende gelijkheid:*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{6.3}$$

We merken binnen deze stelling op dat het in de context van Riemann-integratie noodzakelijk is dat de functie f zoals in de stelling Riemann-integreerbaar moet zijn. In de context van Henstock-Kurzweil integratie blijkt het echter niet noodzakelijk te zijn dat de functie f Henstock-Kurzweil-integreerbaar moet zijn op dat (6.3) geldt. Daarmee wordt de fundamentele stelling van de Infinitesimaalrekening in de context van Henstock-Kurzweil-integratie als volgt.

Stelling 6.3.2 (Fundamentele stelling van de Infinitesimaalrekening in de context van Henstock-Kurzweil-integratie, Stelling 5.1 uit [7])**.** *Zij $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ differentieerbaar op ieder punt $x \in [a, b]$, dan is $f = F'$ Henstock-Kurzweil-integreerbaar op $[a, b]$ en geldt de volgende gelijkheid:*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Bewijs. In dit bewijs volgen we de behandeling van [7].

Zij $\epsilon > 0$ en zij verder $t \in [a, b]$. Gezien we veronderstellen dat F differentieerbaar is in t, bestaat er een $\delta = \delta(t)$ zodanig dat:

$$0 \leq |x - t| \leq \delta,\ x \in [a, b] \Longrightarrow \left| \frac{F(x) - F(t)}{x - t} - f(t) \right| \leq \frac{\epsilon}{b - a}.$$

We zullen nu voor onze gauge, $\gamma(t)$, precies de zojuist genoemde $\delta(t)$ kiezen:

$$\gamma(t) := \delta(t).$$

Dit laatste mogen we doen gezien $\delta = \delta(t)$ strikt positief is voor iedere keuze van $t \in [a, b]$.

Nu dan, indien $|x - t| \leq \gamma(t)$ voor $x, t \in [a, b]$, dan hebben we dus het volgende:

$$|F(x) - F(t) - f(t)(x - t)| \leq \frac{\epsilon}{b - a}|x - t|. \tag{6.4}$$

Zij vervolgens $a \leq \alpha \leq t \leq \beta \leq b$ en zij verder $0 \leq |\beta - \alpha| \leq \gamma(t)$. Dan geldt vanwege de driehoeksongelijkheid in combinatie met (6.4) het volgende:

$$\begin{aligned} |F(\beta) - F(\alpha) - f(t)(\beta - \alpha)| &\leq \frac{\epsilon}{b - a}|\beta - t| + \frac{\epsilon}{b - a}|t - \alpha| \\ &= \frac{\epsilon}{b - a}|\beta - \alpha|. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Zij nu $T := \{(t_i, [x_{i-1}, x_i]) : 1 \leq i \leq n\}$ een γ-fijne gelabelde partitie van $[a, b]$. Merk dan op dat vanuit de driehoeksongelijkheid in combinatie met (6.5) volgt:

$$\begin{aligned} |S(f, T) - (F(b) - F(a))| &= |F(b) - F(a) - S(f, T)| \\ &= \left|\sum_{i=1}^{n}(F(x_i) - F(x_{i-1})) - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^{n}(F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1}))\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}|F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{b - a}|x_i - x_{i-1}| \\ &= \frac{\epsilon}{b - a}(b - a) = \epsilon. \end{aligned}$$

Gezien we ϵ willekeurig gekozen hebben, geldt dit laatste voor elke $\epsilon > 0$ en derhalve concluderen we dat $f = F'$ Henstock-Kurzweil-integreerbaar is op $[a, b]$ met $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. $\square$

Merk ten slotte op dat uit de fundamentele stelling voor de Infinitesimaalrekening in de context van Henstock-Kurzweil-integratie volgt dat Henstock-Kurzweil-integratie inderdaad de inverse operatie is van differentiatie!

Hoofdstuk 7

Conclusie

Hoewel de Riemann-integraal beschikt over een aantal mooie eigenschappen, hebben we echter ook gezien dat de Riemann-integraal beperkingen heeft op het gebied van discontinue functies en rijen van integreerbare functies. Zo hebben we immers aan de hand van de Dirichlet functie gezien dat, zowel de monotone convergentie stelling (Stelling 3.2.1), als de gedomineerde convergentie stelling (Stelling 3.2.4) niet gelden in de context van Riemann-integratie. Ook hebben we gezien dat iedere eigenlijke Riemann-integreerbare functie ook Lebesgue-integreerbaar is, terwijl dit andersom niet per se geldt. Daarmee hebben we gezien dat de klasse van Lebesgue-integreerbare functies een uitbreiding is van de klasse van eigenlijke Riemann-integreerbare functies. Echter, dit alles neemt niet weg dat de Riemann-integraal intuïtief veel duidelijker is dan de Lebesgue-integraal en daarmee wellicht ook gemakkelijker valt te begrijpen dan de Lebesgue-integraal, gezien de Riemann-integraal niet berust op een stuk maattheorie in tegenstelling tot de Lebesgue-integraal. Daar komt ten slotte bovenop dat we de Riemann-integraal kunnen generaliseren tot de Henstock-Kurzweil-integraal welke - zoals we reeds hebben gezien - een uitbreiding is van alle reële Lebesgue-integreerbare functies met betrekking tot de Lebesgue-maat en bovendien de inverse operator is voor differentiatie; iedere reële afgeleide functie is Henstock-Kurzweil-integreerbaar. Desondanks concluderen we echter dat Lebesgue-integratie ontzettend krachtig is, gezien Lebesgue-integratie toepasbaar is op een willekeurige maatruimte $(X, \mathcal{A}, \mu)$, terwijl dit noch het geval is voor Riemann-integratie, noch voor Henstock-Kurzweil-integratie. Zo is voor integratie over een kans ruimte (Zie voorbeeld 4.5(iv) uit [12]), de Lebesgue-integraal onmisbaar!

Dankbetuigingen

Ik ben Dr. Ivan Kryven en Rik Versendaal zeer dankbaar voor hun begeleiding bij het schrijven van deze scriptie. Zo hebben zij mij advies gegeven indien ik vastliep en feedback gegeven waar dit nodig was. In het bijzonder wil ik Rik Versendaal bedanken voor zijn strategie voor het kort beargumenteren dat iedere reële Lebesgue-integreerbare functie Henstock-Kurzweil-integreerbaar is. Na dat ik lange tijd was vastgelopen op dit onderdeel van deze scriptie, bleek deze strategie uiteindelijk de oplossing te bieden!

Bibliografie

[1] A. (2016). [Reactie op "Why isn't Dominated Convergence Theorem taught in intro analysis"]. *math.stackexchange.com.* https://math.stackexchange.com/questions/1779831/why-isnt-dominated-convergence-theorem-taught-in-intro-analysis (Geraadpleegd op 05-05-2021.)

[2] v.d. Ban, E. (2013). *Inleiding Analyse (dictaat).*

[3] Barnett, J.H. (2018). *Henri Lebesgue and the Development of the Integral Concept.* https://www.maa.org/sites/default/files/images/upload_library/46/Barnett_TRIUMPHS_MiniPSPs/MiniPSP_Lebesgue%20Integration_2018_09_25.pdf (Geraadpleegd op 27-04-2021 & 28-05-2021.)

[4] Bartle, R.G., & Sherbert, D.R. (2011). *Introduction to real analysis* (2de ed.) Wiley. p325.

[5] Bauldry, W.C. (2009). *Introduction to Real Analysis.* Wiley, p56.

[6] Darboux, G. (1875). Mémoire sur les fonctions discontinues. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 4, p57-112.

[7] van Dijk, E. (2014). *The Henstock-Kurzweil integral.* https://fse.studenttheses.ub.rug.nl/11862/1/The_Henstock-Kurzweil_integral.pdf (Geraadpleegd op 11-05-2021.)

[8] Joyce, D. (2013). *Proof of the Fundamental Theorem of Calculus.* https://www2.clarku.edu/faculty/djoyce/ma120/FTCproof.pdf (Geraadpleegd op 19-03-2021.)

[9] Lebesgue, H. (1927). Sur le développement de la notion d'intégrale. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 34 (2), p149-167.

[10] Pap, E. (2002). *Handbook of measure theory* [E-boek]. Elsevier. https://books.google.nl/books?id=zmbO4aWvcJkC&printsec=frontcover&dq=handbook+of+measure+theory&hl=nl&sa=X&redir_esc=y#v=onepage&q=handbook%20of%20measure%20theory&f=false (Geraadpleegd op 23-05-2021.)

[11] Riemann, B. (1868). Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. *Bernard Riemann's Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, 1, p213-253.

[12] Schilling, R.L. (2017). *Measures, Integrals and Martingales* (2de ed). Cambridge University Press.